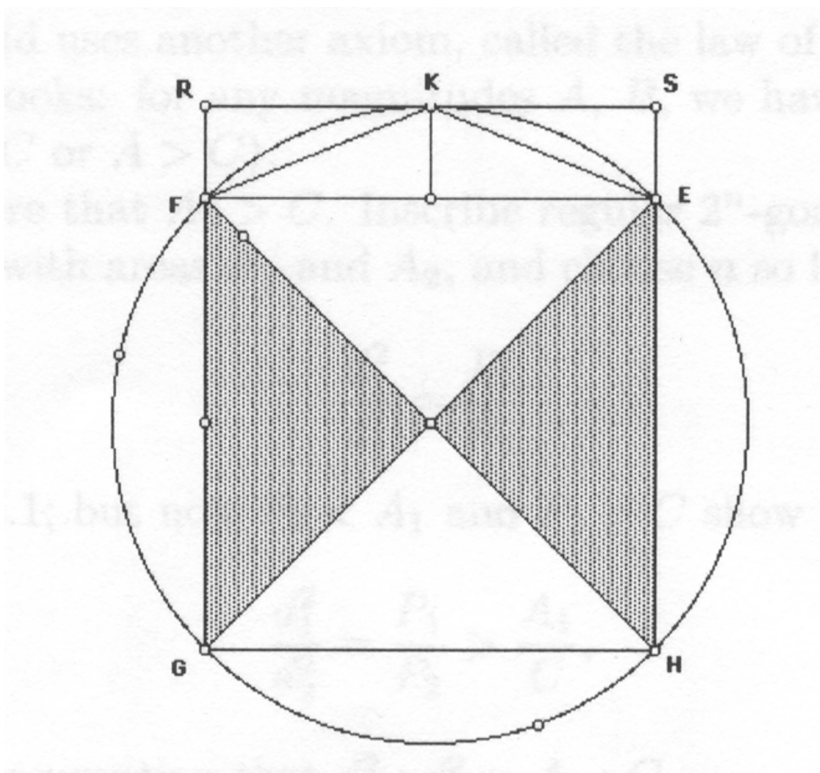
Uendelighed og 'integration' i antikken



Af:
Anne Marie Holm, Britta Frier, Leif Horn Nielsen & Lene Marie Pedersen

Vejleder:
Anders Madsen

IMFUFA, RUC
Efterår, 2004

Indholdsfortegnelse

Kapitel 1. Indledning

Det er som matematiker og ikke mindst som formidler af matematik vigtigt at kende til udviklingen i oldtidens Grækenland, da det er her, matematikken bliver grundlagt som videnskab. De gamle grækere arbejdede primært med geometri. Man kan ligefrem sige, at der dengang var lighedstegn mellem en geometer og en matematiker, hvilket også afspejles i betegnelsen geometer, som stammer fra den tid. Gennem deres udforskning af geometrien og deres interesse for de uomtvistelige sandheder, matematikken gav, kom de til at stå fadder til den aksiomatisk - deduktive opbygning af matematikken, som den dag i dag er en kerne i opbygningen af både matematik og andre naturvidenskabelige discipliner.

De matematiske værker, der blev nedfældet dengang, har haft en enorm indflydelse på udviklingen af matematikken, som vi kender den i dag. Man siger endda, om et af de helt store værker, der er bevaret for eftertiden, Euklids ”*Elementer*”, at der næppe udover biblen findes en bog, der på verdensplan er mere udbredt eller er blevet redigeret og studeret så flittigt [Heath, IX, 1931]. Den er direkte blevet brugt som undervisningsmateriale og forbillede helt op til det 20. århundrede. Der er også blevet arbejdet matematisk i andre tidligere og samtidige civilisationer – her kan specielt nævnes babylonierne. Både babylonierne og egypterne har haft direkte indflydelse på udviklingen i oldtidens Grækenland, men det er den græske matematik, der for alvor har præget udviklingen i vores vestlige civilisation. En af årsagerne til dette er, at grækernes arbejde netop var en videnskabeliggørelse af matematikken, som man ikke kender fra forløberne i andre civilisationer.

Traditionelt set menes udviklingen af den græske matematik at have taget sin begyndelse i Ionien på Lilleasiens kyst med Thales (ca. 600 f.Kr.) som sin repræsentant. I et matematikhistorisk perspektiv inddeles den græske civilisation ofte i to perioder, den klassiske periode, som varede fra 600 til 300 f.Kr., og den hellenistiske eller aleksandrinske periode fra 300 f.Kr. til 600 e.Kr. Denne inddeling skyldes, at det intellektuelle centrum i omkring 300 f.Kr. flytter fra Athen til Alexandria[1]. Selvom der i disse to perioder blev nedskrevet flittigt, er antallet af kilder og især primære kilder meget sparsomt. Dette skyldes, dels at papyrus, som de skrev deres afhandlinger på, er let forgængeligt, og dels at grækernes store biblioteker blev ødelagt af senere civilisationer. Der er derfor huller i vores nutidige viden, og nogle konklusioner kan diskuteres, men de grundlæggende fakta skulle være i orden [Kline, III, 1972].

[1] Alexandria blev grundlagt i 331 f.Kr. af Alexander den Store, og det var oldtidens største by efter Rom. I dag er det Egyptens næststørste by, den har navnet al-Iskandariyya og ligger 200 km nord for Cairo ud til Middelhavets kyst. [Den Store Danske Encyklopædi, 2000].

Problemstilling

Der var i det gamle Grækenland ikke det samme skel mellem forskellige videnskabelige discipliner, som der er i dag, hvor vores viden er så enorm, at man kun kan være ekspert inden for en endog ret begrænset del af en enkelt videnskab. Dengang som op til nyere tid, var det helt almindeligt at mestre flere videnskabelige discipliner på én gang. Der var derfor i langt højere grad direkte samspil mellem de forskellige fagområder, og dette gælder også for matematik og filosofi. I forbindelse med samspillet mellem matematikken og filosofien er et interessant emne det uendelige eller det ubegrænsede (græsk *apeiron*), som var af stor interesse for de græske tænkere.

I oldtidens Grækenland var man ikke specielt begejstret for det uendelige, men det begyndte at snige sig ind i matematikken på flere forskellige måder. Pythagoræerne opdagede f.eks., at forholdet mellem siden og diagonalen i et kvadrat ikke kunne beskrives med et rationalt tal. Gik man i gang med at tilnærme værdien af kvadratrod 2 med forholdet mellem to naturlige tal, kunne man fortsætte denne proces i det uendelige uden at nå værdien for kvadratrod 2. Ifølge legenden forsvandt den pythagoræer, der offentliggjorde dette til havs, det kunne være en Hippasos. Alternativt går historien på, at han blev bortvist fra broderskabet, og at der blev rejst en gravsten for ham, som om han var død [Heath, V, 1931]. Legende eller ej, de var ikke glade for de 'uendelige' objekter. Håndteringen af disse såkaldte inkommensurable størrelser blev klaret af Eudoxos med proportionslæren, hvilken grækerne anvendte til at repræsentere irrationale tal som forholdet mellem geometriske størrelser. I denne håndtering kan man sige, at de undgik accepten af, at et irrationalt tal er et uendeligt matematisk objekt, hvilket er grundlæggende for vores nutidige opfattelse.

Et andet sted, hvor grækerne undgik det uendelige i matematikken, var i deres bestemmelse af arealer og voluminer af krumme geometriske figurer. Til deres 'integration' anvendte de exhaustionsmetoden og dobbeltmodstridsbeviset. Denne fremgangsmåde, er udviklet af Eudoxos, beskrevet af Euklid i hans "*Elementer*", og bragt til sine ypperste anvendelser af Archimedes. Et af de fascinerende aspekter ved denne metode er netop, at den er matematisk stringent samtidig med at den omgår det aktuelt uendelige, der er essentielt for dens moderne pendant – integralteorien. Integralteorien eller mere bredt analysen har en meget lang og sej udviklingshistorie, hvor netop indførelsen af matematisk uendelighed specielt via karakteriseringen af de reelle tal er en af de ting, der får den til at falde på plads eller rettere giver den et stringent grundlag.

I forbindelse med grækernes exhaustionsmetode skriver Heath:

"*… the Greek geometers shrank from the use of such expressions as indefinitely great and infinitely small and substituted the idea of things* ***greater*** *or* ***less than any***

***assigned magnitude**. Thus, as Hankel says, they never said that a circle **is** a polygon with an infinite number of infinitely small sides; they always stood still before the abyss of the infinite and never ventured to overstep the bounds of clear conception. They never spoke of an infinitely close approximation or a limiting value of the sum of a series extending to an infinite number of terms.*” [Heath, 1912, s. cxliii].

Stort set samtidigt med, at man udvikler proportionslæren og exhaustionsmetoden, hvor man undgår det uendelige i matematikken, fremstiller Aristoteles en teori for det uendelige, hvilket er den første af slagsen. I denne teori skelnes der mellem det aktuelt og det potentielt uendelige, og det er kun det potentielt uendelige, der accepteres. En af konsekvenserne i forhold til matematikken er, at Aristoteles ikke accepterer uendelige helheder, hvilket vi f.eks. gør i vores accept af de irrationale tal som uendelige objekter eller i accepten af grænseværdiers eksistens.

Man ved i dag, at Archimedes benyttede sig af en intuitiv metode til at fremsætte sine matematiske sætninger. I denne metode gennemstryger han et areal eller volumen med hhv. en linje eller et plan, og efter vægtstangsprincippet sammenligner han det ukendte areal eller volumen med et kendt. Dette leder til, at det søgte areal eller volumen intuitivt findes som summen af uendeligt mange linjer eller planer, men når Archimedes efterfølgende skulle bevise de fremsatte sætninger, gik han tilbage til exhaustionsmetoden og dobbeltmodstridsbeviset, idet han ikke opfattede de ’mekaniske’ undersøgelser som faktiske matematiske demonstrationer. I Archimedes’ arbejde ligger der en forudsigelse af den videre udvikling af den matematiske analyse, som Boyer skriver:

“*… the problems and methods of Archimedes furnished probably the strongest incentive to the later direction. The work of Archimedes so strongly suggest the newer methods of analysis that in the seventeenth century Torricelli and Wallis hazarded the opinion that the ancient Greek Mathematicians had deliberately concealed under their synthetic demonstrations the analytic devises by which they had been led to their discoveries.*” [Boyer, 1959, s. 59].

I det syttende århundrede kendte man ikke til Archimedes’ mekaniske metode, som han beskrev i manuskriptet ”*Metoden*”. Efter opdagelsen af denne i 1906 af den danske filolog Heiberg kan man sige, at Torricelli og Wallis havde ret, men det var ikke fordi de gamle grækere ville føre nogen bag lyset. De græske tænkere anså ikke de infinitesimale størrelser, som 1600-tallets matematikere anvendte, som tilladelige i matematikken [Boyer, II, 1959]. Man kan hævde, at indførelsen af infinitesimalerne var det, der satte gang i udviklingen af analysen. Samtidig kan man hævde, at denne indførelse var en begyndende optøning i forhold til Aristoteles’ uendelighedsdoktrin, og derved, at en uformel tilladelse af det aktuelt uendelige var det, der skulle til for at accelerere udviklingen af analysen, som så småt var begyndt i det gamle Grækenland.

Det er muligt, at de græske matematikere kunne være kommet længere i deres begyndende udvikling af den matematiske analyse, hvis de havde accepteret det aktuelt uendelige som en matematisk størrelse. Det kunne f.eks. være sket ved at arbejde på at indføre et grænseværdibegreb og måske endda give en matematisk generalisering af Archimedes' intuitive metode.

Problemformulering

Ovenstående leder til følgende problemformulering:

- Hvor tæt kom grækerne op til og med Archimedes på at udvikle en generel integrationsteori
- Hvorfor tog de ikke 'de sidste skridt'?
- I hvor høj grad kan det kædes sammen med filosofien og specielt Aristoteles' uendelighedsdogme, hvor det aktuelt uendelige var tabuiseret?

Rapportens opbygning

Rapporten er inddelt i 7 kapitler. Her i indledningen, kapitel 1, er problemstillingen skitseret. Dette er i kapitel 2 efterfulgt af et kort historisk rids, der giver en indføring i udviklingen af matematikken i den klassiske periode. I den forbindelse berøres filosofiens udvikling også.

I kapitel 3 beskrives Aristoteles' uendelighedsteori og hans opfattelse af kontinuumet. Dette er efterfulgt af en præsentation af tre moderne forskeres fortolkninger af Aristoteles' diskussioner om uendelighed.

I kapitel 4 beskrives proportionslæren og exhaustionsmetoden, som den er fremstillet af Euklid i hans "*Elementer*". Herefter følger en diskussion af to moderne rekonstruktioner af Exhaustionsmetodens oprindelse.

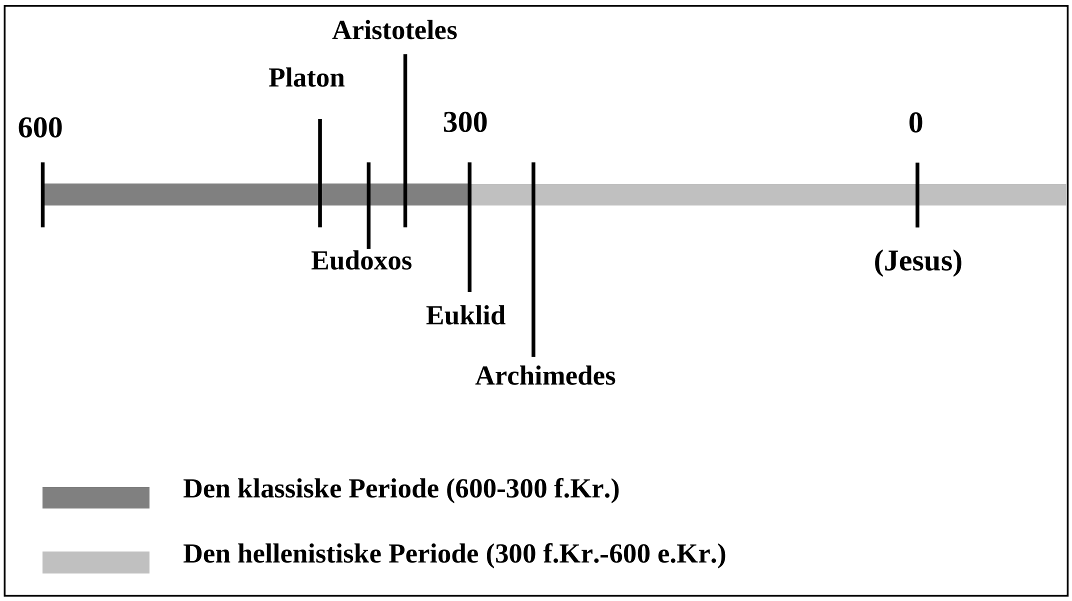
I kapitel 5 beskrives Archimedes' anvendelse af exhaustionsmetoden og hans metode til opdagelse af matematiske sætninger, som den er gengivet i værket "*Metoden*". Desuden analyseres Archimedes holdning til sine undersøgelsers stringens ud fra moderne fortolkninger, og derved også hans formodede holdning til og håndtering af aktuel uendelighed.

I kapitel 6 perspektiveres de foregående kapitler ved at beskrive Cavalieris arbejde, som repræsentant for nogle af de næste skridt i udviklingen af en integralteori.

I kapitel 7 sammenfattes de delkonklusioner, der følger de enkelte kapitler, til en overordnet besvarelse af problemformuleringen.

Kapitel 2. Historisk rids

Som nævnt i indledningen, inddeles antikken ofte i to perioder, den klassiske periode, som varede fra 600 til 300 f.Kr., og den hellenistiske periode fra 300 f.Kr. til 600 e.Kr. I denne rapport er det den klassiske periode, hvor exhaustionsmetoden blev udviklet, der fokuseres på. De hovedpersoner, der primært behandles er Eudoxos, Aristoteles, Euklid og Archimedes. Deres tidsmæssige placering er vist i figur 1.1, hvor Platon er medtaget, da han er en meget central person fra den tid, der arbejdede sammen med både Eudoxos og Aristoteles.



Figur 1.1. Tidsmæssig placering af Eudoxos, Aristoteles, Euklid og Archimedes.

Det ses på figur 1.1, at Euklid dateres til at have levet omkring skellet mellem den klassiske og den hellenistiske periode, men idet han arbejdede i Alexandria, placeres han normalt i den hellenistiske periode. Desuden ses det, at Archimedes hører til den hellenistiske periode. Både Euklid og Archimedes kan rent matematisk set knyttes til den klassiske periode [Kline, III, 1972]. Euklid, fordi han samler og organiserer de matematiske resultater, der er opnået i den klassiske periode, og Archimedes, fordi hans arbejde i høj grad er en videreudvikling af de matematiske højdepunkter fra den klassiske periode, nemlig areal- og volumenbestemmelse ved exhaustionsmetoden samt keglesnitslæren [Kline, III, 1972].

Udviklingen af den græske matematik

I dette afsnit gives der en kort indføring i udviklingen af matematikken i den klassiske periode. Undervejs vil der også blive givet eksempler på nogle af de filosofiske retninger, der prægede den klassiske periode. Dette skyldes, at det i denne periode ofte er vanskeligt at skille de to områder ad.

Tidsramme og kilder

Selvom den græske matematik bygger på den viden, de omgivende civilisationer havde opbygget, specielt babylonierne og egypterne, foregår der en selvstændig udvikling i det gamle Grækenland. Den matematiske videnskab, der udvikles, er den direkte forløber til vores nutidige matematik. Det vigtigste bidrag fra antikken er den aksiomatisk-deduktive opbygning af matematikken, hvor alle matematiske resultater skal vises deduktivt på basis af eksplicitte aksiomer [Kline, III, 1972].

Man kan datere den græske civilisation tilbage til 2800 f.Kr., og den varer til omkring 600 e.Kr., men det er først omkring 775 f.Kr., at udviklingen for alvor tager fart. Det skyldes i høj grad, at man begynder at anvende et fonetisk alfabet, og at papyrus bliver tilgængeligt, hvorved der skabes en litterær tradition. Den græske filosofi, matematik og videnskab i det hele taget siges at have sit udspring i Milet, der var en rig ionisk handelsby på Lilleasiens kyst. [Kline, III, 1972].

De kilder, som vores nutidige viden om den græske matematik bygger på, er både mindre autentiske og mindre pålidelige, end de kilder man har fra den babyloniske og egyptiske kultur. Der er faktisk slet ikke bevaret nogle af de originale manuskripter. De bedste kilder, man har, er græske afskrifter, der er skrevet 500-1500 år efter, de oprindeligt blev nedskrevet, og det er normalt ikke direkte afskrifter men redigerede værker.

Den klassiske periodes vigtigste skoler

Den græske matematik og filosofi i den klassiske periode kan siges at være bygget op om forskellige skoler, der knytter sig til forskellige fysiske lokaliteter. De vil her kort blive præsenteret.

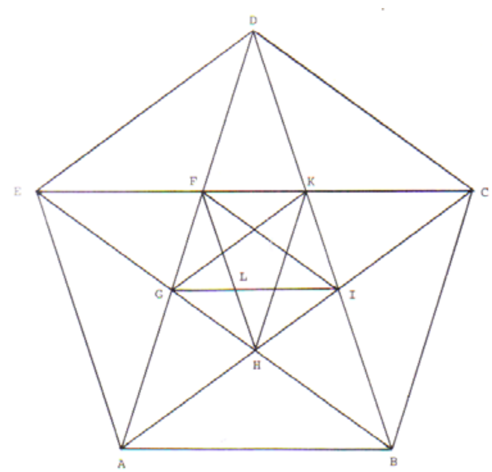
Den ioniske skole

Den første af disse skoler er den ioniske, der blev grundlagt af Thales (640-546 f.Kr.) i Milet. Denne skole bidrog ikke meget til den matematiske udvikling, selvom Thales nogen gange siges, at være den der gjorde matematikken abstrakt [Kline, III, 1972]. Det er nærmere inden for filosofien, at der kan peges på banebrydende resultater, udviklet inden for denne skole. Der opstår nemlig en ny holdning til naturen blandt de intellektuelle, som er rationel, kritisk og verdslig. Ifølge denne nye doktrin er det ikke guderne, der manipulerer menneskene og den fysiske verden. Derimod er naturen ordnet og fungerer efter fastlagte naturlove [Kline, VII, 1972].

Pythagoræerne

Det antages, at Pythagoras (ca. 585-497 f.Kr.) var elev af den ioniske skole, men han opbyggede senere sin egen skole i Kroton i Syditalien. Man har ikke nogen skrifter fra denne skole. Den viden, man har, stammer primært fra skrifter af Platon og Herodot. Det er heller ikke klart, hvad der kan tilskrives Pythagoras selv, og hvad der hører til hans tilhængere. Det, man ved, er, at Pythagoras stiftede et religiøst, videnskabeligt og filosofisk broderskab (ca. 585-400 f.Kr.), der var omgivet med stor hemmelighed og mystik.

I forhold til matematikken kan man med nogen sikkerhed sige, at det var Pythagoræerne, der var de første til at se matematikken, som en abstrakt videnskab [Kline, III, 1972]. De var meget optagede af hele tal, som de så som essensen i alt, og de udledte mange aritmetiske resultater. Derudover udviklede de også nogle geometriske resultater, hvor Pythagoras' sætning er det mest kendte, selvom om den var kendt allerede af babylonierne [Mejlbo, I, 1988]. De udledte i høj grad deres resultater fra specialtilfælde, mens den aksiomatisk-deduktive opbygning først udvikles senere, men den anvendes måske af de sene pythagoræere [Kline, III, 1972]. En anden vigtig opdagelse, der tilskrives pythagoræerne, er de inkommensurable størrelser. Det vil sige opdagelsen af, at ikke alle størrelser kan udtrykkes som forholdet mellem hele positive tal eller i vores sprog rationale tal. I den forbindelse er det vigtigt at bemærke, at tallene var de positive heltal undtaget 1, som havde en særstatus. Dette betyder, at vores rationale og irrationale tal ikke blev betragtet som tal men som forholdet mellem geometriske størrelser.



Figur 1.2. Pythagoræernes symbol, pentagrammet [Mejlbo, 1988, s. 1.17].

Pythagoræerne var ikke begejstrede for de inkommensurable størrelser, da de som udgangspunkt havde udviklet en filosofi, hvor alt kunne udtrykkes som heltal eller forhold mellem heltal. Desuden ligger der implicit i opdagelsen af de inkommensurable størrelser, en opdagelse af uendelighed i matematisk forstand, da tilnærmelsen af en inkommensurabel størrelse med et rationalt tal er en uendelig proces. Den uendelige proces ses også i Pythagoræernes symbol, pentagrammet, der er en regulær femkant, hvori der indtegnes en femstjerne, se figur 1.2. Inde i det ydre pentagram er der en ny regulær femkant, og dermed kan der indtegnes et nyt pentagram osv. i al uendelighed [Mejlbo, I, 1988].

Eleaterne

Eleaternes skole i det 5. århundrede f.Kr., som Parmeneides og Zenon hørte til, blev grundlagt af Xenophanes på Sicilien [Kline, III, 1972]. Både Parmeneides og Zenon antages oprindeligt at have tilhørt pythagoræerne [Kline, III, 1972], og de var mere filosoffer end matematikere. Udover deres formodede forbindelse til pythagoræerne var det også et problem afledt af den pythagoræiske opdagelse af inkommensurable størrelser, der lagde op til deres kendte paradokser, der skulle være fremsat af Zenon. Disse forholder sig nemlig til forholdet mellem det diskrete og det kontinuerte, hvilket optog grækerne meget [Kline, s. 34].

I eleaternes fortolkning af verden er alt – i modsætning til pythagoræernes opfattelse – en enhed, der er evig og uforanderlig [Mejlbo, I, 1988]. Det var i forsvar for denne verdensanskuelse, at Zenon skulle have fremsat sine paradokser, af hvilke der skulle have været mere end 40. Det vi i dag kender som Zenons paradokser, er de fire, der er fremstillet af Aristoteles i ”*Fysikken*”, bog VI, med det mål at gendrive dem.

Paradokserne, som ofte hævdes at have haft stor indflydelse på udviklingen af matematikken [Mejlbo, I, 1988], kan deles i to grupper: 1) to paradokser, hvis forudsætning er, at tiden og rummet er diskrete, 2) to paradokser, der har som antagelse at tiden og rummet er uendeligt delelige, dvs. kontinuerte. Det mest kendte paradoks, Achilleus og skildpadden, der hører til den anden kategori, handler om paradokset i, at den rapfodede Achilleus ikke kan overhale skildpadden i et væddeløb, hvor skildpadden har fået et forspring. Achilleus kan ikke overhale skildpadden, da han først skal nå det sted, hvor skildpadden startede. På det tidspunkt er skildpadden nået lidt længere, så Achilleus må bruge tid til at nå skildpaddens nye position, og så er skildpadden igen nået lidt længere osv. Achilleus kan derved kun nå skildpadden ved at passere uendeligt mange steder/punkter på en endelig tid – og dermed opstår paradokset [Mejlbo, I, 1988].

Aristoteles gendriver paradokset ved at sige, at det ikke er noget problem at gennemløbe den uendelige række af punkter, det endelige vejstykke inddeles af, da tiden ligeledes kan deles uendeligt. Der findes derfor ligeså mange tidsrum, som der findes vejstykker [Bostock, 1996]. Udover denne forklaring, der bygger på tidens, vejlængdens og bevægelsens kontinuitet, gives der også en forklaring, der direkte afhænger af Aristoteles' uendelighedsteori. Her siger Aristoteles, at det uendelige antal af dele af en vejlængde eller et tidsrum kun eksisterer potentielt. Hvis de skulle aktualiseres ville det være en uendelig proces, som ikke kunne afsluttes, men de enkelte dele, der eksisterer potentielt aktualiseres ikke. Der sættes f.eks. ikke et mærke ved hver af de potentielt uendeligt mange vejlængder. Det, at man bevæger sig forbi et punkt på en strækning eller gennem et øjeblik, aktualiserer ikke dette punkt eller øjeblik [Bostock, 1996].

Atomisterne

I forbindelse med eleaterne og deres filosofiske spekulationer er det relevant at komme ind på atomisterne, som også beskæftigede sig med forståelsen af kontinuitet. Den mest centrale repræsentant for atomismen er Demokrit (ca. 460-380/70 f.Kr), der var elev af Leukippos. Med atomteorien søger Demokrit, at give en rationel redegørelse for den foranderlige verden og samtidig at tage hensyn til eleaternes argumenter mod forandring, bevægelse og flerhed. Det eneste virkelige er atomer og det tomme rum, hvor det tomme rum eksisterer, selv om det ikke er noget materielt. Atomerne er massive eller kompakte, hvorfor de ikke er delelige, da delelighed forudsætter porer eller andet tomrum. [Politikkens filosofi leksikon, 1998].

Demokrit beskæftigede sig også med matematik. Han tilskrives af Archimedes at have opdaget at voluminerne af en kegle og en pyramide er lig 1/3 af voluminerne af cylinderen og prismet med samme grundflade og højde, men beviserne skulle være gennemført af Eudoxos [Kline, III, 1972]. Demokrit skal også have fremsat følgende paradoks i forbindelse med spørgsmålet om det kontinuerte versus den atomare opbygning:

"*If the circular sections that can be made in a cone parallel to the base are congruent, how the cone differ from the cylinder; and if they grow smaller towards the vertex, is not then the curved surface, which should be smooth, scalariform?*", [Dijksterhuis, 1956, s. 320].

Derudover kan det formodes, at Demokrits bøger om geometri, der ikke er overleveret, har været betydelige forløbere for Euklids "*Elementer*" [Kline, III, 1972]. Desuden er der blandt moderne fortolkere flere (f.eks., [Aaboe, 1969]), der mener, at Demokrit kan have indført en atomistisk tilgang til geometrien, hvilket kan have været en forløber for Archimedes anvendelse af udelelige i udforskningen af matematikken, som beskrives senere i rapporten.

Sofisterne

Sofisterne, der var aktive fra den anden halvdel af det 5. århundrede f.Kr., havde deres virke i Athen. Det var den første skole placeret i Athen. De underviste i flere humanistiske discipliner, men også i geometri, astronomi og filosofi. Et af deres hovedformål var at anvende matematikken til at forstå universets love [Kline, III, 1972]. Mange af de matematiske resultater de kom frem til udsprang af deres forsøg på at løse følgende berømte konstruktionsopgaver: At kvadrere en cirkel, at fordoble en kube og at tredele en vinkel med lineal og passer [Kline, III, 1972].

Hippokrates (5. århundrede f.Kr.) er en af de matematikere, der er kendt for at have beskæftiget sig med disse konstruktionsproblemer. Han var godt nok ikke sofist, men formentlig pythagoræer. En af grundene til, at han nævnes, er, at han anses for at være den, der fik ideen til at arrangere sætninger, så nye sætninger kan bevises på grundlag af de forrige. Desuden regner man med, at det var ham, der fandt på det indirekte bevis, og han skrev et værk om geometri, der hed ”*Elementer*”, som ikke er bevaret [Kline, III, 1972]. Hippokrates skulle også have vist nogle af sætningerne i bog 12 i Euklids ”*Elementer*”, hvor Euklid anvender exhaustionsmetoden, men det antages, at Hippokrates anvendte et utilstrækkeligt induktionsbevis [Knorr, 1982].

En sofist, der har stor betydning i forbindelse med exhaustionsmetoden, er Antifon (5. århundrede f.Kr.). Det siges, at han kom med ideen om at tilnærme en cirkel med en polygon. Antifon skulle dog have begået den matematiske fejl at forestille sig, at polygonen bliver til cirklen efter et endeligt antal af fordoblinger af siderne [Kouremenos, 1997]. Denne ide tilskrives også Bryson (ca. 450 f.Kr.), der ydermere skulle have tilføjet en omskreven polygon [Kline, III, 1972].

Platons akademi

Efter Platons (427-347 f.Kr.) grundlæggelse af Akademiet (ca. 387 f.Kr.) blev sofisterne udkonkurreret. Akademiet bestod i nihundrede år, indtil det i 529 e.Kr. blev lukket af den kristne kejser Justinian. Akademiet var førende i matematik og filosofi i resten af den klassiske periode, og forblev førende i filosofi gennem den hellenistiske periode. Dem, der siges at have inspireret og undervist Platon, udover Sokrates, som ikke beskæftigede sig synderligt med matematik, er pythagoræerne Theodorus (født ca. 470 f.Kr.) og Archytas (428-347 f.Kr.). [Kline, III, 1972].

Platon var ikke selv matematiker, men han var meget begejstret for matematik, hvilket også bekræftes af det skilt, der siges at skulle have hængt over indgangen til Akademiet, hvor der skulle have stået: ”*Lad ingen komme under mit tag, som ikke er vidende om geometri.*”, [Mejlbo, 1988, s. 1.29]. Han brugte ofte matematiske eksempler, og det er heller ikke tilfældigt, at de regulære polygoner kaldes de platoniske legemer, idet Platon anvendte dem i sin kosmologi, der er gengivet i dialogen Timaios [Mejlbo, I, 1988]. Det er også værd at bemærke, at stort set alle de matematiske landvindinger i det 4. århundrede f.Kr., blev opnået af venner og elever af Platon.

Det står ikke klart, i hvor høj grad matematikken var en abstrakt disciplin før Platon, men det vides med sikkerhed, at Platon og hans efterfølgere betragtede matematikken sådan. I Platons idelære ligger der en forståelse af tal og geometri som værende immaterielle og adskilte fra fysiske objekter [Kline, III, 1972]. Platon lagde i henhold til idelæren stor vægt på den rene matematik. I ”*Republikken*” kritiserer han direkte tidens geometere for ikke at søge det rene geometriske studie, men i stedet at forsøge at virkeliggøre matematikken:

“*... they make talk about squaring and applying and all, as if they were engaged in practice… but surely the entire discipline is studied for the sake of knowledge… and knowledge of what always exists.*“, [Knorr 1986, s.4].

Filosoffernes søgen efter sandheder kan være en grund til, at der blev lagt så meget vægt på den deduktive form, da den til forskel fra induktion og generaliseringer, med større sikkerhed kan fastslå sandheder ud fra givne præmisser. Som Kline siger: ”*Mathematics in the classical Greek world was part of the body of truths philosophers sought and accordingly had to be deductive.*”, [Kline, 1972, s. 45].

Platon havde kontakt med Eudoxos, og han var Aristoteles’ lærer og senere kollega. Aristoteles opbyggede i høj grad sin filosofi som et modsvar til Platons idealistiske idelære.

Eudoxos

Eudoxos (408-355 f.Kr.) anses for at være den klassiske periodes største matematiker, og anses, når hele den antikke periode betragtes, kun for at være overgået af Archimedes [Kline, III, 1972]. Han skal have studeret hos Archytas, men grundlagde sin egne skole i Cyzicus i Lilleasien. Omkring år 368 f.Kr. tilsluttede han og hans elever sig Platon på hans Akademi, men han rejste selv tilbage til sin hjemstavn nogle år senere, hvor han døde omkring år 355 f.Kr.

De to store landvindinger, der tilskrives Eudoxos, er proportionslæren og exhaustionsmetoden. Mens der er tvivl om, i hvilken udstrækning matematikerne før Eudoxos havde en aksiomatisk-deduktiv opbygning af matematikken, er det helt sikkert, at det var tilfældet for Eudoxos [Kline, III, 1972]. Exhaustionsmetoden, som er et af omdrejningspunkterne i denne rapport, er kendt for dens elegante omgåelse af uendelighed. Omgåelsen af uendelighed, der er iboende i irrationale tal, kendetegner proportionslærens behandling af irrationale tal. Proportionslæren er desuden en nødvendig forudsætning for de beviser, der gennemføres under anvendelse af exhaustionsmetoden. Eudoxos’ matematiske landvindinger vil blive behandlet mere indgående i kapitel 4.

Aristoteles' Lyceum

Som nævnt var Aristoteles (384-322 f.Kr.) Platons elev og senere kollega, indtil han i 335 f.Kr. grundlagde sin egen skole, Lyceum. Hans filosofi er ofte i diametral modsætning til Platons, og i forbindelse med matematikken er hans vigtigste bidrag grundlæggelsen af logik som en videnskabelig disciplin. Hans filosofiske forfatterskab er meget omfattende, hvor det der er interessant i denne sammenhæng, er hans teori for det uendelige. Disse teoretiske overvejelser behandles mere indgående i det næste kapitel.

Kulminationen af og enden på den klassiske periode

Archimedes er som nævnt den sidste store matematiker, hvis matematik kan siges at tilhøre den klassiske periode, selvom han levede i den hellenistiske periode. Hans værker kan ses som kulminationen af perioden i forbindelse med anvendelsen af exhaustionsmetoden. Nogen af Archimedes' resultater vil blive behandlet i kapitel 5, som også omhandler hans mekaniske metode i værket "*Metoden*".

Archimedes' arbejde blev ikke videreudviklet af efterfølgerne, hvilket gælder både hans udvidelser af exhaustionsmetoden og hans udforskende mekaniske metode. Grunden til dette skal formentlig findes i, at grækerne efter Archimedes koncentrerede sig om andre matematiske problemstillinger. Forskningen var i stedet fokuseret på andre områder, f.eks. trigonometri og numeriske metoder. I den hellenistiske periode foregår der en opsamling af værker fra den klassiske periode, og således kan efterfølgerne tilskrives, bevaringen af mange værker fra den klassiske periode. [Knorr, VI, 1986].

Konklusion

På trods det store arbejde med genskrivning og bearbejdning af værkerne fra den klassiske periode, der foregår i den hellenistiske periode, er der stadig et meget begrænset kildemateriale fra den klassiske periode. Der er derfor en del usikkerheder om af hvem og hvornår, hvilke dele af matematikken fra den klassiske periode blev grundlagt. Der er ligeledes usikkerhed omkring, hvordan den begrebsmæssige udvikling er foregået. Der er derfor mange moderne fortolkere, der har beskæftiget sig med at forsøge at rekonstruere udviklingen af forskellige matematiske metoder f.eks. udviklingen af exhaustionsmetoden, som behandles senere i rapporten. Der er også mange, der har beskæftiget sig med samspillet mellem matematik og filosofi, og disse discipliner kan være svære at differentiere i denne periode. Der ses på overfladen en vekselvirkning mellem den filosofiske og den matematiske udvikling, som ofte har ledt til den fortolkning, at filosofien skabte en krise, der udfordrede matematikerne til at komme med en løsning. Det eventuelle samspil mellem matematik og filosofi vil blive behandlet i det følgende.

Det er med de overleverede kilder ikke muligt at give entydige svar på, hvad der igangsatte hvad. Det, man med sikkerhed kan sige, er, at der eksisterede mange originale og konkurrerende fortolkninger af både matematiske og filosofiske problemstillinger i perioden, hvilket ofte kendetegner en produktiv periode.

Kapitel 3. Aristoteles

En af de helt store filosoffer fra oldtidens Grækenland er Aristoteles. Hans arbejde spænder utrolig bredt, og han er et godt eksempel på, at man i det gamle Grækenland ikke havde de samme faggrænser, som man har i dag. Aristoteles' værker omhandler stort set alle videnskaber på den tid. Han skriver om mekanik, fysik, matematik, logik, botanik, psykologi, zoologi, etik, historie, metafysik, økonomi og meget andet. Med hensyn til matematik er der ikke en enkelt bog dedikeret til emnet, men diskussionen foregår på mange forskellige steder i hans værker, og han bruger ofte matematikken til at illustrere forskellige pointer. Han bidrog ikke med matematiske resultater af betydning inden for geometrien, selvom han har fået tilskrevet nogle sætninger i Euklids "*Elementer*" [Kline, III, 1972], men han var velfunderet i datidens matematik.

Dette kapitel omhandler Aristoteles' diskussion af det uendelige. Han er den første, man kender til, der har gennemført en teoretisk og systematisk diskussion om dette emne [Bostock, 1996]. Den teori han opstiller behandler primært uendelighed i en fysisk og filosofisk forstand, men matematisk uendelighed bliver også berørt. Og det er Aristoteles' teoretiske overvejelser omkring uendelighed i matematikken, der er indgangsvinklen til denne behandling af Aristoteles. Den vigtigste del af Aristoteles' forståelse af det uendelige er, at han indfører en distinktion mellem det potentielt og det aktuelt uendelige, som stadig er vigtig i dag. Ifølge Aristoteles er det kun det potentielt uendelige, der eksisterer. F.eks. medgiver han, at de naturlige tal er *potentielt* uendelige – man kan altid opnå et tal, der er større end det foregående – men den *aktuelt* uendelige mængde af naturlige, eksisterer ikke.

Udover Aristoteles' diskussion om det uendelige, giver kapitlet også en meget kort indføring i hans forståelse af kontinuitet og kontinuumet, idet denne forståelse er et grundlag for hans opfattelse af det uendelige. Det uendelige behandles i bog III i hans værk "*Fysikken*", mens kontinuitet diskuteres i bog VI. Efter introduktionen til Aristoteles' forståelse af kontinuitet og uendelighed, diskuteres tre nutidige Aristoteles fortolkeres opfattelse af Aristoteles' matematiske uendelighed og det samspil, der var mellem matematik og filosofi på dette punkt.

Kort Biografi:

Aristoteles blev født i 384 f.Kr. i Stageira i Makedonien. Som 18-årig tog han til Athen for at blive uddannet på Platons Akademi. Han blev på Akademiet i 19 år, hvor han hurtigt blev lærer og forsker. Han var Platons elev og efterfølgende hans kollega. Han forlod først Akademiet, da Platon døde i 347 f.Kr., og i 335 f.Kr. grundlagde han sin egen rivaliserende skole i Athen, Lyceum. Desuden var han fra 343 – 340 f.Kr. Alexander den Stores lærer. Da Alexander den Store døde i 323 f.Kr. tvang politiske begivenheder Aristoteles til at forlade Athen. Han tog til Chalcis i Euboea. På det tidspunkt var han 61 år, og han døde kun et år derefter.

Man ved, at han publicerede flere værker i sin ungdom, men de er med undtagelse af nogle fragmenter ikke bevaret for eftertiden. Det betydelige forfatterskab (ca. 2500 sider), der er overleveret, blev ikke publiceret af ham selv. Det er 'forelæsninger', som han brugte i sin undervisning. Hvor meget, der er ændret af de senere udgivere, og i hvilken rækkefølge de er forfattet, vides ikke med sikkerhed. Debatten om, hvad der kan tilskrives Aristoteles samt kronologien i teksterne, vil ikke blive forfulgt yderligere i denne forbindelse. Det er udelukkende nævnt for at tydeliggøre, at enhver rekonstruktion af noget, der foregik for mere end 2000 år siden, naturligvis skal tages med visse forbehold. Ikke nok med at kilderne er usikre, der er heller ikke noget tilbage af den mundtlige tradition, der har været samtidig med den skriftlige, som måske ville kunne afklare visse usikre fortolkninger.

"Fysikken":

I denne sammenhæng er det specielt "*Fysikken*", der er interessant, da den, som sagt, behandler begreber som uendelighed og kontinuitet. Den version af "*Fysikken*" [Waterfield, 1996], der anvendes her, er Robin Waterfields engelske oversættelse med forord og noter af David Bostock. Alt Aristoteles' arbejde er meget originalt, og dette gælder også "*Fysikken*". Han skylder naturligvis visse dele til sine forgængere, men det er rimeligt at sige, at der ikke har været nogen før ham, der har forsøgt en så grundig og systematisk behandling af centrale emner for fysik som uendelighed, kontinuitet, sted, tid og bevægelse, som han gør det i "*Fysikken*" [Bostock, 1996].

I forbindelse med læsningen af "*Fysikken*" er det vigtigt at vide, at universet ifølge Aristoteles er endeligt, hvilket har indflydelse på hans forståelse af uendelighed. Desuden indeholder hans kosmologi en forudsætning om 'naturligt sted' og 'naturlig forandring (change)' mod det naturlige sted, og dette anvendes ofte i hans diskussioner. Der ligger derved nogle antagelser om verden, som ikke udfordres, og som har betydning for de konklusioner, der drages.

Kontinuitet

Inden behandlingen af Aristoteles uendelighedsteori, er det relevant at give en meget kort beskrivelse af Aristoteles' opfattelse af kontinuitet, selvom kronologien i "*Fysikken*" er, at diskussionen af kontinuitet kommer senere end uendelighedsteorien. Grunden til, at Aristoteles' opfattelse af kontinuitet er relevant, er, at det netop ifølge Aristoteles er pga. størrelsers kontinuitet, at de er delelige *ad infinitum*. Og dette er netop groft sagt den form for uendelighed, Aristoteles tillader i matematikken. Mens diskussionen af uendelighed findes i bog III, gives der i bog VI en grundig behandling af kontinuumet og kontinuitet. De mellemliggende bøger (bog IV og bog V) er dedikeret til hhv. sted og forandring.

Ser man bog VI som et hele, argumenterer Aristoteles for kontinuitet og mod atomismen [Bostock, 1996]. Atomismen blev introduceret mindst to generationer før Aristoteles af Leukippos og Demokrit. Hvor atomisterne argumenterer for udelelige enheder (atomer), argumenterer Aristoteles for, at den grundlæggende egenskab ved kontinuumet er, at alt kontinuert er uendeligt deleligt – der findes ikke en mindste enhed.

Det, der er kontinuert, er det, der vitterligt hænger sammen, hvilket dybest set betyder, at det (teoretisk set) ikke har nogen mindste dele. Til det kontinuerte hører geometriske størrelser, tid, bevægelse og forandring. Desuden defineres det kontinuerte af Aristoteles som det, hvis grænse er den samme, hvilket medfører, at kontinuumet ikke kan bestå af udelelige enheder. (Dette er en vigtig pointe, idet atomisterne f.eks. så bevægelse som bestående af små hop.) Dette eksemplificeres bl.a. med en linje:

”*For instance, a line, which is continuous, cannot consist of points, which are indivisible, first because in the case of points there are no limits to form a unity (since nothing indivisible has a limit which is distinct from any other part of it), and second because in their case there are no limits to be together (since anything which lacks parts lacks limits too, because a limit is distinct from that of which it is a limit).*” [Phys., 231^a21].

Denne forståelse af kontinuitet betyder, at en linje ikke kan betragtes som en perlerække af punkter. I Aristoteles’ forståelse er der altid et linjestykke mellem to punkter, svarer godt til vores moderne forståelse af kontinuitet.

Aristoteles argumenterer for, at et kontinuum ikke kan bestå af udelelige. Der listes to hypotetiske muligheder for et kontinuum: 1) Det kan være deleligt i udelelige (atomisternes hypotese) eller 2) det kan være uendeligt deleligt. Og Aristoteles argumenterer for den sidste mulighed:

”*…anything divisible into parts that are infinitely divisible is a continuum. It is also clear that every continuum is divisible into infinitely divisible parts. For if a continuum were divisible into indivisible parts, that would be a case of indivisible things being in contact, because the limits of continuous things form a unity and are in contact.*” [Phys., 231^b10].

Beskrivelsen af kontinuumet i overstående citat, svarer næsten til vores moderne opfattelse. Citatet siger nemlig, at ethvert kontinuum er uendeligt deleligt, hvilket i moderne termer kunne svare til, at ethvert interval på den reelle akse indeholder uendeligt mange tal.

Aristoteles' forståelse af et kontinuum er formentlig både et modsvar til atomisternes teori, hvilket fremgår af, at Aristoteles anvender deres forståelse som modhypotese, og desuden en del af løsningen af Zenons paradokser, som netop afvæbnes i denne bog i "*Fysikken*". I forbindelse med Zenons paradokser har Aristoteles brug for, at det kontinuerte, om det er en vejlængde eller et tidsrum, skal kunne deles uendeligt mange gange, jævnfør kapitel 2. To fluer med et smæk.

Beskrivelse af Aristoteles' uendelighedsteori

Det er i bog III i "*Fysikken*", at man finder Aristoteles' teoretiske overvejelser om uendelighed. Bogen består af to dele: 1) En del med overskriften forandring (change), og 2) en del om uendelighed. I Robin Waterfields oversættelse er de to hoveddele yderligere inddelt i 8 kapitler: Kapitel 1-3, som er en slags introduktion til bog III, IV, V og VI, omhandler forandring, mens der i kapitel 4-8 gives en beskrivelse af uendelighed.

Introduktionen, kapitel 1-3 i bog III

I bog II er forandring blevet introduceret som et grundlæggende princip for naturen, og i introduktionen definerer Aristoteles forandring. Men først beskrives det program, der skal følges omkring uendelighed. I den forbindelse angiver han grunden til, at uendelighed er et relevant begreb at diskutere:

"*The process of change appears to be continuous, and continuity seems to be the primary context of infinity. That is why in defining continuity one is almost bound to rely on the notion of infinity: it is because the continuous is what is infinitely divisible.*" [Phys., 200^b16].

Herefter følger en definition af forandring. Meget groft sagt, er den forandring Aristoteles' definerer, noget der hører til alle de kategorier, der kan knyttes til det værende. Når noget forandrer sig, gør det det med hensyn til substans eller kvantitet eller kvalitet eller sted. Hvis det drejer sig om farveskift, kan det være fra lys til mørk eller omvendt, og i begge retninger er arten af forandring i sit væsen af samme slags. Noget kan være potentielt eller aktuelt, og forandring er aktualiteten af det, der eksisterer potentielt. Betydningen af dette er, at alle potentialer kan aktualiseres, hvilket sjovt nok netop *ikke* gælder for det uendelige.

Uendelighed, kapitel 4-8 i bog III

I kapitel 4, som er starten på anden del af bog III, begynder diskussionen af uendelighed. I dette kapitel opsummerer Aristoteles nogle af sine forgængeres synspunkter, hvor han bruger deres interesse til at retfærdiggøre, hvorfor uendelighed er et vigtigt begreb at beskæftige sig med. Med hans egne ord:

> ”*A sign that the consideration of infinity is relevant to scientific knowledge of nature is the fact that all those who seem to have made a significant contribution to this branch of philosophy have had something to say about infinity. In fact they all make it a principle of things.*” [Phys., 202^b36].

Man kan sige, at han bruger forgængernes synspunkter til at skærpe sine egne, idet han afviser deres teorier en efter en. De, der står for skud, er Pythagoras, Platon, Anaxagoras og Demokrit, og det primære argument, imod deres ret forskellige opfattelser, er, at uendelighed ikke har nogen substans, hvilket de nævnte på forskellige måder mener, at uendelighed har, i hvert tilfælde ifølge Aristoteles. Dette leder til Aristoteles' første påstand om det uendelige, nemlig at uendelighed ikke kan opfattes som substans. Hvis uendelighed overhovedet eksisterer, kan det kun være en attribut til noget andet.

I kapitel 5, hvor Aristoteles angiver sit synspunkt om, at det uendelige må være en attribut til et eller andet, drejer diskussionen sig primært om, hvorfor der ifølge Aristoteles ikke kan eksistere et uendeligt legeme eller en uendelig substans. Dette er også en vigtig del af Aristoteles' teori om universet, idet han, som tidligere nævnt, fastholder, at universet som et hele er endeligt, og derfor må ethvert legeme i universet naturligvis også være endeligt. Diskussionen omkring, hvorvidt noget med substans kan være uendeligt, er ikke så interessant i denne sammenhæng, hvor det er uendelighed i matematikken, der er det primære fokus. Men det skal nævnes, at det specielt er på dette punkt, at Aristoteles er uenig med sine forgængere. Han mener nemlig, at en konsekvens af deres opfattelser er, at der må eksistere uendelige legemer eller i det mindste noget af substans, der er uendeligt. Dette synspunkt, som Aristoteles forkaster, må antages at være mere centralt for ham end uendelighed i matematikken, idet matematikken i Aristoteles' værker generelt anvendes til at skærpe argumentationen. Men det er ikke matematisk forskning, der er hans virkefelt.

Det er i kapitel 6, at diskussionen omkring det uendelige bliver rigtig interessant i en matematisk sammenhæng. Her lægger Aristoteles ud med at sige, at uendelighed må eksistere i en eller anden forstand, da der ellers vil være urimelige konsekvenser. Hvis der ikke findes nogen form for uendelighed, vil en urimelig konsekvens f.eks. være, at der vil være en begyndelse og slutning af tiden. Han konkluderer derfor, at der vil være en forstand, i hvilken der er uendelighed, og en i hvilken der ikke er uendelighed. Det drejer sig altså om, i hvilken forstand uendelighed 'er'. Og nu kommer så indførelsen af det potentielt uendelige:

”*Now, ’to be’ means either ’to be potentially’ or ’to be actually’, and a thing may be infinite either by addition or by division. I have argued that no actual magnitude can be infinite, but it can still be infinite divisible (it is not hard to disprove the idea that there are indivisible lines), and so we are left with things being infinite potentially.*” [Phys., 206^{a}14].

Lige inden dette citat medgiver han, at 1) tiden er uendelig, 2) talrækken er uendelig og 3) størrelser er uendeligt delelige [Phys., 206^{a}9]. Men det skal forstås i en potentiel forstand. Det uendelige kan *ikke* aktualiseres. I forbindelse med størrelser er det, fordi det ville kræve aktualiseringen af den uendelige deling. I alle andre tilfælde skyldes det, at det uendelige er en ’tidsafhængig’ proces, hvor processen kan siges at være i gang, men den aktualiseres ikke i sin helhed. Som distinktion mellem det aktuelt og det potentielt uendelige i forbindelse med en tidsafhængig proces giver han et eksempel om de olympiske lege:

”*The distinction between potential and actual applies to them too: the Olympic Games ’are’ both in the sense that there is the potential for the contest to take place and in the sense that it is taking place.*” [Phys., 206^{a}21].

At de olympiske lege finder sted, er en aktualisering, men aktualiseringen foregår over tid, hvorved delene ’forsvinder’ i samme øjeblik, som de opstår. Det er netop denne form for tidsafhængig proces, som Aristoteles accepterer også kan være i uendelig forstand, hvilket beskrives således:

”*Generally speaking, the infinite exists by one thing being taken after another. What is taken is always finite on its own, but always succeeded by another part which is different from it. But whereas in the case of magnitudes each part persists, in the case of time and the human race the parts cease to be, but in such a way that the process does not fail.*” [Phys., 206^{a}21]

Der er, som citatet viser, en forskel på den uendelige tid eller den menneskelige race (som Aristoteles også mener, er uendelig) og på den uendelige deling af størrelser. I forbindelse med den græske matematik er det den uendelige deling, der er interessant, da matematikken på den tid ikke behandlede tidsafhængighed. Ligesom den uendelige deling af størrelser tillades af Aristoteles, accepterer han også uendelig addition men i en helt bestemt forstand. Den slags uendelighed, der afhænger af addition, er den samme slags som den, der afhænger af division:

”*Any finite magnitude can include infinity by addition as an inverse process, in the sense that to see division **ad infinitum** going on within it is at the same time to see addition up to a determinate limit going on within it. For if, in a finite magnitude, you* *take a determinate amount and add to it not by taking the same fraction of the whole, but the same proportion of what remains, you will never traverse the finite magnitude.*" [Phys., 206^b3].

Der er altså en sammenhæng mellem division *ad infinitum* og addition, idet hvis den uendelige deling af en endelig størrelse kunne aktualiseres, da ville antallet af dele, der kunne summeres være uendelig. Flere Aristoteles fortolkere refererer til dette som invers addition (se f.eks. [Hintikka, 1973] og [Kouremenos, 1995]). Hvor den første del af citatet fastslår sammenhængen mellem division og addition, siger den næste del, at en størrelse aldrig kan udtømmes med en anden størrelse ligegyldigt, hvor lille den er. Denne formulering ser ud til at være taget direkte fra exhaustionsmetoden, som netop blev udviklet på Aristoteles' tid. Som i exhaustionsmetoden ligger der i citatet en sproglig formulering af, at en kvotientrække ($a + ar + ar^2 + \dots ar^n + \dots$) med $r < 1$ har en endelig grænseværdi. Det er bare ikke muligt, ifølge Aristoteles' opfattelse af det uendelige (og i anvendelsen af exhaustionsmetoden), at aktualisere den uendelige sum eller at nå grænseværdien. Ydermere kan man konkludere, at der inden for Aristoteles' uendelighedsteori ikke kan eksistere uendeligt små dele som de infinitesimaler, der i 1600-tallet bliver indført i analysen. Desuden tillader den heller ikke den udelelighed Archimedes opererer med i "*Metoden*".

Efterfølgende går Aristoteles så vidt som til at sige, at addition forstået som noget, der er ubegrænset, ikke eksisterer, ikke engang potentielt. Uendelighed i forbindelse med addition kan kun eksistere som den inverse addition (den opsummeren der ville høre til udtømningen af en størrelse ved uendelig deling), og dette er kun i potentiel forstand. Lige netop denne udtalelse har givet anledning til megen debat, idet den, hvis den kan tages ud af sammenhængen, umuliggør ubegrænsethed i matematikken, hvilket f.eks. ville udelukke den ubegrænsede fortsættelse af et linjestykke, som er en grundlæggende antagelse i den Euklidiske geometri (dette ses f.eks. i postulat 5 i "*Elementerne*", parallelpostulatet).

Derudover er det i forbindelse med uendelig deling nødvendigt at gøre sig klart, at der er stor forskel på eller en klar distinktion mellem geometriske størrelser og tal. Geometriske størrelser er noget substantielt, mens tal er de positive heltal, hvorved tal *ikke* kan deles i det uendelige. Det, der kan deles i uendelighed, er geometriske størrelser, og det er fordi, de er kontinuerte, hvorved de ifølge Aristoteles ikke består af udelelige dele. Dette er, hvad følgende tekststykke illustrerer:

"*…the number one is indivisible, whatever it is that is one – a person, for instance, is one person and not a number of people – and any given number is a plurality of ones, a particular quantity of them. … it is always possible to take more* *than any specified number. However, this number does not exist apart from the process of halving.*” [Phys., 207^b1].

Aristoteles siger, at det altid er muligt at forestille sig et større tal, fordi en geometrisk størrelse kan halveres uendeligt mange gange. Det ses herved, at tal ikke kan eksistere i sig selv. Tal knyttes til antallet af faktisk eksisterende elementer i en mængde, hvor disse elementer kunne være de dele en halvering ville give. Derfor er talrækkens uendelige fortsættelse ikke, som man umiddelbart ville tro, en konsekvens af, at man kan forestille sig, at man kan blive ved med at tælle. Talrækkens uendelige fortsættelse hører derimod til størrelsens uendelige deling, som skyldes dens kontinuitet. Det kan derfor være svært i denne forståelse af tal at se fødslen af aktuelt uendelige rækker med et tilhørende grænseværdibegreb, hvilket er en naturlig del af den moderne analyse.

I slutningen af kapitel 7 kommer Aristoteles' berømte citat, hvor hans uendelighedsteori direkte bliver henvendt til matematikerne:

”*I have argued that there is no such thing as an actual infinite which is untraversable, but this position does not rob mathematicians of their study. Even as things are, they do not need the infinite, because they make no use of it. All they need is a finite line of any desired length. But any magnitude whatever can be divided in the same ratio as you would divide an enormous magnitude, and so, for the purpose of their proofs, it makes no difference whether the magnitude proposed is one of those which actually exists.*” [Phys., 207^b27].

Det virker igen som om, det direkte er exhaustionsmetoden, han refererer til. Til at bevise sætninger, hvor f.eks. et areal udtømmes, er det ikke nødvendigt at antage noget som helst andet, end at alle størrelser, ved fortsat at fjerne mere end halvdelen, kan gøres vilkårligt små. Og dette er tilladt inden for Aristoteles' beskrivelse af det uendelige, da alle størrelser kan deles *ad infinitum*. Til gengæld virker det igen ikke umiddelbart som om, Aristoteles accepterer, at en linje kan fortsættes ubegrænset, hvilket anvendes af Euklid, eller det virker i hvert tilfælde ikke som om, han behandler spørgsmålet om den ubegrænsede fortsættelse af den matematiske linje. Det ser faktisk nærmere ud som om det er uendelighed i fysisk forstand, Aristoteles henviser til, når han skriver –”*…There is no such **thing** as an actual infinite…*”. Dette betyder ikke nødvendigvis, at den matematiske linje ikke potentielt kan fortsættes ubegrænset, men det er ikke et spørgsmål Aristoteles rigtig forholder sig til i denne forbindelse. Det skal her påpeges, at netop ovenstående citat har fået utrolig stor opmærksomhed. Dette kan ikke undre, specielt ikke når diskussionen handler om samspillet mellem matematik og filosofi. Dette vil blive berørt nærmere under diskussionen om moderne fortolkninger af Aristoteles' uendelighedsteori.

Det sidste korte kapitel i bog III, kapitel 8, giver meget kontante svar på, hvorfor der ikke kan eksistere en aktuel uendelighed i den forstand, som mange ville finde det naturligt at påstå, f.eks. det at man kan blive ved med at tælle. Han foregriber de modargumenter, han kan forestille sig, vil komme, og disse er en slags opsummering af alle de argumenter, han er kommet med i det foregående. Bogen og dermed diskussionen sluttes med følgende citat, der sætter et helt klart punktum i den sag:

> ”*This is all I have to say about the senses in which there is and is not such a thing as infinity, and about what infinity is.*” [Phys., 208^{a}22].

Konklusioner om Aristoteles' uendelighedsteori i "Fysikken"

Der er ifølge Aristoteles en sammenhæng mellem det uendelige og det kontinuerte. Det uendelige eksisterer kun i potentiel forstand, og i potentiel forstand er der to former for uendelighed. Den ene er uendelighed som en tidsafhængig proces, hvor det mest umiddelbare eksempel er tiden, der ifølge Aristoteles hverken har en begyndelse eller en slutning, hvorfor tiden potentielt er uendelig. Den potentielle uendelighed, der knytter sig til tiden, findes også i endelige tidsrum, da tiden er kontinuert, og den kan derfor potentielt opdeles i det uendelige. Der er, sagt på en anden måde, altid et tidsrum mellem to øjeblikke.

Inden for matematikken beskæftiger Aristoteles sig primært med det geometriske kontinuum og den tilhørende form for uendelighed. Men der er en helt klar analogi mellem den tidsafhængige uendelighed og den matematiske. Ser man på det mest simple eksempel på et geometrisk kontinuum, en linje, vil man kunne dele linjen med punkter, men der vil altid være et linjestykke mellem to punkter, ligesom der altid er et tidsrum mellem to øjeblikke. Da den geometriske linje er kontinuert, består den derfor ikke af udelelige punkter, men har netop den egenskab, at den er uendeligt delelig. Det er også i den forstand, at Aristoteles opfatter de naturlige tals potentielle uendelighed. Da et linjestykke potentielt kan deles uendeligt, kan de tilhørende tal, antallet af dele, ligeledes potentielt forsættes uendeligt. At det kun er i denne forstand, Aristoteles accepterer den potentielt uendelige mængde af naturlige tal, skyldes datidens opfattelse af tal. Tal er de naturlige tal, og de eksisterer ikke i sig selv, de er altid antallet af elementer i en eksisterende mængde.

Til slut skal det understreges, at Aristoteles i bog III i ”*Fysikken*” udelukkende beskæftiger sig med det geometriske kontinuum i endelig forstand, hvilket har givet anledning til mange spekulationer. Den umiddelbare årsag ser ud til at være, at Aristoteles i bog III primært beskæftiger sig med uendelighed i matematikken i forbindelse med exhaustionsmetoden. Dette betyder, at han anerkender matematikernes behov for vilkårligt små geometriske størrelser, men der gives ikke grønt lys for vilkårligt store geometriske størrelser – ”*…neither substraction nor imagined increase* *make a magnitude infinite.*", [Phys. 208^a21]. Dette vil blive behandlet mere indgående i det næste afsnit.

Moderne fortolkninger af Aristoteles' uendelighedsteori

Denne diskussion af moderne fortolkninger af Aristoteles' uendelighedsteori forholder sig til tre forskere, der har beskæftiget indgående med forholdet mellem matematisk uendelighed i antikken og den filosofiske uendelighedsteori Aristoteles opstiller. Det drejer sig om Jaakko Hintikka, Wilbur Knorr og Theokritos Kouremenos. De repræsenterer alle væsentlige indgangsvinkler samt en udvikling i forståelsen af Aristoteles' uendelighedsteori.

Hintikkas artikel "*Aristotelian Infinity*" [Hintikka, 1973], som er fra 1973, giver en analyse, der munder ud i en konklusion om, at Aristoteles ikke forholder sig til den matematiske praksis i sin samtid, og at han formentlig heller ikke forstod matematikken til bunds. Denne konklusion må siges at være Knorrs udgangspunkt i artiklen "*Infinity and Continuity: The Interaction of Mathematics and Philosophy in Antiquity*" [Knorr, 1982] fra 1982, hvor hans primære konklusion er, at matematikken og filosofien udvikler sig parallelt, fuldstændig uden interaktion, og at matematikerne valgte rigtigt i deres ignorering af Aristoteles' nærmest forvrøvlede teori. Kouremenos bruger i sin bog "*Aristotle on Mathematical Infinity*" [Kouremenos, 1995] fra 1995 en del kræfter på at tilbagevise Knorrs konklusioner, der som udgangspunkt bygger på Hintikkas arbejde. En af hans primære konklusioner er, at Aristoteles' arbejde viser en helt klar forståelse af hans samtids matematik, hvis praksis ikke er i modsætning til hans filosofi. Kouremenos mener ligesom Knorr, at der er meget få tegn på en egentlig interaktion mellem matematik og filosofi omkring det uendelige, idet matematikerne ifølge Kouremenos ikke lader til at have bekymret sig synderligt om at undgå aktuel uendelighed i matematikken, hvorved Aristoteles' teori nærmere er i opposition til matematikerne. Han mener samtidig, at Aristoteles' meget fundamentale overvejelser kunne have bidraget til en mere stringent opbygning af Euklids "*Elementer*" på de få steder, hvor det uendelige optræder.

Det springende punkt, omkring Aristoteles' uendelighedsteori og den matematiske praksis på den tid, som behandles indgående af Hintikka, ligger i Aristoteles' manglende accept af det aktuelt uendelige, som på flere punkter optræder i den helt basale matematik i Euklids "*Elementer*". Her er det bl.a. behovet for en ubegrænset linje i forbindelse med parallelpostulatet[2] og den uendelige mængde af primtal[3], der umiddelbart leder til en anvendelse af aktuel uendelighed i Euklids arbejde. Det er disse to eksempler, Hintikka benytter til at konkludere, at Aristoteles ikke forholder sig til den matematiske praksis i sin uendelighedsteori, der, som det er vist i det foregående,

[2] I Eukilds "*Elementer*" bog I, postulat 5.
[3] I Euklids "*Elementer*" bog III, sætning 16.

udelukker både aktuelt uendelig store og små genstande, fysiske såvel som matematiske. Imod denne konklusion siger Kouremenos, at det sted Hintikka henviser til i "*Fysikken*" er grebet ud af sin sammenhæng, og at Aristoteles i værket "*Om himlene*" helt klart viser, at han accepterer den ubegrænsede matematiske linje, hvilket Hintikka faktisk også selv bemærker. Og desuden ville Euklids primtalsalgoritme ifølge Kouremenos kunne formuleres, så mængden af primtal var uendelig i potentiel forstand. Ifølge Kouremenos kan den græske matematik sagtens formuleres inden for rammerne af den potentielle uendelighed, som Aristoteles tillader. Dette er i denne sammenhæng en interessant pointe, da et af omdrejningspunkterne i dette arbejde er, hvorfor man i antikken undgår en eksplicit indførelse af matematisk uendelighed, og specielt det aktuelt uendelige.

Den primære årsag til, at Aristoteles' uendelighedsteori ofte er blevet sat i forbindelse med udviklingen af den græske matematik, skal ikke findes i, hvorvidt aktuel uendelighed på nogle få steder optræder implicit i "*Elementerne*". I stedet er det den stort set samtidige formulering af både Aristoteles' uendelighedsteori og Eudoxos' exhaustionsmetode, hvor aktuel uendelighed helt klart undgås i både filosofi og matematik, der har vakt interessen for dette samspil. Det har været oplagt, at undersøge om der var en gensidig påvirkning. Som moderne matematiker føler man nemlig, at exhaustionsmetoden med det tilhørende dobbelt modstrids bevis gør det unødigt besværligt at finde arealer og voluminer. Knorr giver i sin artikel et bud på exhaustionsmetodens oprindelse, og dette tema er ligeledes centralt for Kouremenos. Hintikkas artikel omhandler ikke exhaustionsmetoden, men artiklen er medtaget i denne diskussion, fordi den så klart konkluderer, at Aristoteles ikke forholdt sig til den matematiske praksis, og derudover er den, som tidligere nævnt, et udgangspunkt for Knorrs analyse.

Hintikka:

I den fortolkning Hintikka giver af Aristoteles' uendelighedsteori, anvender han et 'principle of plentitude', som her oversættes som 'overflodsprincippet'. Det er et begreb en A. O. Lovejoy har indført i bogen "*The Great Chain of Being*" [Hintikka, 1973], dog i en mindre filosofisk sammenhæng. Princippet kan tentativt formuleres som: *Ethvert potentiale realiseres på et eller andet tidspunkt*. Princippet bliver kvalificeret yderligere, hvilket det ikke umiddelbart er nødvendigt at gå dybere ind i her, da det, der skal formidles, er de matematiske konsekvenser af Hintikkas fortolkning. I Lovejoys flygtige anvendelse af begrebet i forbindelse med antikken, kommer han frem til, at Platons filosofi indeholder et 'overflodsprincip', mens dette ikke gør sig gældende for Aristoteles'. Hintikka arbejder ud fra den modsatte hypotese, men behandler kun Aristoteles i dybden.

Ifølge Hintikkas hypotese accepterede Aristoteles noget, der svarer til 'overflodsprincippet'. Han accepterede princippet, at ingen virkelig mulighed (possibility) kan forblive uaktualiseret gennem en uendelighed af tid. Til undersøgelsen af denne hypotese kommer Aristoteles' uendelighedsteori under luppen, hvor Aristoteles, som illustreret i det foregående afsnit, tydeligvis accepterer det potentielt uendelige som en tidsafhængig proces.

Det, der er Hintikkas pointe i forhold til matematikken, er, at Aristoteles' univers er endeligt både i fysisk og matematisk forstand. Han diskuterer Aristoteles' teori i forhold til den matematiske praksis, hvor han lægger ud med at sige, at:

"*What we have found about Aristotle's theory of spatial magnitude shows that the problem of reconciling his theory of infinity with mathematical practice is a much more serious one than commentators have usually realized.*" [Hintikka, 1973, s.118].

Ifølge Hintikka siger Aristoteles, at geometrene ikke engang behøver arbitrært store potentielle forlængelser af f.eks. en linje. Han holder Aristoteles fast i den direkte henvisning til matematikerne, hvor vi i det foregående afsnit har set, at Aristoteles i bog III kun forholder sig til matematikernes behov for uendelighed i forbindelse med den inverse addition. Det centrale i Hintikkas analyse er, at matematikerne, ifølge hans version af Aristoteles' uendelighedsteori, kun har behov for vilkårligt små størrelser, hvilket er i modstrid med flere resultater og forudsætninger i Euklids "*Elementer*". Her er det berømte parallelpostulat et godt eksempel, da det er en essentiel forudsætning i den euklidiske geometri, og alternative formuleringer af parallelpostulatet leder til ikke-euklidiske geometrier. Det siger:

"*That, if a straight line falling on two straight lines make the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced* ***indefinitely****, meet on the side on which are the angles less than tow right angles.*" [Heath, 1, 1956, s. 155].

Parallelpostulatet er altså formuleret indirekte. Hvis summen af de indre vinkler på samme side er mindre end to rette vinkler, så vil de rette linjer mødes på den side, hvor vinkelsummen er mindre end to rette vinkler, hvis de fortsættes *ubegrænset* – hvorved de ikke er parallelle. Der er derved et grundlæggende behov for den ubegrænsede fortsættelse af en ret linje.

Det, Hintikka går meget op i, er, hvorvidt Aristoteles' uendelighedsteori er en benægtelse af ubegrænsethed i det hele taget. Det mener Hintikka er tilfældet, hvilket leder frem til en konklusion om, at Aristoteles enten ikke har forstået den matematiske praksis, eller at Euklids femte postulat (parallelpostulatet), som kræver en ubegrænset linje, er kommet til efter Aristoteles' tid, hvorved Aristoteles ikke har set behovet for ubegrænsede matematiske størrelser.

Knorr

Knorr lægger i sin artikel om samspillet mellem matematikken og filosofien i antikken ud med at opridse den vekselvirkning, man på overfladen kan se omkring begreber som uendelighed og kontinuitet fra Eleaterne i den 5. århundrede f.Kr. til Euklid og Archimedes i den 3. århundrede f.Kr. I det 4. århundrede skærpes Eleaternes filosofiske overvejelser af Platon og Aristoteles, hvilket i matematikken understøttes af Eudoxos' udvikling af proportionslæren og exhaustionsmetoden, som igen anvendes og forbedres af Euklid og Archimedes i det 3. århundrede f.Kr. Dette billede har ofte ledt til, at man i matematikkens og filosofiens historie har givet den fortolkning, at den filosofiske debat har genereret en 'krise', som har afkrævet matematikerne en løsning. Og det er denne fortolkning Knorr *modsætter* sig. Han siger:

"*I am convinced that the mathematical studies were autonomous, almost completely so, while the philosophical debates, developing within their own tradition, frequently drew support and clarification from mathematical work.*" [Knorr, 1982, s. 112].

Det første, Knorr behandler, er de matematiske aspekter af Zenons paradokser. Her søger han at vise, at Aristoteles, hvis løsning ifølge Knorr til dels bygger på en matematisk argumentation, primært forholder sig filosofisk til Zenons paradokser. Og ydermere er Aristoteles' greb om matematikken ifølge Knorr meget mangelfuldt. Dette anvendes til at underbygge argumentet om, at filosofferne arbejder inden for deres egen tradition, men at de trak på matematikernes arbejde til at skærpe deres argumenter. Et spændende argument i denne sammenhæng kommer i følgende udtalelse fra Knorr:

"*It is hard to believe that a geometer could have been the ultimate source of Aristotle's treatment here; for a geometer would certainly understand that an infinite whole might have an infinite part.*" [Knorr, 1982, s. 119].

Dette argument må siges at være i modsætning til Knorrs endelige konklusioner omkring de matematiske aspekter af Zenons paradokser. Han ender op med at sige, at selvom Euklid i X.1 (exhaustionsbeviset) lægger sig tæt op ad Aristoteles' argumenter om bevægelsers uendelighed fra bog VI i "*Fysikken*", er det forskellene i deres tilgange, der er mest slående. Knorr siger:

"*In contrast with Aristotle's intent to explicate the nature of the infinite and his uninhibited use of the term 'infinite' (apeiron) throughout these discussions, Euclid uses neither the term nor the concept of the infinite anywhere in this proof. Indeed, save for the context of parallel lines, 'infinite' has been eliminated from the geometers' vocabulary altogether*" [Knorr, 1982, s. 121].

Det betyder, at Knorr på den ene side siger, at geometerene havde en klar forståelse af, at et uendeligt hele kan have uendelige dele, og derved en forståelse af matematisk uendelighed, mens han på den anden side siger, at de eliminerer det uendelige fra matematikken, undtaget parallelpostulatet. Det virker med Knorrs vægt på antikke matematikeres stringens mærkeligt, at de skulle have valgt at se bort fra spørgsmålet om uendelighed, hvis de havde så klar en forståelse af begrebet, som han påstår, de har. Da ville det virke oplagt at definere, hvilken form for uendelighed, der kan tillades i matematikken. Desuden kan man med rimelighed hævde, at netop Aristoteles havde en forståelse af, at et uendeligt hele kan have uendelige dele jævnfør hans beskrivelse af kontinuumet. Her siger han f.eks., at ethvert kontinuum er deleligt *ad infinitum*, og da enhver størrelse er et kontinuum, hvilket også betyder en del af en størrelse, må man sige, at Aristoteles har indset, at et uendeligt hele kan have uendelige dele.

For at vise, at den filosofiske debat omkring Zenons paradokser ikke havde nogen indflydelse på udviklingen af exhaustionsmetoden, ender han faktisk med at stille spørgsmålet:

> ”*For how can one explain the geometers' abandonment of the infinite per se, when Aristotle himself neither advises nor follows this course?*” [Knorr, 1982, s. 121].

Til besvarelse af dette spørgsmål siger Knorr, at Aristoteles, konfronteret med en bevægelse blandt geometerene om at opgive dette begreb (det skal indskydes, at en sådan bevægelse ikke kan dokumenteres), nærmere forsøgte at bevare uendelighedsbegrebet med sine diskussioner i ”*Fysikken*”. Den traditionelle fortolkning er, at Aristoteles med sine teoretiske overvejelser for alvor skubber muligheden for at anvende aktuel uendelighed ud af matematikernes værktøjskasser. Til at underbygge sit argument siger Knorr, at det er ironisk, at Aristoteles i sin teori benægter en specifik slags uendelighed, nemlig det aktuelt uendelige, da denne form for uendelighed faktisk ikke kan undværes i geometrien. Her læner Knorr sig op ad Hintikkas artikel, hvor Hintikka, som beskrevet ovenfor, argumenterer for at Aristoteles ikke har forstået den matematiske praksis, hvor det aktuelt uendelige er en vigtig del. Matematikerne kan ifølge Hintikka ikke undvære det aktuelt uendelige, da det f.eks. er muligt at konstruere ikke-euklidiske systemer ved at benægte den ubegrænsede forlængelse af linjer (f.eks. sfærisk geometri, hvor rette linjer er storcirkler på en kugleoverflade). Og den ubegrænsede fortsættelse (*eis apeiron*) af linjer er den eneste direkte form for uendelighed (Hintikka kommer i modsætning til Knorr også ind på den uendelige mængde af primtal), Euklid bevarer i ”*Elementerne*”(bog I, postulat 2 og 5). Det skal her nævnes, at hverken Knorr eller Hintikka forholder sig til, om det ville være tilstrækkeligt med den potentielle uendelighed i den euklidiske geometri.

Knorr runder af med på polemisk vis at sige, at:

”*If Euclid and his predecessors knew of this theory, they chose wisely to disregard it.*” [Knorr, 1982, s. 122].

Den næste del af Knorrs artikel er i lyset af diskussionen om, hvorfor exhaustionsmetoden ikke udspringer af den filosofiske debat, en rekonstruktion af exhaustionsmetodens oprindelse. Exhaustionsmetodens rødder har ifølge Knorr ikke noget at gøre med de filosofiske puslespil som f.eks. Zenons paradokser, som er en gængs fortolkning. Dette skyldes ifølge Knorr, at uendelige kvotientrækker var fuldt ud accepterede af Eudoxos. I Knorrs analyse kommer han frem til, at Euklids exhaustion er en videreudvikling af Eudoxos’, idet Euklid beviser exhaustionsmetoden (X.1). Knorr mener nemlig, at Eudoxos angav exhaustionsmetoden som et aksiom, hvorved den ikke behøvede bevis. Det primære argument for dette er Archimedes’ henvisning til, at tidligere geometere angav dette som et lemma, hvilket her tolkes som et aksiom eller en ikke bevist antagelse. Knorrs rekonstruktion af exhaustionsmetodens oprindelse vil blive behandlet mere indgående i det næste kapitel.

En spændende konsekvens af denne konklusion, hvor Eudoxos skulle have angivet exhaustionsmetoden uden bevis, er, at den godtgør, hvorfor studiet af uendelige rækker ikke fik nogen særlig opmærksomhed af antikkens geometere, selvom Zenons paradokser lægger kraftigt op til sådan et studie. Der findes nemlig kun et eksempel i antikkens matematiske værker, der angiver summen af en uendelig kvotientrække. Det findes i ”*Parablens kvadratur*”, som er fra det 3. århundrede f.Kr., hvor Archimedes i endelig form angiver det, der svarer til $1 + (1/4) + (1/4)^2 + (1/4)^3 + \ldots = 4/3$. Det er et noget omvendt argument, da det ville virke oplagt at beskæftige sig med uendelige rækker, hvis de var en fuldt ud accepteret del af matematikken på den tid. Det kunne f.eks. have ledt til lettere løsning af exhaustionsbeviserne, da dobbeltmodstridsbeviset kunne undgås ved en formulering af et grænseværdibegreb. Dette ville også være et stort skridt på vejen mod en mere generel teori.

Den sidste del af Knorrs artikel omhandler den heuristiske analyse med udelelige, som Archimedes anvender i ”*Om metoden*”. Igen er målet at vise, at filosofien ingen indflydelse har haft på udviklingen af matematikken, hvilket er en gængs fortolkning. Archimedes’ mekaniske metode, som behandles i kapitel 5, kunne nemlig godt have haft sit udspring i atomismen. Knorrs standpunkt er, at Archimedes’ udforskende mekaniske metoder eventuelt kunne være inspireret af Eudoxos, men ikke af den filosofiske diskurs. Hvis der skulle have været en påvirkning måtte det være gennem Demokrit, men dette afviser Knorr, idet det ikke virker som om Archimedes var særlig bekendt med Demokrits arbejde. Desuden mener Knorr også, at der er belæg for at afvise, at Demokrit på nogen måde havde overført atomismen til geometrien, hvilket andre forskere er kommet frem til. Dette beskrives mere indgående i kapitel 5.

Slutteligt bemærker Knorr, at Archimedes på ingen måder viser interesse for at forsvare et ontologisk standpunkt. Archimedes anvender, at der er en proportionalitet mellem snit af f.eks. plane figurer, hvorved vægtstangsprincippet giver, at samlingen (engelsk *aggregate*) af uendeligt mange snit leder til en balance mellem to figurer, som tillader bestemmelsen af deres areal. Han kunne f.eks. have stillet sig det spørgsmål, at hvis snittene har en vægt, hvordan kan aggregatet af uendeligt mange snit så undgå at have en uendelig vægt? Knorr konkluderer, at Archimedes' anvendelse af udelelige kommer fra en bekvem og oplagt simplificering af den stringente behandling, der udelukkende baserer sig på endelige størrelser. Dette understreges ifølge Knorr af, at det også er den udvikling, der foregår i 1600-tallets matematik med indførelsen af infinitesimalerne.

Knorr er altså med sit arbejde i stærk opposition til den almindelige antagelse, at grækerne havde en skræk for det uendelige. Med hans egne ord:

> ”*The familiar hypothesis of a 'horror of infinite' among the Greek geometers is a preposterous myth whose demise can only be welcome. To be sure, the salient feature of this proof is its meticulous avoidance of any direct use of the notion of the infinite; all assertions are made with reference exclusively to finite magnitudes. But this is a consequence of the geometers' ambition to satisfy stringent criteria of deductive form…. As recognized starting points (axioms) for proofs appeared not to extend directly to constructions resulting from an infinite process, an alternative indirect procedure was sought.*” [Knorr, 1982, s. 143].

Den matematiske undgåelse af det uendelige har altså ifølge Knorr intet at gøre med en påvirkning fra filosofien, f.eks. Aristoteles' benægtelse af det aktuelt uendelige, men stammer udelukkende fra de strenge krav de græske geometere stillede til stringente beviser. Dette virker som et underligt argument, da en ordentlig definition af matematisk uendelighed netop kunne have bidraget til en skærpelse af stringensen.

Kouremenos

I dette afsnit vil nogle af Kouremenos hovedargumenter blive trukket op. Det skal i den forbindelse nævnes, at det er svært at undgå en hvis overfladiskhed i forhold til det store arbejde, der præsenteres i Kouremenos' bog om Aristoteles' matematiske uendelighed. Der vil her primært blive lagt vægt på kapitel 5 med titlen ”*Actual Infinity and Greek mathematics*”. Her lægger Kouremenos ud med at understrege, at det ikke er Aristoteles' hensigt i ”*Fysikken*” bog III, hvor uendelighedsteorien introduceres, at udelukke arbitrært store potentielle forlængelser fra geometrien. Argumentet er, at diskussionen stammer fra, hvad Aristoteles ser som et problem i Platons forståelse af det uendelige, mens Aristoteles på andre steder i sine værker eksplicit anerkender den ubegrænsede forlængelse af f.eks. linjer og tal.

Som tidligere nævnt, har Hintikka også set, at Aristoteles i ”*Om Himlene*” faktisk tillader ubegrænsede forlængelser af rette linjer, men hvor Hintikka ser det som en uoverensstemmelse, ser Kouremenos det som et bevis på Aristoteles’ anerkendelse af matematikernes behov for *potentielt* ubegrænsede forlængelser. Kouremenos forsvarer Aristoteles’ umiddelbare afvisning af ubegrænsethed i bog III i ”*Fysikken*” med at godtgøre, at Aristoteles her udelukkende forholder sig til exhaustionsmetoden.

Udover at tilbagevise Hintikkas påstand om Aristoteles’ manglende accept af ubegrænsethed i matematikken lægger Kouremenos også ud med at pointere, at Aristoteles’ ærinde i ”*Fysikken*” er uendelighed i fysisk forstand, mens den matematiske uendelighed er en biting. Den matematiske uendelighed kommer ind i billedet, fordi den (ifølge Aristoteles) for Pythagoræerene og Platon ikke kan adskilles fra den fysiske.

Et af Kouremenos’ primære argumenter er, at Aristoteles’ manglende accept af det aktuelt uendelige i matematikken ikke bygger på ontologiske argumenter. F.eks. tilbageviser Aristoteles muligheden for eksistensen af et aktuelt uendeligt tal, og hans argumenter er udelukkende af matematisk karakter. Hans argumentation i ”*Fysikken*” er noget svag på dette punkt, men argumenterne skærpes i værket ”*Metafysikken*”. Her siger han, at der findes lige og ulige tal, dvs. hhv. tal af formen $2n$ og $2n + 1$, og et aktuelt uendeligt tal kan derfor ikke være hverken lige eller ulige, da det ville være i modstrid med den fundamentale aritmetik, som inkluderer lige og ulige som fundamentale egenskaber ved tal. Styrken i denne argumentation eksemplificeres med, at det først er med Cantors transfinitte aritmetik, at dette argument for alvor bliver slået af banen. Dette eksempel med Aristoteles’ manglende accept af et aktuelt uendeligt tal kan virke noget ude af kontekst her, men det er medtaget for at vise, at Kouremenos giver mange forskelligartede eksempler på, at Aristoteles har en glimrende forståelse for samtidens matematik. At Aristoteles ikke anvender ontologiske argumenter er helt centralt for Kouremenos’ tilbagevisning af både Hintikka og Knorr, der argumenterer for, at Aristoteles som filosof mangler en dybere forståelse for matematikkens forudsætninger. Specielt lister Knorr eksplicit filosoffernes manglende greb om matematikken som et hovedargument i sin hypotese om matematikernes fuldstændige uafhængighed af filosofferne.

Den næste del af det pågældende kapitel omhandler sætning I.12 i Euklids ”*Elementer*”, hvor en uendelig linje optræder eksplicit. I Heaths udgave lyder I.12 som følger:

> ”*To a given infinite straight line, from a given point which is not on it, to draw a perpendicular straight line.*”, [Heath, 1, 1959, s. 270].

Her drejer det sig for Kouremenos om at vise, at Aristoteles i ”*Om Himlene*”, hvor han argumenterer for universets endelighed, har opbygget sin argumentation, så den er en direkte kritik af I.12, hvilket viser, at han i høj grad forholder sig til matematikken. Det er i denne sammenhæng ikke nødvendigt at gå i dybden med argumentationen. Det er tilstrækkeligt, at give konklusionen som lyder:

”*Aristotle, therefore, could, and most probably did, object to actual infinity in mathematics not on ontological grounds or as a metaphysical article of faith but by questioning the coherence of the notion of an actually infinite multitude or magnitude within Greek mathematics.*”, [Kouremenos, 1995, s. 80].

Kouremenos mener, at Aristoteles ville have foretrukket, at der var blevet tilføjet et aksiom, der godtgør, hvordan størrelser og tal kan siges at være uendelige, til Euklids 10 grundlæggende aksiomer i ”*Elementerne*”. Dette ville have givet en formel indførelse af uendelighed, som ikke er defineret af Euklid, hvilket f.eks. giver formelle problemer i forbindelse med sætning I.12 og IX.20. Dog tilføjer Kouremenos, at det er et mindre problem, der ikke rører ved substansen i Euklids geometri, og derfor ville en påvirkning fra Aristoteles kun have betydet en mindre opstramning af den formelle opbygning af ”*Elementerne*”. Men Kouremenos’ analyse ligger langt fra Knorrs konklusion om, at geometerene, hvis de kendte til Aristoteles’ teori, gjorde klogt i at ignorere den.

Kouremenos støtter Knorrs påstand om, at de græske geometere, i hvert tilfælde Euklid, ikke bekymrede sig om det uendelige, og specielt at Euklid ikke skelner mellem potentiel og aktuel uendelighed, hvilket man ville forvente, hvis han var påvirket af Aristoteles’ arbejde. Desuden kan man sige, at Euklid accepterer det aktuelt uendelige, hvilket f.eks. ses ved, at han i IX.20 accepterer den aktuelt uendelige mængde af primtal. Sætning IX.20 siger:

”*Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers.*” [Heath, 2, 1956, s. 412].

Kouremenos bemærker, at selvom man er villig til at læse Euklids bevis af IX.20 som et induktionsbevis (det bevises ved dobbeltmodstrid), er introduktionen af aktuel uendelighed stadig ikke formelt underbygget. Som han siger:

”*Euclid lacks a characterization of infinity similar to Dedekind’s on which induction operates and, therefore, he would have been totally defenceless in front of Aristotle’s simple argument against an actually infinite number…the abrupt leap from abc + 1 to the completed infinity of prime numbers reveals Euclid’s casual attitude towards infinity: he does not seem aware of the difference between potential and actual* *infinity, a situation one would expect if he were influenced by Aristotle.*" [Kouremenos, 1995, s. 85].

Herefter fortsætter Kouremenos med at afvise Knorrs påstand om, at der fandtes en bevægelse blandt tidens geometere, der helt ville opgive uendelighedsbegrebet. Det ville være mærkeligt, hvis det var tilfældet, når der er mindst to steder i "*Elementerne*", hvor aktuel uendelighed optræder (III.16 og IX.20). Derimod bifalder han Knorrs hypotese om, at der ikke var nogen påvirkning fra filosofferne på den matematiske udvikling, men her er Kouremenos' argument noget tamt. Han dækker sig ind med at sige, at udviklingen af matematik generelt følger sin egen interne dialektik, f.eks. udviklede Cantor sin teori om transfinitte tal som et respons på et bestemt matematisk problem, hvorefter han stivede det af med en filosofisk retfærdiggørelse af aktuel uendelighed. Det er lidt ærgerligt, at Kouremenos ikke diskuterer, om der i antikken kunne have været en anden interaktion mellem matematik og filosofi end på Cantors tid. Man behøver nemlig ikke at lede længe for at finde personer i antikken, der beskæftigede sig indgående med både matematik og filosofi. Bare for at nævne et eksempel anses Demokrit, både som en af ophavsmændene til atomismen, og som fader til sætningen om, at en kegle er en tredjedel af en cylinder med samme grundflade og højde (sætning XII.10 i "*Elementerne*"), som dog skulle være fremsat uden bevis. Det virker derfor som en meget anakronistisk og let købt forklaring, Kouremenos giver, i dette tilfælde. Dette er lidt underligt, da Kouremenos på flere steder anklager andre forskere for at være anakronistiske i deres fortolkninger.

I forbindelse med Knorrs rekonstruktion af exhaustionsmetodens oprindelse er Kouremenos uenig i Knorrs begrundelser. Igen slår Kouremenos på, at hvis Eudoxos motivation skulle være at afskaffe den aktuelle uendelighed, der lå i de tidligere metoder, for at opnå større stringens, så er det mærkeligt, at Euklid i "*Elementerne*" på flere steder skødesløst (udefineret) lader aktuel uendelighed optræde i matematisk forstand, som diskuteret ovenfor. En af konsekvenserne af dette er ydermere, at Kouremenos konkluderer, at Aristoteles ikke fulgte i matematikernes fodspor, ligesom han afviser den omvendte hypotese om, at matematikerne på nogen måde skulle have fulgt filosofferne. Kouremenos' konklusioner omkring exhaustionsmetodens oprindelse er nærmere, at det Eudoxos bidrog med var dobbeltmodstridsbeviset, mens selve exhaustionen kom til senere. Dette vil blive behandlet mere indgående i det næste kapitel.

Konklusion

Efter læsningen af disse Aristoteles fortolkere må man konkludere, at de alle tre er enige om, at der ikke er en forbindelse mellem undgåelsen af det aktuelt uendelige i matematikken og Aristoteles' uendelighedsteori. Ingen af de tre forfattere mener, at de græske geometere havde en skræk for det uendelige. Det er meget interessant, at de er enige på dette punkt, da forskrækkelsen over det uendelige i den græske matematik, er noget, rigtig mange moderne forfattere henviser til. Det er f.eks. illustreret i indledningen til denne rapport med citatet fra Heaths bog om Archimedes, hvor han siger, at grækerne ligefrem altid stod stille ved uendelighedens afgrund. Man kan også henvise til Mejlbo, der siger, at:

”*Det græske ord apeiron betyder uendelig eller ubestemt, og det er nok vigtigt at gøre sig klart, at det indeholder noget i retning af kaos i sin betydning. For de fleste grækere har ordet været lidt truende. Det er typisk, at for grækerne var det et udtryk for fuldkommenhed, når man om en gud brugte ord som begrænset – det modsatte af apeiron.*” [Mejlbo, 1988, s. 1.4].

Og der kan findes mange andre henvisninger til grækernes skræk for det uendelige, både i filosofisk og matematisk sammenhæng.

En fælles grund til, at afvise, at geometerene skulle have en skræk for det uendelige, er, at det uendelige eller ubegrænsede er en forudsætning i den helt basale matematik på den tid, repræsenteret ved Euklids ”*Elementer*”. Den ubegrænsede forsættelse af den rette linje optræder i både postulat 2 og 5, som hører til de grundlæggende forudsætninger i den Euklidiske geometri. Der er uenighed om, hvorvidt der er brug for aktuel uendelighed, hvor Hintikka og Knorr ser et behov for aktuel uendelighed, mener Kouremenos, at grækernes matematik udelukkende har brug for potentiel uendelighed.

De tre forfattere har forskellige holdninger til, hvordan både Aristoteles og de græske geometere forholdte sig til det uendelige. Hvor både Hintikka og Knorr mener, at Aristoteles demonstrerer en mangelfuld forståelse for matematikkens grundlag, siger Kouremenos, at Aristoteles havde en glimrende forståelse for tidens matematik. I forbindelse med matematikernes forståelse mener Knorr, at de havde en klar forståelse af matematisk uendelighed, men at de ikke kunne inkorporere den i deres beviser på en stringent måde, hvilket var årsagen til, at de så vidt muligt undgik det uendelige. Kouremenos mener ikke, at geometerene brugte deres kræfter på at forholde sig til det uendelige, men at det kunne have været nyttigt for den stringente opbygning af ”*Elementerne*”, hvis de havde forholdt sig til dette tema. De kunne derfor have haft glæde af at forholde sig til Aristoteles’ teoretiske overvejelser.

Hvis grækerne havde så godt styr på matematisk uendelighed, som Knorr hævder (f.eks. kvotientrækken og den uendelige del af en uendelig helhed), virker det mærkeligt, at de ikke har kunnet se fordelene ved at beskæftige sig mere indgående med dette emne. Det kunne, som vi har set, have forøget stringensen af Euklids ”*Elementer*”, og man kunne måske have videreudviklet exhaustionsmetoden ved indførelse af et grænseværdibegreb.

Afvisningen af et samspil mellem matematik og filosofi, som både Knorr og Kouremenos forholder sig til, ligger i et argument om, at matematikken helt generelt udvikler sig uafhængigt af filosofien. I den forbindelse forholder begge forfattere sig anakronistisk til dette, da de henviser til udviklinger, der ligger i helt andre tidsaldre. Det er lidt ærgerligt, da der er flere af antikkens matematikere og ligeledes mere moderne matematikere, der samtidigt beskæftigede sig med både matematik og filosofi. I denne sammenhæng kan f.eks. nævnes Demokrit fra antikken og Leibniz fra 1600-tallet. Desuden ligger der i matematikken implicit en filosofisk stillingstagen. I dag kan man f.eks. nævne, at hvis man vælger at acceptere den klassiske analyse, accepterer man automatisk det aktuelt uendelige. Det er det ikke alle moderne matematikere, der automatisk gør, hvilket f.eks. ses i konstruktivismen.

Det er muligt, at de her behandlede Aristoteles fortolkere har ret i deres fælles konklusion om, at Aristoteles' uendeligheds teori ikke påvirkede samtidens matematikere. Men der er i hvert tilfælde helt klare beviser for en senere opmærksomhed i antikkens Grækenland. Et af de mest slående eksempler fra antikken er Pappos' (ca. 300 e.Kr.) tilføjelse af et uendeligheds aksiom til Euklids aksiomer, hvilket også bemærkes af Kouremenos. Dette er beskrevet i Heaths udgave af Euklids "*Elementer*", hvor Heath i noterne til bog I har en gennemgang af aksiomer, der kan dokumenteres at være tilføjet efter Euklids tid. Han nævner her, at der i en udgave af "*Elementerne*" af An-Nairizi bl.a. er tilføjet følgende aksiom, som eksplicit tilskrives Pappos:

"*Magnitudes are susceptible of the infinite (or unlimited) both by way of addition and by way of successive diminution, but in both cases potentially only*" [Heath, 1, 1956, s. 232]

Som Heath skriver, virker Pappos' aksiom, som skulle være citeret af Proklos (412-485), til at være taget direkte fra Aristoteles' uendelighedsteori, endda helt ned til ordlyden.

Når man læser Aristoteles' overvejelser om det uendelige og om kontinuitet i "*Fysikken*", får man det indtryk, at hvis Aristoteles havde haft de reelle tal til sin rådighed, havde han kunnet give definitioner om kontinuitet og grænseværdier, der minder meget om dem, man generelt accepterer i dag. Aristoteles' geometriske kontinuum indeholder de grundlæggende egenskaber, der er nødvendige for analysen. Det virker derfor i høj grad, som om mangelvaren er den aritmetisering af geometrien, der tager fart i 1500- og 1600-tallet. Det er jo også netop med karakteriseringen af de reelle tal, at den matematiske analyse får et stringent grundlag, og dette kan man jo kalde færdiggørelsen af aritmetiseringsprocessen.

Kapitel 4. Exhaustionsmetoden

Exhaustionsmetoden eller udtømningsmetoden sammen med dobbeltmodstridsbeviset til bestemmelse af krumme figurers arealer og voluminer er det mest slående eksempel fra antikkens matematik, hvor aktuel uendelighed meget behændigt undgås samtidig med, at den matematiske stringens bevares. I den moderne pendant, integralteorien, som til forskel fra dens antikke forløber er en helt generel kalkyle, er accepten af aktuel uendelighed en helt grundlæggende forudsætning, og det var bl.a. en ustringent indførelse af uendeligt små infinitesimaler/udelelige, der satte gang i udviklingen af denne i 16-hundredetallet. For den moderne matematiker er exhaustion efterfulgt af dobbeltmodstridsbevis en meget omstændelig metode, idet hele maskineriet skal startes forfra, hver gang et nyt areal eller volumen skal bestemmes.

På grund af undgåelsen af aktuel uendelighed i exhaustionsmetoden har mange forskere, som tidligere nævnt, konkluderet, at de gamle grækere havde en skræk for det uendelige, ikke kun som noget fysisk eller religiøst [Mejlbo, I, 1988], men også i matematisk forstand. Dette er ofte blevet koblet sammen med den filosofiske diskussion, f.eks. som en reaktion på Zenons paradokser eller en enighed omkring Aristoteles' afvisning af det aktuelt uendelige.

I dette kapitel vil den matematiske undgåelse af det aktuelt uendelige i matematikken i forbindelse med exhaustionsmetoden blive undersøgt. Som tidligere nævnt, blev metoden udviklet af Eudoxos, hvis værker er gået tabt for eftertiden, men den er beskrevet af Euklid i hans "*Elementer*". At metoden er udviklet af Eudoxos, vides fra Archimedes' direkte henvisning til dette i *"Om kuglen og cylinderen"*.

For at undersøge undgåelsen af aktuel uendelighed vil den matematiske metode, som den er nedfældet af Euklid, blive gennemgået. Derefter vil Knorrs og Kouremenos' rekonstruktioner af, hvordan og hvorfor metoden blev udviklet blive beskrevet og diskuteret. Der er nemlig, selvom der ikke er bevaret meget materiale fra de før-euklidiske matematikere, helt klare beviser på, at der, inden Eudoxos udviklede sin metode, eksisterede forløbere til denne. Grunden til, at denne undersøgelse af forhistorien til exhaustionsmetoden er relevant, er, at forhistorien indeholder tegn på, hvordan de græske matematikere forholdt sig til den matematiske uendelighed.

Kort biografi

Eudoxos

Eudoxos af Knidus i Lilleasien levede fra 408 f.Kr. til 355 f.Kr.. Han rejste og studerede meget. Bl.a. studerede han matematik og musikteori i Italien hos Archytas (ca. 428-350 f.Kr.), en tilhænger af Pythagoras (ca.569-475 f.Kr.), samt medicin på

Sicilien. Herefter studerede han kortvarigt filosofi ved Platons (427-347f.Kr.) nyoprettede *Akademi* og senere astronomi i Ægypten. Herefter tog han til Cyzicus i det nordvestlige Lilleasien, hvor han etablerede en skole, der fik stor popularitet. Som nævnt er alle Eudoxos' værker gået tabt, men store dele er gengivet af Euklid.

Euklid

Euklid af Alexandria, der levede fra ca. 325 f.Kr. til ca. 265 f.Kr. anses af mange for at være en af antikkens mest fremtrædende matematikere og matematiklærere/-formidlere specielt på grund af hans værk, ”*Elementer*”, hvis klarhed og konsistens i bevisførelse og høje stringensmæssige standard har dannet forbillede helt op til vor tid. Man kender kun lidt til Euklids liv. Fra Proklos (411-485 e.Kr.) vides, at han skrev *”Elementer”*, og at han underviste i Alexandria. Endvidere at han er efter Platon, men før Erastothenes (ca.284-204 f.Kr.) og Archimedes (ca.287-212 f.Kr.) og lever under den første Ptolomæus. Proklos gengiver, at sidstnævnte skal have spurgt Euklid, om der var en kortere vej til studiet af geometri end *”Elementerne”*, hvortil Euklid skal have svaret

”*…that there was no royal road to geometry.*” [Heath, 1, 1956, s.1].

Om hans karakter skriver Pappos (ca. 290-350 e.Kr.), at Euklid var

”*…most fair and well disposed towards all, who were able in any measure to advance mathematics, careful in no way to give offence, and although an exact scholar not vaunting himself.*” [O'Connor et. al., 1, s. 3]

At han har besiddet en del humor (og sarkasme) antydes af følgende historie af Stobaeus:

”*… someone who had begun to learn geometry with Euclid, when he had learned the first theorem, asked Euclid "What shall I get by learning these things?" Euclid called his slave and said "Give him threepence since he must make gain out of what he learns".* [Heath, 1, 1956, s.3]

Oplysningerne om Euklids liv er som sagt yderst sparsomme, men også vanskeligt tilgængelige, ikke mindst fordi han på sin tid i flere sammenhænge synes at være blevet forvekslet med filosoffen, Euklid af Megara, der menes at have levet ca. 100 år tidligere. Den dominerende opfattelse er dog, at Euklid blev oplært i Athen af elever af Platon. Dette understøttes dels af formen af ”*Elementerne*”, der klart peger på oplæring inden for denne skole, og dels af det faktum, at Athen var stedet, hvor andre matematikere, hvis arbejder ”*Elementerne*” er præget af, levede og underviste [Heath, 1, 1956]. Selv underviste Euklid som sagt i Alexandria, hvor han også grundlagde en skole, hvilket er kendt fra Pappos bemærkning om Appolonius (ca. 262-190f.Kr.): ”*He* *spent very long time with the pupils of Euklid at Alexandria, and it was thus that he acquired such a scientific habit of thought*", [Heath, 1, 1956, s.2].

Elementerne

Ordet *Elementer* betyder egentlig dele eller grundbestanddele og skal i denne sammenhæng nok læses som "(Geometriens) grundlag" eller "Geometriens elementer/bestanddele/grundsætninger" [Heath, 1, 1956]. Andre af den tids geometere har skrevet værker med titlen "*Elementer*", for eksempel - som den første kendte - Hippokrates (ca. 470-410f.Kr.). Endvidere Theudius (ca. 350 f.Kr.) m.fl., så betegnelsen "*Elementer*" har nok været gængs for en grundlæggende lærebog inden for dette og muligvis andre felter.

"*Elementerne*" gengiver blandt andet en række arbejder, der tilskrives Eudoxos. I denne sammenhæng skal nævnes "*Elementerne*" bog V, der beskriver proportionslæren formuleret uafhængigt af de indgående størrelsers kommensurabilitet [Heath, 2, 1956], samt Bog X, hvor kommensurabilitet samt rationale og irrationale størrelser defineres. Proportionslæren med disse definitioner og efterfølgende sætninger udvides her til at omfatte inkommensurable størrelser[4]. Bog X sætning 1 udtrykker selve exhaustionsprincippet, beviset for hvilket gengives senere i kapitlet. Endelig Bog XII, der omhandler anvendelserne af exhaustionsmetoden. Blandt andet bevises den kendte sætning, at "*forholdet mellem to cirkelarealer er lig med forholdet mellem kvadratet på cirklernes diametre*", Bog XII.2[5], der gennemgås senere i kapitlet.

Proportionslæren

Exhaustionsmetoden benytter resultater fra proportionslæren, "*Elementerne*" bog V, dels i selve beviset for exhaustionsmetoden og dels i de konkrete areal- og volumenbestemmelser, hvor denne og dobbeltmodstridsbeviset anvendes i bevisførelsen.

Proportionslæren præciserer i sætninger regneregler vedrørende proportioner, eller forhold mellem størrelser. Mange af proportionslærens sætninger har været helt eller delvist kendt af tidligere geometere helt tilbage til pythagoræerne, der kendte til regneregler for kommensurable størrelser [Heath, 2, 1956]. Eudoxos formulerer som sagt i proportionslæren sådanne regneregler uafhængigt af indgående størrelsers kommensurabilitet. Her skal nævnes definitionen på 'at stå i proportion til' eller 'at forholde sig til', Bog V, Def. 4 efter Dijksterhuis [Dijksterhuis, 1953].

---

[4] Pythagoræerne er jf. en tidlig gengivelse af Book X de første, der beskæftiger sig med kommensurabilitet, som de har opdaget gennem studier af tallene. De anså kommensurable og inkommensurable størrelser for *naturlige (slags)*, mens rationale og irrationale størrelser beroede på *antagelsen* eller *konventionen* [Heath, 3, 1956]

[5] Betegnelsen for Euklid, Bog XII, sætning 2

Der består et forhold mellem to størrelser, A og B*, hvis og kun hvis de ved mangedobling kan overgå hinanden, altså når der findes to tal,* m *og* n*, så:*

$n \cdot A > B$ *og* $m \cdot B > A$

Tallene, m og n, kan være lig med 2 eller derover, men ikke 1, der ikke er et tal. I øvrigt leverer 1 jo heller ikke en 'flerdobling'. Definitionen anvendes i beviset for exhaustionsprinsippet. Ovenstående benævnes det *Eudoksiske Axiom*, der kun kan opfyldes af størrelser *af samme slags.* Af samme slags er f.eks. to linjer, to overflader, to rumfang eller to tider, men ikke f.eks. en linie og en tid.

Endnu en vigtig definition inden for proportionslæren er Bog 5, Def. 5, her opskrevet for >, men også gældende for < og =:

Givet størrelserne A, B, C *og* D *(af samme slags). Det gælder da, at* $A : B > C : D$*, hvis der findes et tal par* m, n*, så*

$m \cdot A > n \cdot B$ *og* $m \cdot C \leq n \cdot D$,

der ligeledes anvendes i beviset for exhaustionsprincippet.

I Bog V bevises ud fra 18 indledende definitioner proportionslærens i alt 25 sætninger, som det vil føre for vidt at komme ind på her. Blot skal her nævnes de grundlæggende sætninger, at

Givet størrelserne A, B, C *og* D *(af samme slags):*

Af $A > B$ *følger, at* $A : C > B : C$ *og* $C : B > C : A$

Grundet ovennævnte bemærkninger om *størrelser af samme slags* bemærkes endelig, at sætningen $A : B = C : D$ *medfører* $A : C = B : D$, altså "at gange over kors", i almindelighed ikke er gældende i proportionslæren. Dette skyldes, at selvom *A* og *B* henholdsvis *C* og *D* er af samme slags, behøver dette ikke at være tilfældet for *A* og *C* henholdsvis *B* og *D.* Sætningen er således kun gyldig for fire størrelser af samme slags. I bevægelseslæren gælder derfor for sammenhørende værdier af sted og tid, (s_1, t_1) og (s_2, t_2), at

$s_1 : s_2 = t_1 : t_2$

men ikke

$s_1 : t_1 = s_2 : t_2$

Man kan altså ikke, som vi gør i bevægelseslæren i dag, tale om forholdet mellem en strækning og den tid, i hvilken denne gennemløbes.

Dijksterhuis benytter betegnelsen *(A,B)*, for forholdet mellem *A* og *B,* for at undgå det indtryk, at der er tale om en brøk, som *A/B* eller *A:B* kunne antyde. Vi har dog her og i det følgende valgt at bruge Heaths betegnelse, *A:B*. Det bemærkes, at beviserne i det følgende er baseret på ræsonnementer over sådanne forhold.

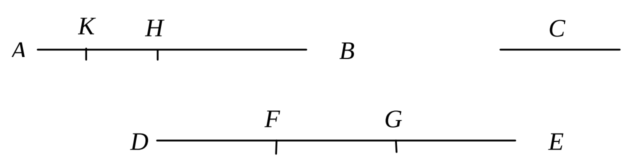
Exhaustionsprincippet

Selve exhaustionprincippet nedskrives af Euklid i Bog X.1 som følger:

> *Givet to forskellige størrelser. Hvis der fra den største fjernes mere end halvdelen*[6]*, og der fra den resterende størrelse igen fjernes mere end halvdelen, og denne proces fortsættes, da vil resten blive mindre end den mindste af de to givne størrelser.* [7]

Beviset for denne sætning forløber som følger.

Lad *AB* og *C* være to liniestykker (størrelser) af forskellig længde, se fig. 4.1



Figur 4.1. Illustration til exhaustionsprincippet.

Der findes et helt tal, *n*, så *C* multipliceret med *n* bliver større end *AB.* Lad *DE* være et sådant multiplum af *C,* hvor *DE>AB*. *DE* deles nu i stykkerne *DF, FG* og *GE*, der hver er lig med *C.* Fra *AB* trækkes nu stykket *HB*, der er større end halvdelen af *AB*, og fra *AH* stykket *KH,* der er større end halvdelen af *AH.* Denne proces gentages, indtil *AB* er inddelt i samme antal stykker som *DE.*

Lad *AK, KH* og *HB* være de dele af *AB*, der i antal svarer til *DF, FG* og *GE.* Da *DE* > *AB*, og der fra *DE* trækkes *EG*, der er mindre end halvdelen af *DE*, og fra *AB* er trækkes *HB*, der er større end halvdelen af *AB*, fås at resten, *DG*, er større end resten, *AH*, jf.

[6] Det kan som bekendt vises, at fjernelse af *mindst* halvdelen er tilstrækkeligt.

[7] Two unequal magnitudes being set out, if from the greater there be subtracted a magnitude greater than its half, and from that which is left a magnitude greater than its half, and if this process is repeated continually, there will be left some magnitude which will be less than the lesser magnitude set out. [Heath, 3, 1956, s.14]

proportionslæren Bog V, Def. 5. Da altså *DG>AH*, og der fra *DG* trækkes halvdelen, nemlig *FG*, og fra *AH* trækkes *KH*, der er større end halvdelen af *AH*, følger heraf, at resten, *DF*, er større end resten, *AK*. Men *DF* er lig med *C*, hvorfor *C>AK*. Altså er der af *AB* et stykke tilbage, der er mindre end det mindste af de to givne liniestykker. Q.E.D.

Ovenstående resultat kunne man i dag udtrykke som følger: Har vi en størrelse, *S*, hvoraf vi fjerner over halvdelen, fortsætter med at fjerne halvdelen af resten osv. vil resten, r_n, efter et endeligt antal trin, *N*, være mindre end en hvilken som helst given positiv størrelse, $\varepsilon < S$, eller på kvantorform

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \boldsymbol{N}\ \exists n > N \forall n \in \boldsymbol{N} : n \geq N \Rightarrow r_n < \varepsilon \qquad 4.1$$

eller

$$r_n \to 0 \text{ for } n \to \infty \qquad 4.2$$

Udsagnet 4.2 ville med sit brug af ∞ være helt utilladeligt i den græske matematik, mens formuleringen 4.1 formentlig har kunnet accepteres, da der er tale om et endeligt antal trin og dermed kun om potentiel uendelighed. Det skal dog bemærkes, at 4.1 og 4.2 i moderne terminologi er helt ækvivalente. Forskellen til i dag er altså det skridt, der siger, at en konvergent følge har en grænseværdi, hvilket indebærer accept af aktuel uendelighed. Denne forståelse er et essentielt led i udviklingen af analysen.

Cirklens kvadratur ved exhaustionsmetoden

I det følgende illustreres exhaustionsmetoden og dobbeltmodstridsbeviset som anvendt af Euklid til bestemmelse af cirklens areal.

Euklids sætning XII.2 lyder

> *Forholdet mellem to cirkelarealer er lig med forholdet mellem kvadratet på cirklernes diametre.*[8]

Udtrykt i formler, hvor cirklerne betegnes C_1 og C_2, deres arealer A_1 og A_2 samt deres diametre d_1 og d_2, se fig. 4.2:

$$A_1 : A_2 = d_1^2 : d_2^2 \qquad 4.3$$

[8] Circles are to one another as the squares of the diametres. [Heath, 3, 1956, s.371]

Dette bevises ved exhaustionsmetoden og dobbeltmodstridsbevis under brug af følgende to sætninger:

Euklid XII.1:

> *Arealet af ligedannede polygoner indskrevet i cirkler forholder sig til hinanden som kvadratet på cirklernes diametre.*

Samt den tilsvarende for omskrevne polygoner:

> *Arealet af ligedannede polygoner omskrevet cirkler forholder sig til hinanden som kvadratet på cirklernes diametre.*

Beviset for Euklids sætning XII.2 forløber således:

Der findes et areal, *B*, som opfylder ligningen

$$d_1^2 : d_2^2 = A_1 : B \qquad 4.4$$

Vi vil bevise gyldigheden af sætning XII.2 ved at vise, at $A_2 = B$. Euklid beviser dette, ved at udelukke, at $B < A_2$ og $B > A_2$, altså at $B = A_2$, som følger:

1. del: Antag først at $B < A_2$.
Et kvadrat $E_1E_2E_3E_4$[9], fig. 4.2, indskrives i cirklen C_2, der endvidere omskrives med kvadratet, F_{1234}. Arealet af E_{1234}[10] udgør/fjerner præcis halvdelen af $A(F_{1234})$ og derfor mere end halvdelen af A_2, dvs. $A(E_{1234}) > ½A_2$.

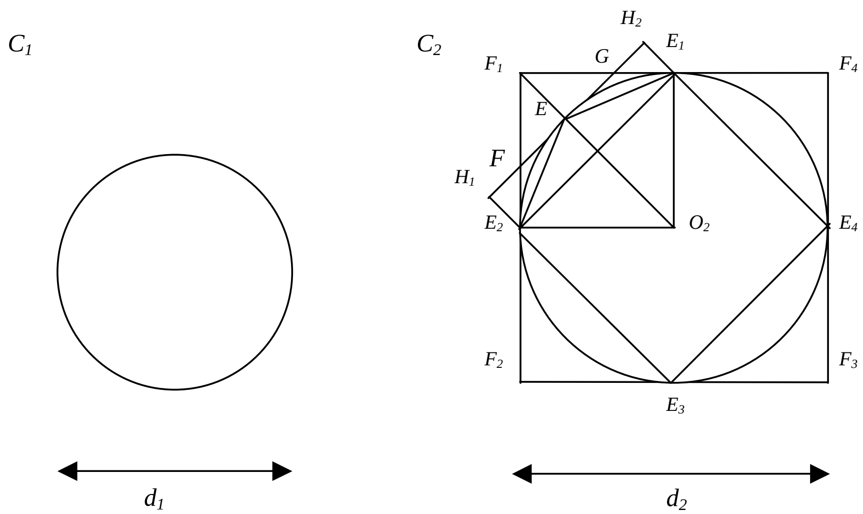
I næste trin deles hver af buerne E_{12}, E_{23}, E_{34} og E_{41} i to lige store buer. Herved fremkommer en ottekant, hvis ene ottendedel er trekanten $\Delta(E_1EO_2)$.

Betragtes rektanglet $E_1E_2H_1H_2$ ses ved samme ræsonnement som for kvadraterne, E_{1234} og F_{1234}, at $A(\Delta E_1EE_2)$ udgør/fjerner over halvdelen af cirkelarealet uden for E_{1234} (i 2. kvadrant). Ved at fortsætte således, vil man i alt få fjernet så meget af cirkelarealet, at arealet af den dertil svarende polygon (2^n-kant), P_n, er større end *B*, dvs. $B < P_n < A_2$, svarende til, at den resterende del af cirkelarealet kan gøres mindre end et hvilket som helst givet areal.

---

[9] Dette og lignende betegnelser skrives herefter E_{1234}.

[10] Herefter $A(E_{1234})$



Figur 4.2 Illustration til beviset for cirklens kvadratur.

Nu indskrives C_1 i en polygon, Q_n, der er ligedannet med P_n. Af sætning XII.1 følger nu, at

$$Q_n : P_n = d_1^2 : d_2^2 \tag{4.5}$$

Eller ifølge 4.4

$$Q_n : P_n = A_1 : B \Leftrightarrow \tag{4.6}$$

$$Q_n : A_1 = P_n : B \tag{4.7}$$

Dette er imidlertid en modstrid, da vi ved, at $Q_n < A_1$ og $P_n > B$. Altså er B ikke mindre end A_2.

2. del: Antag nu at $B > A_2$
Igen gælder det, at der findes et B, så

$$d_1^2 : d_2^2 = A_1 : B \tag{4.8}$$

Betragt figur 4.2, hvor vi nu omskriver cirklen, C_2, med kvadratet, F_{1234} samt med ottekanten, der fremkommer ved at konstruere tangenterne til cirklen i de fire punkter, hvor linierne O_2F_1, O_2F_2, O_2F_3 og O_2F_4 skærer denne, se fig. 4.2, hvor $E_1GFE_2O_2$ udgør en fjerdedel af ottekanten. Vi skal nu vise, at tangenten i E fjerner mere end halvdelen af den del af F_{1234}, der ligger uden for cirklen i kvadratet $E_1F_1E_2O_2$ (tilsvarende i øvrige kvadranter), eller at $A(\Delta F_1EG) > A(\Delta GEE_1)$. $\angle F_1EG$ er ret og derfor større end $\angle EF_1G$. Derfor er $F_1G > EG = GE_1$, hvoraf følger, at $A(\Delta F_1EG) > A(\Delta GEE_1)$. Altså fjerner ottekanten mere end halvdelen af arealet mellem cirklen og det omskrevne kvadrat, F_{1234}.

Fortsættes således konstruktionen af 2^n-kanter, vil man få fjernet så meget af arealet mellem kvadratet F_{1234} og C_2, at den dertil svarende polygon, P_n, er mindre end B, dvs. $A_2 < P_n < B$.

Nu omskrives C_1 med en polygon, Q_n, der er ligedannet med P_n. Af den til sætning XII.1 svarende sætning for omskrevne polygoner følger, at:

$Q_n : P_n = d_1^2 : d_2^2$ eller jf. 4.8

$Q_n : P_n = A_1 : B$ eller

$Q_n : A_1 = P_n : B$

Men dette er en modstrid, da vi ved, at $Q_n > A_1$ og $P_n < B$.

Da B således hverken er mindre eller større end A_2, må det gælde, at $A_2 = B$, hvoraf sætning XII.2 følger.

Ovenstående resultat kunne man i dag udtrykke som følger og analogt med det ved beviset for sætning X.2 anførte: Har vi en størrelse, S - denne er i beviset for sætning XII.2, 1. del, lig med arealet mellem 2^2-kanten, E_{1234}, og cirklen, C_2 - hvoraf vi fjerner mere end halvdelen, og fortsætter med at fjerne mere end halvdelen af resten, vil resten, r_n, efter et endeligt antal trin, N, være mindre end en hvilken som helst given størrelse, $\varepsilon < S$, eller på kvantorform

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N}\ \exists n > N \forall n \in \mathbf{N} : n \geq N \Rightarrow r_n < \varepsilon \qquad 4.9$$

eller

$$r_n \to 0 \text{ for } n \to \infty \qquad 4.10$$

I den moderne formulering er godtgørelse af, at 4.9 eller 4.10 *eller* de tilsvarende udtryk for bevisets 1. del hver for sig fuldt tilstrækkelige til at konkludere, at $A_2 = B$. Det er således ikke i moderne formulering nødvendigt at gennemføre dobbeltmodstridsbeviset. Desuden har vi nu formler til bestemmelse af cirklens areal og mere komplicerede geometriske figurer, som let kan udledes ved hjælp af integralregningen. Dette ville ikke være muligt i antikken, hvor kun forhold mellem geometriske størrelser gav mening. Den for formelanvendelse nødvendige aritmetisering af geometrien var ikke udviklet.

Diskussion

Af ovenstående gennemgang fremgår, at Euklids bevis for cirklens kvadratur undgår enhver berøring med aktuel uendelighed, men beviset må dog i vores øjne siges at indebære en accept af det potentielt uendelige, da exhaustionsprocessen kan fortsættes, så langt det ønskes uden at gøre brug af størrelsers voksen eller aftagen *ad infinitum*. Brug af begrebsmæssigt problematiske infinitesimale størrelser eller grænseovergange er undgået. Ikke desto mindre har exhaustionen en klar lighed med den moderne definition af grænseværdier, hvilket forklarer exhaustionsmetodens relevans for diskussionen af infinitesimaler og processer, der involverer grænseovergange [Kouremenos, 1997].

Ser man på exhaustionsmetodens oprindelse vides det, at Leukippos, Antifon, Hippokrates og Demokrit alle har leveret bidrag til udviklingen af denne [O'Connor et. al., 2]. Den blev dog ifølge mange først bragt på ovenstående form af Eudoxos ca. 370 f. Kr., formentlig efter hans formulering af den generelle proportionslære med dens forskrifter for håndtering af forhold mellem geometriske størrelser. F. eks. kan nævnes, at Hippokrates (ca. 470-410 f.Kr.) i sine månekvadraturer [Kline, III, 1972] antager gyldigheden af sætning XII.2 (som gengivet ovenfor). Ifølge Knorr's rekonstruktion af Hippokrates' bevis [Knorr, 1982], har sidstnævnte kendskab til sætningen fra Antifon, hvilket fremgår af en bemærkning hos Aristoteles, som den er kommenteret af Simplicius.

Antifon indskriver et kvadrat i en cirkel, og danner ud fra midtnormalernes skæringspunkter med cirklen samt kvadratets fire vinkelspidser en ottekant eller en 2^3-kant. Den efterfølgende proces, hvor 2^n-kanter konstrueres ved på tilsvarende vis at konstruere 2^{n-1} ligebenede trekanter med polygonsiderne som grundlinier og toppunkter på cirkelperiferien, kan fortsættes *ad infinitum*. Imidlertid slipper Antifon ikke godt fra resten af argumentationen, idet han antager, at polygonen bliver til cirklen efter et *endeligt* antal trin. Endvidere begrunder han sammenfaldet mellem cirkel og polygon efter disse trin med lidenheden af polygonsiderne henholdsvis de tilsvarende cirkelbuer - altså en helt igennem ustringent og umatematisk argumentation. Til Antifons forsvar nævner Knorr, at Antifon var sofist og primært beskæftigede sig med etik og erkendelsesteori. Han er da heller ikke nævnt på Proklos' liste over før-euklidiske geometere.

Hippokrates, tager udgangspunkt i Antifons polygonkonstruktioner, men giver et bevis for sætning XII.2, der formentlig har større lighed med det af Eudoxos formulerede. Ifølge Knorr's rekonstruktion [Knorr, 1982], [Kouremenos, 1997] kan Hippokrates have gjort som følger: Han er gået ud fra den da kendte sætning - senere *"Elementerne"* XII.1 for kvadrater - at *ligedannede polygoner s og S indskrevet i cirkler c og C forholder sig til hinanden som kvadratet på cirklernes diametre* d^2 *og* D^2. Endvidere den senere *"Elementerne"* VI.19 og 20 - at *ligedannede trekanter* t_0 *og* T_0 *konstrueret på siderne af s og S forholder sig indbyrdes som de to kvadrater, på hvilke de er konstrueret*, altså at $t_0 : T_0 = s : S$. Det samme gælder for trekanter t_1 *og* T_1 konstrueret på t_0 *og* T_0, altså kan ved et naivt induktionsargument sluttes, at $t_{n-1} : T_{n-1} = t_n : T_n$. Det benyttes nu, at en endelig størrelse kan opfattes som summen af halvdelen, fjerdedelen, ottendedelen osv. af størrelsen. Opfattes *c* o*g C* hver for sig som summen af et kvadrat, fire trekanter, der supplerer kvadratet til en ottekant, 8 trekanter, der supplerer ottekanten til en 16-kant osv. fås, at de to cirkler *c og C* kan opfattes som de to uendelige summer $s + \Sigma t_n$ og $S + \Sigma T_n$. Men da $d^2 : D^2 = s + \Sigma t_n : S + \Sigma T_n$ - her forudsætter Knorr kendskab til den senere *"Elementerne"* V.12 - følger heraf, at $d^2 : D^2 = c : C$, hvilket var det, der skulle bevises. Kouremenos er enig med Knorr i denne rekonstruktion af Hippokrates' fremgangsmåde.

Som det ses, har ovennævnte konstruktion af den tilnærmende polygon stor lighed, med exhaustionsdelen af Eudoxos' bevis i Euklids formulering. Resten af beviset benytter dels det intuitive postulat, at *helheden er lig med summen af dens dele*, og dels et naivt induktionsargument. Redskaber til gennemførelse af et egentligt induktionsbevis har naturligvis ikke været til rådighed.

Samme teknik som ovenstående er formentlig anvendt af Demokrit i hans sandsynliggørelse af eller bevis for den senere sætning XII.10: *"En kegle ('s volumen) er en tredjedel af cylinderen, der har samme grundflade og samme højde"*. Archimedes tilskriver Demokrit formuleringen af sætning XII.10, mens Eudoxos tilskrives beviset for denne. Disse tidlige anvendelser af exhaustionslignende metoder må faktisk formodes at have indebåret en accept af det aktuelt uendelige, da de tilsyneladende underforstår eller antager eksistensen af en grænseværdi. Dette i modsætning til den af Eudoxos formulerede metode, der kun indebærer accept af potentiel uendelighed i forbindelse med en proces med 'så mange trin, det ønskes'.

De før-eudoksiske metoder er således ustringente i den forstand, at argumentationen - f.eks. af mangel på et egentligt induktionsbevis eller et dobbeltmodstridsbevis - ikke føres til ende. Dette kunne rejse følgende spørgsmål:

1. Hvor langt skal man gå? Er der underforstået en grænseovergang, eller foreligger der en vag antagelse om, at de betragtede polygoner efter "mange" trin vil være sammenfaldende med de omskrevne cirkler?
2. Er metodens sammenligning af krumme og retlinede liniestykker uproblematisk?

3. Vil summen af de indgående polygoners arealer være lig med den krumme figur?

Ovenstående spørgsmål er ikke umiddelbart besvaret i kilderne, og kan meget vel have fået datidens geometere til at finde en genetablering af den matematiske stringens påkrævet. Eudoxos leverer en klar formulering af tidligere tiltag dels i form af exhaustionsprincippet underbygget af definitioner og sætninger fra proportionslæren, og dels ved i forbindelse med areal- og volumenbestemmelser at supplere exhaustionsmetoden med dobbeltmodstridsbeviset. Knorr hævder, at Eudoxos' motiv for udvikling af metoden kan være ovennævnte krav om stringens, hvilket underbygges af, at han beviser mindst to tidligere viste eller i hvert fald kendte sætninger under brug af metoden, nemlig ovennævnte sætninger XII.2 og XII.10.

I 1600-tallet skelnede matematikere som f.eks. Newton og Maclaurin mellem exhaustionsmetoden og andre – mindre stringente – teknikker, der anvendte infinitesimaler eller udelelige i bevisførelsen. Ligesom i antikken begrundede de manglen på stringens med anvendelsen af aktuelt uendelige størrelser som de uendeligt små infinitesimaler og deres uendelige antal. Der er derfor matematikhistorikere, som mener, at exhaustionsmetoden blev udviklet af Eudoxos som reaktion mod sådanne mindre stringente metoder [Kouremenos, 1997]. Kouremenos gengiver dette som Knorrs synspunkt, men støtter det ikke selv, da han ikke mener, at formålet var et ønske om større stringens. Tværtimod mener Kouremenos ikke, at dette kan underbygges i læsningen af "*Elementerne*", der netop mangler stringens omkring undgåelsen af aktuel uendelighed, som diskuteret i kapitel 3. Kouremenos mener, at der er en analogi til diskussionen i 1600-tallet, men at denne bliver anvendt som et fortolkningsredskab, der ukritisk overfører argumenter fra 1600-tallets diskussion til antikken.

Det skal endvidere nævnes, at Archimedes i sin indledning til *"Metoden"* i forbindelse med en historisk retfærdiggørelse af sine egne uformelle undersøgelser skelner mellem sætning XII.10 *uden bevis* og bevist ved exhaustionsmetoden af Eudoxos. Archimedes så således ikke blot exhaustionsmetoden som en opstramning af ældre, mindre stringente metoder, f.eks. Hippokrates' eller Demokrits, men har muligvis anset visse af sine egne metoder for mindre stringente, hvilket kunne være på grund af hans brug af udelelige eller af mekaniske argumenter eller evt. begge. Hans omtale af Demokrits fremstilling, som han betegner som værende *uden bevis,* behøver dog ikke nødvendigvis at sigte til stringensen i Demokrits bevis, men blot til at Demokrits bevistype er et udtryk for hans tids konventioner. Dette understøttes af, at Eudemos (det 4. århundrede f.Kr.) ikke sætter spørgsmålstegn ved stringensen af Demokrits bevis.

Konklusion

Det er i dette kapitel vist, hvordan exhaustionsmetoden sammen med dobbeltmodstridsbeviset repræsenterer en stringent undgåelse af aktuel uendelighed. Dette er illustreret med sætning XII.2 i "*Elementerne*", der er Euklids udgave af dette bevis for cirklens kvadratur. Archimedes tilskriver direkte udviklingen af bevisførelsen til Eudoxos, men i hvor høj grad Eudoxos' beviser er magen til dem, der findes hos Euklid, er der ikke generel enighed omkring. Faktisk mener Knorr, at Eudoxos kun fremførte exhaustionsprincippet (X.1) som et aksiom, mens Euklid leverer beviset. Ingen af Eudoxos' skrifter er bevaret, og der er generelt meget få kilder fra de før-euklidiske matematikere. Dette har ledt forskellige forskere til at forsøge at rekonstruere udviklingen af exhaustionsmetoden. Her er det Knorrs og Kouremenos' rekonstruktioner, der er diskuteret.

Kouremenos er enig i Knorrs rekonstruktion af den bevisførelse, der blev anvendt af matematikerne før Eudoxos. Denne rekonstruktion er baseret på, den eksisterende viden om Hippokrates' arbejde, hvor Knorr sandsynliggør, at Hippokrates' før-eudoksiske bevis var baseret på et naivt induktionsargument og en konstruktion af en aftagende konvergent række med cirklens areal som grænseværdi. Begge forfattere er ligeledes, som det fremgår af kapitel 3, enige om, at motivationen for udviklingen af metoden hverken skal søges i grækernes tidligere omtalte skræk for det uendelige eller i en påvirkning fra tidens filosofiske debat. Ifølge Knorr er det snarere filosofferne, der har søgt støtte eller afklaring i matematiske argumenter end omvendt. Knorr mener desuden ikke, at ønsket om stringens skyldtes en skræk for det uendelige. Han mener derimod, at man på Eudoxos' tid accepterede aktuel uendelighed i matematikken, hvorfor Eudoxos kunne tillade sig, at angive exhaustionsprincippet som et aksiom. Opstramningen med et bevis for exhaustionsprincippet skulle i Knorrs fortolkning først være kommet med Euklid.

Overordnet set er der tre synspunkter vedrørende motivationen bag udviklingen af exhaustionsmetoden:

1. Filosoffernes påvirkning via deres diskussioner om kontinuitet og uendelighed.
2. Ønsket om at opnå større stringens i bevisførelsen.
3. Hverken undgåelse af aktuel uendelighed eller påvirkning fra filosofien, men en naturlig homogenisering og udvikling af bevisførelsen.

Trods forskelligheden i argumenterne drejer de sig alle om matematisk stringens. De der forsvarer punkt 1 mener, at matematikerne ønskede en opstramning for at undgå det aktuelt uendelige. Til punkt 2 hører indførelsen af et dobbelt modstridsbevis i stedet for det tidligere anvendte naive induktionsbevis. Til argumenterne for punkt 3 hører, at exhaustionsbeviset skulle være udviklet som erstatning for en ældre metode, hvor årsagen til erstatningen udelukkende ligger i en forbedring af den formelle præsentation ved en større grad af ensartethed. Dette indebærer ikke nødvendigvis, at den ældre metode skulle have været anset som værende ustringent. I den forbindelse ved vi heller ikke præcist, hvad antikkens matematikere har forstået ved stringent bevisførelse.

Opfattelsen af matematisk stringens er ikke den samme i forskellige perioder, og man er ofte fristet til at lægge sit eget syn til grund for sin fortolkning. Der er ved læsning af antikkens matematiske kilder mulighed for mange fortolkninger, specielt pga. den syntetiske opbygning af værkerne, der ikke giver læseren oplysninger angående idegrundlaget. Det eneste eksempel fra antikken, hvor vi får indblik i ideskabelsen bag udviklingen af matematikken, er i Archimedes' værk ”*Metoden*”, som diskuteres i det følgende kapitel.

Kapitel 5. Archimedes

Archimedes er anerkendt som en af antikkens absolut største matematikere. To af de helt store forskningsfelter i antikkens matematik er, dels forløberen til integration ved anvendelsen af exhaustionsmetoden, dels keglesnitslæren. Inden for disse to områder har Archimedes bidraget betydeligt til begge, men det var specielt 'integrationen', der var Archimedes' arbejdsfelt. På det tidspunkt, hvor han begynder sin forskning, har han Euklids store værk "*Elementerne*" til sin rådighed, og det er resultaterne i dette værk, der danner udgangspunktet for Archimedes' mesterlige anvendelser af exhaustionsmetoden [Dijksterhuis, 1953]. Udover bidragene til keglesnitslæren og hans bemærkelsesværdige arbejde inden for 'integration', har Archimedes også bidraget betydeligt til fysikken og den matematiske beskrivelse af denne, og Archimedes anvender ofte resultater fra mekanikken i sin matematik.

Et karakteristisk træk ved det, der er overleveret af den græske matematik, er, at værkerne med deres syntetiske beviser er opbygget efter meget stringente principper, som ikke giver læseren indblik i geometerenes arbejdsmetoder. På dette punkt er opdagelsen af Archimedes' værk "*Metoden*" af Heiberg i 1906 et gennembrud i matematikhistorien. Her løfter Archimedes sløret for, hvordan han gjorde matematiske opdagelser, og der ses en klar forskel på hans udforskning af matematikken og det efterfølgende geometriske bevis [Knorr, 1978]. Denne skelnen mellem, hvad der kan accepteres som et endegyldigt matematisk resultat og den kreative proces, der leder frem til dette, giver også mulighed for at få et bedre indblik i, hvordan de græske matematikere eller i hvert tilfælde Archimedes forholdt sig til uendelighed i matematikken.

I dette kapitel vil der blive taget udgangspunkt i Archimedes' værk "*Parablens kvadratur*", som både eksisterer som et selvstændigt matematisk værk og desuden er gennemgået i "*Metoden*". Herved er det muligt at se, hvordan han forholdt sig til, hvad der kan accepteres som et matematisk resultat, hvilket også belyser hans holdning til matematisk uendelighed. Derudover diskuteres forskellige moderne forskeres holdning til dette. I den forbindelse er der med genfundet af "*Metoden*", som forsvandt efter Heibergs læsninger, kommet nye resultater, der bidrager til forståelsen af Archimedes håndtering af matematisk uendelighed. Disse vil også blive diskuteret.

Kort biografi

Archimedes blev født i 287 f.Kr. i Syrakus på Sicilien, hvor han også døde i 212 f.Kr. I sine unge år studerede han i Alexandria hos Euklids efterfølgere. Denne tilknytning til Alexandria skolen ses ved hans kendskab til den matematiske udvikling, der foregik i Alexandria. Desuden foregik hans korrespondance ofte med matematikere herfra, idet han sendte sine nyopdagelser til ledende skikkelser i Alexandria [O'Connor et al. 3].

Archimedes var en anerkendt matematiker af sin tid, og der er adskillige referencer til ham i andre værker fra den tid. Men udover anerkendelsen af hans matematiske geni, der muligvis kun har været inden for de akademiske kredse, var der også stor respekt omkring ham hos folket. Dette skyldes hans mange opfindelser af bl.a. krigsmaskiner, der blev taget i brug under romernes angreb på Syrakus [Sato, 1987]. Udover krigsmaskinerne gjorde Archimedes adskillige andre opfindelser f.eks. taljen, skruen til at hæve vand og vandorglet, hvilket viser, at han havde et stort talent for anvendt fysik, specielt i sin anvendelse af mekanikken. Dette kommer, som nævnt, også til udtryk i hans matematiske værker. Men han var primært dedikeret til matematikken. Ifølge Plutarch (ca. 45-120), ytrede Archimedes, at enhver form for kunst brugt til daglige behov var vulgær og uværdig, og Archimedes betragtede sine matematiske landvindinger som værende mere værdifulde end hans opfindelser, da matematikken var en renere kunstart end konstruktionerne [O'Connor et al., 3].

Archimedes døde ifølge overleveringerne, som han levede. Historierne er mange, men alle fortæller om et slag under den puniske krig i Syrakus, hvor Archimedes, opslugt i matematiske grublerier, blev angrebet og dræbt af en romersk soldat. Selvom Archimedes' krigsmaskiner var meget effektive under dette slag, var det til stor sorg for belejreren Maracellus, at Archimedes ved at uheld blev dræbt – man kendte hans geni og der var givet ordre til, at han skulle skånes [Jørgensen, 2000].

Archimedes' værker

Hvor Euklid primært fremsatte tidligere matematikeres sætninger og forbedrede den formelle præsentation, var Archimedes en skabende matematiker, der kom med nye sætninger. Af hans publicerede værker er følgende overleveret:

- ”*Om plane figurers ligevægt, I, II*”
- ”*Parablens kvadratur*”
- ”*Om kuglen og cylinderen, I, II*”
- ”*Om spiraler*”
- ”*Om konoider og sfæroider*”
- ”*Om flydende legemer, I, II*”
- ”*Cirklens udmåling*”
- ”*Arenarius (om at tælle sandkorn)*”

Dertil kommer naturligvis ”*Metoden*”, og derudover er der i de græske tekster referencer til adskillige værker, der ikke eksisterer længere.

Der er stadig debat om kronologien i Archimedes' værker, som bestemmes ud fra hans egne introduktioner samt udviklingen i den matematiske bevisførelse. Hvad, der er vigtigt i denne sammenhæng, er, at man med sikkerhed kan sige, at han publicerede

”*Parablens kvadratur*” før han skrev ”*Metoden*”, da dette klart fremgår af hans egen introduktion til ”*Metoden*” [Knorr, 1978].

Parablens kvadratur

I værket ”*Parablens kvadratur*” gives der to beviser for sætningen:

”*Every segment bounded by a parabola and a chord AB is equal to four-thirds of the triangle which has the same base as the segment and equal height*” [Heath, 1912, s. 251].

Det ene bevis, som står først i værket, bygger på mekaniske argumenter, i lighed med dem han anvender i ”*Metoden*” blot holdt i endelig form. Den mekaniske tilgang vil blive beskrevet mere indgående i afsnittet om ”*Metoden*”. Det næste bevis er rent geometrisk, hvilket er det, der præsenteres her. Hele værket består af 24 sætninger, hvoraf de første 17 giver det bevis, der bygger på mekaniske metoder, mens de resterende 7 sætninger (sætning 18-24) giver det rent geometriske bevis. Præsentationen af det geometriske bevis er overvejende gennemført i moderne notation, da det er de overordnede principper, der er væsentlige i denne sammenhæng.

Det skal her nævnes, at forskerne ikke er enige om, hvorvidt Archimedes betragtede de mekanisk funderede sætninger i ”*Parablens kvadratur*” som et egentligt bevis. Dette skyldes Archimedes’ eget ordvalg i forordet, hvor han siger:

”*… I have written out the proof and I send it to you, first as investigated by means of mechanics, and afterwards too as demonstrated by geometry.*” [Heath, 1912, s. 234].

Det ses, at der i ovenstående citat ligger en mulighed for at fortolke det mekaniske bevis som umatematisk eller udforskende. Dette vil blive diskuteret mere indgående i forbindelse med ”*Metoden*”.

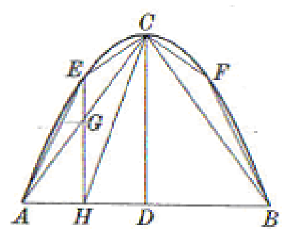
Bevis for sætningen om parablens kvadratur

Denne gennemgang af beviset for parablens kvadratur bygger, dels på Dijksterhuis [Dijksterhuis, 1953], dels på Heaths bog om Archimedes [Heath, 1912].

På figur 5.1 ses et parabelstykke *ACB* med toppunkt i *C* og med korden *AB* som grundlinje. Man danner nu trekanten *ABC*. I det følgende vil en trekant blive betegnet med symbolet Δ, hvilket betyder, at trekanten *ABC* betegnes Δ*ABC*. Man deler nu Δ*ABC* i de lige store trekanter Δ*ADC* og Δ*BDC* ved hjælp af midtnormalen *CD*. Herefter betegner man midtpunktet af linjestykket *AD* med *H*, og konstruerer midtnormalen *HE*, der er parallel med *CD*. Nu anvendes en elementær sætning fra keglesnitslæren, der siger, at $EG = 1/2\,GH$, hvorved man får følgende relation:

$$\Delta AEC = 1/2\,\Delta AHC = 1/8\,\Delta ABC \tag{5.1}$$

hvor det første lighedstegn gælder, fordi $EG = 1/2\,GH$, hvorved ΔAEG:ΔAGH =1:2 og ΔGEC:ΔHGC = 1:2, hvilket giver at ΔAEC:ΔAHC = 1:2. Det næste lighedstegn gælder, idet ΔABC netop består af fire trekanter med samme højder og grundlinjer, der alle har samme areal som ΔAHC.



Figur 5.1 *ACB* er et parabelstykke med grundlinje *AB* og akse *CD*. Linjen *EGH* parallel med *CD* skærer *AC* i dennes midtpunkt, *G* [Dijksterhuis, 1953, s.16]

Relation (5.1) giver nu, at

$$\Delta AEC + \Delta BFC = 1/4\,\Delta ABC \tag{5.2}$$

Dette følger oplagt af, at ΔAEC og ΔBFC er hinandens spejlbilleder.

Fortsætter man denne halvering af parablens grundlinje *AB* med midtnormaler, der skærer parabelstykket, og den tilhørende udfyldning af parabelstykket med trekanter, dvs. konstruktionen af den indskrevne polygon, opnås nedenstående følge af arealer, som sidetallet af den indskrevne polygon vokser:

$$\Delta ABC,\ 1/4\,\Delta ABC,\ 1/4^2\,\Delta ABC, \ldots \tag{5.3}$$

Denne følge, kan i den almene sprogbrug for talfølger, betegnes $a_1, a_2, a_3, \ldots$, og det er nu åbenlyst, at afsnitssummen $S_n = \Delta ABC + 1/4\,\Delta ABC + \ldots + 1/4^n\,\Delta ABC < \Sigma$, hvor Σ betegner parabelstykket. Det vises, at differensen mellem afsnitssummen, S_n, og parabelstykket, Σ, kan gøres vilkårligt lille. Først skal man dog angive den størrelse *K*, der skal anvendes til indirekte, ved et dobbeltmodstridsbevis, at vise at $\Sigma = K$.

Archimedes viser, at *K* kan skrives som:

$$\Delta ABC + 1/4\,\Delta ABC + \ldots + 1/4^n\,\Delta ABC + 1/3 \cdot 1/4^n\,\Delta ABC = 4/3\,\Delta ABC = K \tag{5.4}$$

Hvorefter man ved dobbeltmodstridsbeviset får det ønskede, nemlig at Σ = *K*. Archimedes finder udtryk (5.4) ved at vise, at følgende sætning gælder (sætning 23 i "*Parablens kvadratur*"):

"*Given a series of areas A, B, C, D, … Z of which A is the greatest, and each is equal to four times the next in order, then A + B + C + … + Z + 1/3 Z = 4/3 A*" [Heath, 1912, s. 249].

Denne sætning vises på følgende måde. Tag arealer *b*, *c*, *d*, … således at *b* = 1/3 *B*, *c* = 1/3 *C*, *d* = 1/3 *D*, osv. Eftersom *b* = 1/3 *B* og *B* = 1/4 *A* fås, at *B* + *b* = 1/3 *A*, og på samme måde indses det, at *C* + *c* = 1/3 *B*, osv.

Ved denne betragtning følger, at

$$B + C + D + ... + Z + b + c + d + ... + z = 1/3(A + B + C + ... + Y) \tag{5.5}$$

men da

$$b + c + d + ... + y = 1/3(B + C + D + ... + Y) \tag{5.6}$$

Ses det, at hvis man trækker (5.5) fra (5.6), opnår man

$$\begin{aligned} &B + C + ... + Z + z = 1/3\,A \Leftrightarrow \\ &A + B + C + ... + Z + 1/3\,Z = 4/3\,A \end{aligned} \tag{5.7}$$

hvormed sætningen er bevist. Det udtryk, som Archimedes hermed har bevist, er ækvivalent med følgende algebraiske udtryk i moderne notation:

$$1 + 1/4 + (1/4)^2 + ... + (1/4)^{n-1} = 4/3 - 1/3(1/4)^{n-1} = \frac{1-(1/4)^n}{1-1/4} \tag{5.8}$$

Denne sætning fra parablens kvadratur er, som nævnt tidligere, det eneste eksempel på en direkte opskrivning af en kvotientrække (i endelig form) i de gamle græske tekster.

Nu er det kun dobbeltmodstridsbeviset, der mangler. Dette gives som sætning 24 i "*Parablens kvadratur*", som er citeret i ovenstående. Det antages i henhold til figur 5.1, at *K* = 4/3Δ*ABC*. Det skal nu på sædvanlig vis (ved dobbeltmodstridsbevis) vises, at parabelstykket er lig *K*. Hvis parabelstykket ikke er lig *K*, må det enten være mindre (I) eller større (II).

I. Først antages det, at parabelstykket er mindre end *K*. Hvis man anvender sætning 23, ses det, at hvis *X* er det sidste led i følgen, og hvis man vælger *X*, så det er mindre end differensen mellem parabelstykket og *K*, da har man:

$$A + B + C + ... + X + 1/3\,X = 4/3\,A = K \tag{5.9}$$

Nu ses det, at eftersom *K* overstiger $A + B + C + \ldots + X$ med et areal, der er mindre end *X*, og *K* ligeledes overstiger arealet af parabelstykket med et areal, der er større end *X*, følger det at:

$$A + B + C + ... + X > \Sigma \tag{5.10}$$

hvorved den søgte modstrid opstår, idet afsnitssummen S_n defineret i ovenstående, netop er $A + B + C + \ldots + X$, som er mindre end parabelstykket, Σ.

II. Nu antages det, at parabelstykket er større end *K*. Det vises nu, at forskellen mellem den indskrevne polygon, hvis konstruktion fremgår af det ovenstående, og parabelstykket kan gøres mindre end forskellen mellem *K* og parabelstykket. Dette betyder, at polygonen må værre større end *K*, hvorved den søgte modstrid opstår, da Archimedes i sætning 23 har vist, at

$$A + B + C + ... + Z < 4/3\,A,\ hvor\ A = \Delta ABC \tag{5.11}$$

Derfor kan parabelstykket ikke være større end *K*.

Det er nu vist, at parabelstykket, Σ, hverken er større eller mindre end *K*, hvorved sætningen er bevist.

Kommentar

Det bemærkes, at der ikke gøres rede for, at kvotientrækken har en grænseværdi for *n* gående mod uendelig. Det er heller ikke nødvendigt for beviset, men det er f.eks. et sted, hvor indførelsen af uendelighed kunne have generaliseret udtrykket samt gjort beviset lettere. Det ville, hvis kvotientrækkens grænseværdi for *n* gående mod uendelig var blevet fastlagt, ikke have været nødvendigt med dobbeltmodstridsbeviset, idet grænseværdien for kvotientrækken netop giver arealet af parabelstykket. Udviklingen af et grænseværdibegreb ville have været et stort skridt på vej mod en mere generel teori.

"Metoden"

"*Metoden*" blev, som tidligere nævnt, fundet af den danske filolog Heiberg i 1906 på en palimpsest[11] på et bibliotek i Konstantinopel. Heiberg arbejdede med palimpsesten i 1906 og 1908, hvor han nedskrev og tog fotografier af værket. Herefter forsvandt manuskriptet. Det var først, da det dukkede op igen i 1998 på Christies' auktionshus i New York, hvor det blev solgt for $ 2 millioner, at forskere blev klar over, at det dyrebare manuskript stadig fandtes. Den nye ejer har tilladt forskere at arbejde med manuskriptet, men det er nu i væsentlig dårligere stand, end da Heiberg studerede værket. Allerede dengang manglede mange passager (ca. 20 %) pga. genanvendelsesprocessen og tidens tand. På trods af den dårlige stand bringer anvendelsen af moderne teknikker i læsningen af palimpsesten nye resultater [Netz et al., 2001].

"*Metoden*" er skrevet som et brev til Eratosthenes i håbet om, at Archimedes ved at beskrive sin metode for Eratosthenes, kan hjælpe ham og fremtidige generationer med at gøre matematiske opdagelser. Med hans egne ord:

"*… I am convinced that it will prove very useful for mathematics; in fact, I presume there will be some among the present as well as future generations who by means of the method here explained will be enabled to find other theorems which have not yet fallen to our share.*" [Dijksterhuis, 1956, s. 315].

Archimedes siger også i indledningen til manuskriptet, at det er en metode til at opdage sætninger, men at metoden *ikke* giver de endelige matematiske beviser; dog bliver bevisførelsen nemmere, når resultatet er gået op for en ved hjælp af hans metode. Igen med Archimedes' ord:

"*… a certain special method, by means of which you will be enabled to recognize certain mathematical questions with the aid of mechanics. I am convinced that this is no less useful for finding the proofs of these same theorems. For some things, which first became clear to me by the mechanical method, were afterwards proved geometrically, because their investigation by the said method does not furnish an actual demonstration. For it is easier to supply the proof when we have previously acquired, by the method, some knowledge of the questions than it is to find it without any previous knowledge.*" [Dijksterhuis 1956, s. 314].

Den metode, som Archimedes beskriver for Eratosthenes, er overordnet kendetegnet ved, at der anvendes to forskellige principper:

[11] En palimpsest er et manuskript, der er blevet skrevet på mere end en gang. I dette tilfælde er en kopi fra det 10. århundrede af nogle af Archimedes' skrifter blevet genbrugt i det 13. århundrede til at nedskrive en græsk bønnebog.

1) For det første anvendes en mekanisk metode, nemlig vægtstangsprincippet, hvor to geometriske figurer ses som hængt op i hver deres ende af en vægtstang på en sådan måde, at figurerne er i ligevægt. Herved er forholdet mellem arealerne omvendt proportionalt med forholdet mellem afstandene til ligevægtspunktet på vægtstangen.
2) For det andet baserer Archimedes' metode sig på, at arealet af en plan figur kan ses som summen af alle parallelle linjestykker i den. Herved ses den plane figur som bestående af 'alle de parallelle linjestykker'. Dette udvides til overflader, der ses som bestående af summen af de parallelle tværsnit, et plan kan skære overfladen med. Ydermere udvides det til voluminer, som ifølge dette princip ses som bestående af parallelle planer. Kort sammenfattet kan man sige, at for $n \leq 3$, ses en n dimensional figur som bestående af en uendelig sum af n-1 dimensionale figurer.

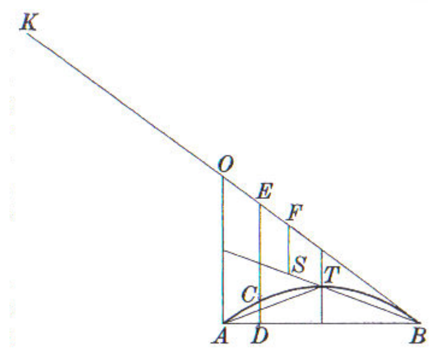
De forskellige moderne fortolkere af Archimedes er enige om denne overordnede inddeling, som Dijksterhuis benævner hhv. tyngdepunktsmetoden (the 'barycentric method') og udelelighedsmetoden (the 'method of indivisibles') [Dijksterhuis, 1956]. Det, man ikke er enige om, er, på hvilket grundlag Archimedes afviser, at metoden udgør et rigtigt matematisk bevis. Det kan enten være på grund af tyngdepunktsmetoden eller udelelighedsmetoden eller begge. I det følgende beskrives, dels Dijksterhuis' argumenter for, at det er udelelighedsmetoden, Archimedes ikke anerkender, dels Knorrs argumenter for at det er tyngdepunktsmetoden, der ikke kan siges at være stringent. Denne diskussion kan føres tilbage til diskussionen om de græske matematikeres forhold til matematisk uendelighed. Her ligger der i Knorrs fortolkning, hvilket også kort er beskrevet i kapitel 3, en generel accept af matematisk uendelighed i dette tilfælde de udelelige, mens der i Dijksterhuis fortolkning ligger en klar afvisning af dette. Inden denne diskussion tages op, gennemgås parablens kvadratur i den version, der er givet i "*Metoden*".

Parablens kvadratur i "*Metoden*"

Parablens kvadratur er den første sætning, der fremstilles i "*Metoden*", og det er også det simpleste eksempel på, hvad Archimedes' metode går ud på. Der er alt i alt bevaret 15 sætninger i "*Metoden*", som formentligt har været betydeligt længere [Heath, 1912]. Det er disse sætninger, Archimedes viser ved hjælp af sin udforskende metode, der i Dijksterhuis' terminologi opdeles i tyngdepunktsmetoden og udelelighedsmetoden. Blandt 'beviserne' findes der et eksempel, hvor det udelukkende er tyngdepunktsmetoden, der er anvendt, nemlig sætning 15, som dog kun er fragmentarisk bevaret. Der findes også et eksempel, hvor det kun er udelelighedsmetoden, der anvendes i 'beviset', nemlig sætning 14, og det er netop denne sætning, der er vist rent mekanisk i sætning 15. I sætning 1, som er parablens kvadratur, anvendes både mekaniske og udelelighedsargumenter. Dette 'bevis' er fremstillet i det følgende.

"Parablens kvadratur" som vist i "Metoden"

Her er parablens kvadratur, sætning 1 i "*Metoden*", gennemgået på baggrund af Dijksterhuis' [Dijksterhuis, 1953] mere moderne beskrivelse, og den originale version, som den er oversat til engelsk af Heath [Heath, 1912].



Figur 5.2. *ATB* er et parabelstykke med toppunktet *T*. *OB* tangerer parablen i B. KOB er en ligearmet vægtstang med understøtningspunkt i *O*. Parabelstykket ophængt i *K* er i ligevægt med ΔOAB ophængt som vist på figuren [Dijksterhuis, 1953, s.21].

Lad *ATB* være det parabelstykke, der er afskåret med linjestykket *AB*, og som har toppunkt i *T*. Dette er vist i figur 5.2. Nu konstrueres den tangent til parablen, der rører parablen i punktet *B*, og tangenten forlænges til punktet *K*. Desuden konstrueres ordinaterne *AO* og *DE*. Ordinaten *AO* rammer tangenten i *O*, som udgør midtpunktet for linjen *BK*, hvilket betyder, at $OK = OB$. Herefter anvendes en elementær sætning fra den antikke keglesnitslære, som fastslår, at:

$CD:ED = AD:AB$, hvilket også giver, at $CD:ED = OE:OB$, og da $OK = OB$, kan forholdet også skrives som $CD:ED = OE:OK$. Denne relation gælder for en vilkårlig ordinat.

Forestiller man sig nu, at det vilkårligt valgte linjestykket *CD* forskydes til vægtstangens ene endepunkt, *K*, så er linjestykket *CD* i ligevægt med linjestykket *ED*, når *ED* ophænges i *E*. Gør man det samme for 'alle ordinaterne' i parabelstykket, så balancerer parabelstykket, når det er ophængt i *K* med ΔBOA. Ligevægtspunktet for ΔBOA ligger i *S*, medianernes skæringspunkt, der er vist på figur 5.2, hvilket betyder, at man kan se trekanten som ophængt i *F*, idet $OF = 1/3\ OB$. Da $OK = 3\ OF$, følger det af vægtstangssætningen, at parabelstykket = $1/3\,\Delta BOA = 4/3\,\Delta TAB$, hvorved parablens kvadratur er fundet.

Kommentarer til den anvendte metode

Det er udtryk som 'alle ordinaterne', der meget tydeligt adskiller udforskningen af parablens kvadratur i "*Metoden*" fra beviserne i værket "*Parablens kvadratur*". Det er i den moderne fremstilling at udtrykket 'alle ordinaterne' optræder. Ser man på Heaths oversættelse, er det tilsvarende i Archimedes' ord udtrykt i følgende citat, hvor symbolerne er skiftet ud, så de passer til figur 5.2:

"*And, since the triangle BOA is made up of **all the parallel lines like ED**, and the segment TAB is made up of **all the straight lines like CD** within the curve, it follows that the triangle, placed where it is in the figure, is in equilibrium about O with the segment TAB placed with its centre of gravity at K.*" [Heath, 1912, s. 17].

Archimedes anvender udtrykkene "*made up of all the parallel lines*" og "*made up of all the straight lines*". Det er disse udtryk, der illustrerer, hvad der menes med udelelighedsmetoden. De 2-dimensionale figurer ses som bestående af alle de tilhørende 1-dimensionale figurer, hvilket kan forstås som den uendelige sum af udelelige linjestykker, der skal til for at fylde figurerne ud. I det konkrete tilfælde ses parabelstykket (2D) f.eks. som bestående af alle de parallelle ordinater ($2D = \sum 1D$).

Den mekaniske metode eller tyngdepunktsmetoden består i anvendelsen af vægtstangen, der i figur 5.2 er linjestykket *KB*. I dette simple tilfælde er det en ligearmet vægtstang, der understøttes i punktet *O*. Og det er både de udelelige linjestykker og de plane figurer, der hænges op på vægtstangen, hvorved forholdet mellem de geometriske objekter kan bestemmes.

I de resterende sætninger i "*Metoden*", hvor Archimedes viser sin udforskende metode, er det mere komplicerede geometriske figurer, der undersøges. Der er også forskellige variationer af, hvordan de to principielle metoder, tyngdepunktsmetoden og udelelighedsmetoden, anvendes. Der findes, som nævnt, sætninger, hvor det udelukkende er tyngdepunktsmetoden, der er i spil, og der findes også et enkelt eksempel, hvor det kun er udelelighedsmetoden, der anvendes (sætning 14). Dette er endnu en af grundene til, at forskerne ikke er enige om, hvorvidt det er tyngdepunktsmetoden, udelelighedsmetoden eller begge Archimedes afviser, som værende stringente eller rigtige matematiske beviser. I det følgende gives nogle af de argumenter, forskerne anvender til at vurdere, hvordan Archimedes selv betragtede den matematiske stringens af sine metoder.

Moderne fortolkere af Archimedes

Anvendelserne af Archimedes' metode der, som nævnt, overordnet består af to principper, er ifølge hans egen indledning til værket ikke at betragte som rigtige matematiske beviser. Grunden til dette er ikke entydig, da hans egne ord kan fortolkes på flere måder. I det følgende præsenteres de to primære synspunkter i den sag. Det ene synspunkt er her præsenteret med Dijksterhuis, der mener, at det er udelelighedsmetoden, som Archimedes ikke selv finder stringent, mens det andet synspunkt går på, at det er tyngdepunktsmetoden Archimedes ikke selv accepterer. Denne fortolkning er her præsenteret med Knorrs analyser. Derudover gengives nogle af de nye resultater forskerne Netz, Saito og Tchernetska har publiceret i 2001 i forbindelse med nylæsningen af "*Metoden*" med moderne teknikker [Netz et al., 2001]. De har i deres publikation undersøgt sætning 14 fra "*Metoden*", der er den sætning, som udelukkende fastslås ved hjælp af udelelighedsmetoden.

Dijksterhuis' fortolkning

Dijksterhuis er, som sagt, en af de forskere, der mener, at Archimedes afviser bevisførelsen i "*Metoden*", på grund af anvendelsen af udelelige. Denne fortolkning har han blandt andet fremført i artiklen "*Die Integrationsmethoden von Archimedes*" fra 1953 [Dijksterhuis, 1953]. Dijksterhuis afviser i denne artikel, at det skulle være brugen af mekaniske betragtninger, der er årsagen til, at Archimedes refererer til skriftet som bestående af undersøgelser frem for matematiske beviser.

Et af argumenterne mod Dijksterhuis' opfattelse er, at begreber som vægtstang, ligevægtspunkt osv. for grækerne hører til den empiriske verden, og de opfylder derfor ikke kravene til matematiske objekters ideelle natur, som antikkens matematikere, i hvert tilfælde de der fulgte Platons idelære, hyldede. Dette argument fejer Dijksterhuis væk på baggrund af følgende betragtninger:

1. Archimedes har selv aksiomatiseret vægtstangsprincippet i værket "*Om plane figurers ligevægt, I*", således at sætningerne i dette værk opfylder kravene til den aksiomatisk-deduktive bevisførelse. Vægtstangsprincipperne kan derfor ifølge Dijksterhuis betragtes som en gren af den rene matematik.
2. I værket "*Parablens kvadratur*", som Archimedes selv publicerede og derfor tog videnskabeligt ansvar for, anvender Archimedes vægtstangsprincippet. Dette er endnu et argument, som Dijksterhuis fremfører som et tegn på, at Archimedes ikke anså mekaniske betragtninger som et brud på den matematiske stringens.

De ovenstående argumenter viser ifølge Dijksterhuis, at Archimedes kategorisering af "*Metoden*" som undersøgelser, skal søges et andet sted. Dijksterhuis finder svaret på den manglende matematiske stringens i Archimedes' anvendelse af udelelige, som ikke forekommer i Archimedes' andre værker eller nogen af de andre matematiske værker, vi har fra antikken. Exhaustionsmetodens ræsonnementer er jo netop, som vi har set i det foregående kapitel, en undgåelse af anvendelsen af uendeligt små matematiske størrelser, idet grænseværdien ikke nås. Exhaustionsmetoden kræver blot, at størrelser kan gøres vilkårligt små, mens Archimedes, som det er vist i gennemgangen af parablens kvadratur fra "*Metoden*", anvender, at n dimensionale figurer består af alle de

’udelelige’ *n*-1 figurer. Desuden er Archimedes’ anvendelse af udelelige ikke matematisk velfunderet og faktisk er benævnelsen udelelige en anakronisme. Archimedes introducerer slet ikke et begreb for de udelelige, og det indgår ikke i hans sprog. Der ligger derved ikke en eksplicit begrebsdannelse omkring de udelelige fra Archimedes’ side.

Dijksterhuis støtter ydermere sit synspunkt med Archimedes’ genformulering af exhaustionsprincippet i værket ”*Om kuglen og cylinderen*”. Her gengiver Archimedes exhaustionsprincippet blandt de aksiomer (som det femte), der ligger til grund for bevisførelsen i skriftet. Dette skulle ikke være nødvendigt, da det allerede er bevist i Euklids ”*Elementer*” (X.1). Archimedes giver i ”*Om kuglen og cylinderen*” princippet en anden ordlyd, end det har i ”*Elementerne*”. Dette ser Dijksterhuis som et tegn på, at Archimedes er klar over, at de udelelige ikke er matematisk velfunderede. Archimedes giver aksiomet følgende ordlyd:

”*Further, of unequal lines, unequal surfaces, and unequal solids, the greater exceeds the less by such a magnitude as, when added to itself, can be made to exceed any assigned magnitude among those which are comparable with [it and with] one another*”, [Heath, 1912, s. 4].

Det, Dijksterhuis forholder sig til, er, at Archimedes her har behov for at antage, at exhaustionsprincippet dels gælder, når størrelser trækkes fra hinanden, og dels at denne differens er af samme slags som de størrelser, der trækkes fra hinanden. Dette fortolker Dijksterhuis som en bevidsthed omkring problemerne ved udelelige fra Archimedes’ side, som forgængerne Eudoxos og Euklid ikke har haft. Dijksterhuis mener, at Archimedes har set, at det under antagelsen af udelelige er nødvendigt, at gøre det helt klart, at differencen mellem to størrelser er af samme salgs. Uden denne antagelse ville differensen mellem to plane figurer kunne blive en af ’alle de linjer’ som de plane figurer består af, jævnfør parablens kvadratur i ”*Metoden*”. Derfor er Archimedes’ genformulering ikke blot en gentagelse af Eudoxos’ sætning (sætning X,1 i ”*Elementerne*”) men en formulering, der indeholder nødvendige forudsætninger for gyldigheden af det efterfølgende bevis. Dette begrunder Dijksterhuis yderligere ved at understrege, at det ville være mærkeligt, hvis Archimedes blot skulle have gentaget en fuldstændig kendt og bevist antagelse blandt de andre originale aksiomer, der er listet i ”*Om kuglen og cylinderen*”.

Som kritik af Dijksterhuis’ argumenter kunne man fremføre, at han kun i meget ringe grad forholder sig til, at Archimedes selv kalder de mekaniske beviser for undersøgelser. Dette er netop, hvad Knorr i høj grad anvender i sin argumentation. Man kunne have ønsket, at Dijksterhuis ikke var så skråsikker i sine argumenter for Archimedes’ accept af de mekaniske metoder. Det kunne jo godt være dette både og, som Dijksterhuis selv er inde på: At Archimedes *både* finder at tyngdepunktsmetoden *og* udelelighedsmetoden ligger udenfor den rene matematik.

Knorr

Knorr er, som nævnt, en af tilhængerne af, at Archimedes anerkender brugen af udelelige, som han desuden mener, er en opfindelse, der oprinder fra Archimedes. Han behandler blandt andet denne problemstilling i artiklen ***"****Archimedes and the Elements*" fra 1978 [Knorr, 1978]. Knorr går så vidt som til at sige, at matematisk uendelighed generelt var accepteret af tidens matematikere jævnfør kapitel 3, hvorfor udelelighedsmetoden ikke skulle være et begrebsmæssigt problem for Archimedes. Derfor mener Knorr, at det er vægtstangsprincippet Archimedes ikke anerkender som værende stringent i forbindelse med matematisk bevisførelse.

Generelt finder Knorr sine argumenter i de indledninger, Archimedes selv har skrevet til sine værker. At det ikke er de udelelige, men derimod vægtstangsprincippet, der ifølge Archimedes ikke er matematisk stringent, baseres på følgende argumenter, der kan understøttes af Archimedes' egne ord:

1. Archimedes betragter selv i sin indledning til "*Metoden*" undersøgelserne som værende mekaniske. Desuden anvendes vægtstangsprincippet flere andre steder i Archimedes' skrifter, og her anerkender Archimedes heller ikke umiddelbart de beviser, hvor mekaniske betragtninger anvendes jævnfør "*Parablens kvadratur*", idet den mekaniske del også her kaldes en undersøgelse.
2. Archimedes har i "*Metoden*" ingen kommentarer til de udelelige eller hvordan man summerer disse op.
3. Geometriske beviser kan ifølge Knorr aldrig i den rene matematik blive stringente ved brug af mekaniske betragtninger, da geometriske egenskaber ikke kan sammenlignes med de 'ydre' egenskaber som masse og tyngdepunkt.

I Knorrs egne ord:

"*It is important to recognize that for him what distinguished this technique was not its application of indivisibles, but its mechanical character, as, indeed, his calling it "a certain mechanical method" indicates*". [Knorr, 1978, s. 247]

Knorr understøtter dette med, at Archimedes på intet tidspunkt taler om et mekanisk bevis, men i stedet bruger ord som "*studies*", "*become apparent*" og "*some conviction of the truth*". Hvis problemet lå i de udelelige, ville ordet bevis kunne bruges i forbindelse med de mekaniske sætninger, der vises i "*Parablens kvadratur*", hvor de udelelige er udeladt, og resultaterne udelukkende er baseret på vægtstangsprincippet. At Archimedes på denne måde i sine indledninger aldrig opgraderer de mekaniske undersøgelser til beviser, fortolker Knorr, som en manglende accept af vægtstangsprincippet. Desuden har Archimedes aldrig kommenteret de udelelige, og manglen på matematisk stringens i forhold til disse.

De udelelige har tidligere været introduceret af atomisterne, hvilket kunne have været Archimedes' inspirationskilde. Archimedes refererer til atomisten Demokrit i forordet til "*Metoden*", hvor han nævner, at Demokrit var den første til at fremsætte sætningerne om voluminerne af keglen og pyramiden. De udelelige, som Archimedes anvender, er dog ikke, ifølge Knorr, den form for udelelige, som atomisterne introducerede, et synspunkt flere fortolkere ellers har ytret se f.eks. [Aaboe, 1986]. Derimod henholder Knorr sig til, at Archimedes ikke tidligere har givet udtryk for at kende Demokrit, og at den udelelighedsmetode Archimedes introducerer i "*Metoden*", derfor udvikles før Archimedes får kendskab til Demokrits arbejde.

Knorr ser udelelighedsmetoden som en original ide af Archimedes, som han udviklede til en matematisk metode. Hvorfra, han har fået ideen til udviklingen, kan muligvis findes i hans arbejde med vægtstangsprincippet i "*Om plane figurers ligevægt*", som blev introduceret tidligt i Archimedes' virke. Her kan ideen om de $n-1$ dimensionale figurer komme ud fra Archimedes' arbejde, hvor han f.eks. ved hjælp af exhaustionsmetoden viser, at massemidtpunktet for et parallelogram ligger, hvor diagonalerne mødes. Her er der ikke langt fra at betragte parallelogrammet som bestående af et endeligt antal små parallelogrammer, hvilket er det exhaustionsmetoden tillader, til at se parallelogrammet som bestående af uendeligt mange liniestykker i stedet.

For at argumentere for, at vægtstangsprincippet ikke hører hjemme i den rene matematik, argumenter Knorr således:

"*To cover himself, Archimedes could present the mechanical version in its most rigorous form, avoiding the indivisibles which would be certain to provoke the formalist (Dositheus); but he appended the geometric proof (prop.18-24), thus to assure acceptance of the theorem, even if the mechanical proof of it was rejected.*" [Knorr, 1978, s. 245]

Det ligger i Knorrs fortolkning, at Archimedes, ved at undlade de udelelige i "*Parablens kvadratur*", og ved at medsende et rent geometrisk bevis, søgte en accept af den mekaniske metode som værende matematisk stringent. Her virker det som om Knorr modsiger sig selv og mangler konsistens i argumentationen. Hvis de udelelige skulle være acceptable, hvorfor skulle de så udelades? Hvorfor skulle Archimedes ikke søge accept af både den mekaniske metode og anvendelsen af udelelige? Knorr medgiver nemlig selv, at de udelelige ikke kunne accepteres formelt i tiden matematik. Dette er i kontrast til Knorr synspunkt, der siger, at Archimedes gav de udelelige fuld accept. Desuden kan man stille spørgsmålet, om det er Archimedes eller hans samtidige, der ikke accepterer den mekaniske metode? Hvis han søger accept hos sine samtidige, må man formode, at Archimedes selv har haft tillid til den mekaniske metodes eksakthed, med mindre Archimedes har forsøgt at 'narre' sine samtidige. Med Knorrs begrundelser er det derfor svært at se, at det udelukkende skulle være de mekaniske principper, der udgør et problem. Som hos Dijksterhuis må en kritik være, at det ligeså godt kunne være et både og: Archimedes henvisning til "*Metoden*" som en undersøgelse kunne sagtens *både* bygge på anvendelse af udelelige *og* på anvendelserne af mekaniske principper.

Nylæsningen af "Metoden"

I artiklen "*A New reading of Method Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest (Part 1)*" præsenteres nogle af de resultater, der er fremkommet i forbindelse med nylæsningen af "*Metoden*" med moderne teknikker (UV-lys og digital billedbehandling). De moderne teknikker har gjort, at det nu på nogle steder er muligt at læse lidt mere, end Heiberg i sin tid kunne [Netz et al., 2001].

Det er, som nævnt, sætning 14, der gives en ny oversættelse og fortolkning af. Dette er også en meget interessant sætning fra "*Metoden*", da den er undersøgt helt uden mekaniske argumenter, idet Archimedes her udelukkende anvender principper om udelelige. Formålet med nylæsningen er ikke at give nye fortolkninger af, hvad Archimedes selv så som et stringent bevis, men at give nye beviser på i hvor høj grad Archimedes mestrede de udelelige eller de uendelige mængder af udelelige. De nye resultater kan efter forfatternes mening støtte både Knorrs og Dijksterhuis' fortolkninger, dog er begge fortolkninger ifølge Netz et al. for simple. De nye spor viser en Archimedes med et langt større overblik end tidligere kendt.

I "*Metoden*" lister Archimedes efter indledningen en række hjælpesætninger, der anvendes undervejs, når han demonstrerer sin udforskende metode. Den sidste af disse hjælpesætninger, som Heiberg har kaldt lemma 11, svarer til sætning 1 i "*Om konoider og sfæroider*". Det, nylæsningen bidrager med, er, at Archimedes i sætning 14 i "*Metoden*" viser, at dette lemma, lemma 11, kan udvides til at behandle uendelige mængder. Med uendelige mængder menes de uendelige mængder af n-1 dimensionale figurer, en n dimensional figur i "*Metoden*" siges at bestå af. Den nye læsning viser, at Archimedes i sætning 14 helt har styr på, hvordan forudsætningerne for lemmaet i det konkrete tilfælde skal opfyldes, når mængderne er uendelige. Sætningen er i "*Om konoider og sfæroider*" bevist for endelige mængder.

I værket "*Om konoider og sfæroider*" er sætningen i Heaths udgave formuleret således [Heath, 1912]:

"*If $A_1, B_1, C_1, \ldots K_1$ and $A_2, B_2, C_2, \ldots K_2$ be two series of magnitudes such that*

$$A_1:B_1 = A_2:B_2,$$
$$B_1:C_1 = B_2:C_2, \text{ and so on}$$

and if *$A_3, B_3, C_3, \ldots K_3$ and $A_4, B_4, C_4, \ldots K_4$ be two other series such that*

$$A_1:A_3 = A_2:A_4,$$
$$B_1:B_3 = B_2:B_4, \text{ and so on}$$

then $(A_1 + B_1 + C_1 + \ldots + K_1):(A_3 + B_3 + C_3 + \ldots + K_3)$
$= (A_2 + B_2 + C_2 + \ldots + K_2):(A_4 + B_4 + C_4 + \ldots + K_4)$

Efter beviset for sætningen gøres det i et korrolar gjort klart, at mængderne med indeks 3 og 4 ikke behøver at være ligeså store som mængderne med indeks 1 og 2; de kan være delmængder. Forholdet mellem summerne af elementerne i mængderne gælder stadig, selvom mængderne med indeks 3 og 4 er delmængder af mængderne med indeks 1 og 2, dog skal antallet af elementer i 3 og 4 være ens.

I den nye læsning formuleres den samme sætning i moderne termer således [Netz et al., 2001, s. 20]:

Givet fire mængder A, B, C og D med elementerne $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$, $(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$ *og* $(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$, *da siger lemmaet, at:*

1. *For hvert k, m har man, at* $a_k:a_m = b_k:b_n$.
2. *Mængderne A og B indeholder lige mange elementer.*
3. *For hvert anvendeligt k, har man, at* $a_k:c_k = b_k:d_k$.
4. *C og D behøver ikke at indeholde ligeså mange elementer som A og B, de kan godt være dannet ud fra delmængder af A og B. C og D skal være ens i antal, et antal der svarer til antallet i de eventuelle delmængder.*

Når betingelserne 1-4 er opfyldt, da opfylder summen af mængdernes elementer følgende relation:

$$\sum a : \sum c = \sum b : \sum d$$

Denne sætning er, som nævnt, bevist i "*Om konoider og sfæroider*" for det endelige tilfælde, altså hvor *A*, *B*, *C* og *D* indeholder et endeligt antal elementer.

Hvis sætning 14 i "*Metoden*" inddeles i de enkelte argumentationstrin, kan den ifølge Netz et al., inddeles i 29 trin. I Heibergs udgave mangler trin 17-23, hvor trin 17-18 er nemme at gætte, mens der i de resterende trin mangler væsentlige oplysninger, som nu er genskabt med anvendelsen af moderne teknologi. Hvor den traditionelle læsning blot gengiver de manglende trin som en varsom overgang til nogle forhold mellem størrelser, der er vist tidligere, giver den nye læsning mere detaljerede oplysninger. Her læser man, at Archimedes nøje viser, at forudsætningerne for sætning 1 fra ”*Om konoider og sfæroider*” er opfyldt, men nu i det uendelige tilfælde. De fire forudsætninger givet ovenfor vises trin for trin, idet *A* består af 2 dimensionale figurer, *B* består af 1 dimensionale figurer, *C* består af 2 dimensionale figurer og *D* består af 1 dimensionale figurer:

1. I trin 14 vises forudsætning 3. Dette betyder, at elementerne i *C* og *D* dannes led for led fra mængderne *A* og *B* ud fra forhold, $a_k{:}c_k = b_k{:}d_k$.
2. I trin 19-20 vises forudsætning 1. Det vises, at for hvert par af elementer i *A* og *B*, gælder følgende forhold $a_k{:}a_m = b_k{:}b_m$.
3. I trin 21 vises forudsætning 2. Mængderne *A* og *B* har samme antal elementer. I den nye læsning ses det, at Archimedes direkte anvender, at de er ”*equal in multitude*”.
4. I trin 22-23 vises forudsætning 4. *C* og *D* er mængder med samme antal elementer. Igen siger Archimedes direkte, at de er ”*equal in multitude*”.

Herefter anvendes lemma 11 i trin 24, som giver et forhold mellem de uendelige summer af elementer i de fire mængder.

Det, nylæsningen giver, er, dels at Archimedes nøje viser, hvorledes de fire forudsætninger for anvendelsen af lemma 11 er opfyldt i det uendelige tilfælde, dels at han direkte henviser til mængdernes størrelse. Det skal her nævnes, at Archimedes i det konkrete tilfælde, danner mængderne, så de *n*-1 dimensionale mængder (linjer i dette tilfælde) f.eks. har en fælles grundlinje. Sagt med udelelige, kan de udelelige linjer, hvis man forestiller sig, at summen af dem giver samme grundlinje, siges at være af samme antal. Netz et al. siger:

”*Here actual infinities are manipulated in specific ways, suggesting a degree of comfort which is quite surprising. …We have here infinitely many objects – having definite, and different multitudes (i.e., they nearly have number); such multitudes are manipulated in a concrete way, apparently by something rather like a one-to-one correspondence”* [Netz et al., 2001, s.25]

Forfatterne nævner, at den generelle holdning til grækernes forhold til det uendelige, er stærkt påvirket af Aristoteles' syn, hvor det aktuelt uendelige er bandlyst. Her ses det, at Archimedes ligefrem jonglerer med aktuelt uendelige mængder, og han forholder sig til, om de kan siges at være lige store i antal. Netz et al. mener, at Archimedes fortjener en større plads i matematikhistorien i forbindelse med udviklingen af analysen på baggrund af deres genlæsning. Godt nok havde matematikerne ikke Archimedes' metode i 1600-tallet, hvor udviklingen af analysen tager fart, men de genopfinder Archimedes' metoder. De indfører i 1600-tallet de udelelige som et begreb, men selve metoderne ligger ikke langt fra Archimedes'. Netz et al. mener også, at Archimedes fortjener en større plads i matematikhistorien omkring matematisk uendelighed, som han i deres nylæsning demonstrerer stor sikkerhed omkring. De siger ligefrem, at "*Archimedes discusses actual infinities almost as if they possessed numbers in the usual sense*" [Netz et al., 2001, s.26].

I forbindelse med diskussionen af, hvad Archimedes ikke finder matematisk stringent i metoden (vægtstangsprincipperne eller de udelelige), giver nylæsningen en fortolkning, der ikke udelukker hverken Knorrs eller Dijksterhuis', men siger, at begge er for simple. Ifølge Netz et al. er de geometriske beviser udelukkende opgraderinger af udelelighedsbeviser under anvendelse af exhaustionsmetoden. Både de geometriske beviser og beviser med udelelige er meget forskellige fra de meget mere komplicerede mekaniske beviser. Derfor foreslår forfatterne, at Archimedes eventuelt først fik sine ideer ud fra betragtninger omkring udelelige, derefter transformerede han resultaterne til et geometrisk bevis, og uafhængigt af dette fandt han på et mekanisk bevis.

Konklusion

Archimedes' egen afvisning af beviserne i "Metoden" som værende acceptable matematiske beviser kan, som vi har set i det ovenstående, skyldes anvendelsen af mekaniske principper eller brugen af udelelige eller begge. De to principper kan være særdeles svære at adskille, og det har krævet indførelsen af et begreb, nemlig de udelelige, som Archimedes ikke selv anvender, for at gennemføre denne opdeling. Både Knorrs og Dijksterhuis' argumenter er besnærende, men det virker nærmere som om man skal finde svaret i et både og. Dette synspunkt støttes også til dels af den nye læsning af "*Metoden*", hvor Netz et al. finder de to fløje for ensidige i deres argumenter. Godt nok kommer de med en version, der siger, at den mekaniske metode kan ses som værende uafhængig af de udelelige, men de er forsigtige med denne konklusion.

Der er i hvert tilfælde ingen tvivl om, at anvendelsen af udelelige er noget helt nyt i "*Metoden*", som ikke optræder i nogen af Archimedes' andre værker, mens mekaniske principper, som det er vist, f.eks. optræder i "*Parablens kvadratur*", som er et matematisk værk. Desuden har Archimedes aksiomatiseret vægtstangsprincippet i "*Om plane figurers ligevægt*". Det, at Archimedes ikke har et begreb for de udelelige, er ud fra vores synspunkt meget centralt, da det nærmest er umuligt at tale om noget, der ikke kan udtrykkes i ord. Hos Archimedes indgår de udelelige kun indirekte i sætninger som "*made up of all the parallel lines*". En systematisk redegørelse og et forsøg på at legitimere udelelige i matematikken optræder først med Cavalieris udgivelse af ”*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*” i 1635 [Pedersen, 1980]. Nogle af Cavalieris forgængere, f.eks. Kepler, havde dog en intuitiv anvendelse af udelelige i tråd med Archimedes’, selvom de ikke kendte hans værk ”*Metoden*” [Boyer, IV, 1959]. Indførelsen af de udelelige som et begreb vil blive behandlet mere indgående i det efterfølgende kapitel.

Den fortolkning, at de udelelige skulle være et koncept Archimedes har adopteret fra atomisterne, virker ikke særlig overbevisende. Knorrs argumenter omkring Archimedes’ ringe kendskab til Demokrits arbejde virker fornuftige. Archimedes udtrykker ikke et tilhørsforhold til atomisterne, og siger endda, at Demokrit sikkert skal anerkendes for fremførelsen af nogle sætninger, men der er ingen før Eudoxos, der har bevist dem. Dette vidner ikke om nogen særlig respekt for Demokrits arbejde. Desuden kan man påpege det mærkelige i, at Archimedes ikke benævner de udelelige, hvis han skulle være påvirket af atomisterne, som besidder et begreb - atomet.

Det virker mere oplagt, som Knorrs også konkluderer, at Archimedes selv er opfinderen bag en unik anvendelse af udelelige, som ikke kan findes hos hans forgængere. Der er naturligvis andre grækere før Archimedes, der er inde på tanken, f.eks. Demokrit og Antifon, men der er ikke nogen beviser på, at de direkte skulle have introduceret begrebet i geometrien. Det er dog tankevækkende, at udeleligheden af geometriske størrelser har været diskuteret i filosofien. Dette kan bedst illustreres med Aristoteles’ opfattelse af kontinuumet, som netop ikke består af udelelige, men er uendeligt deleligt. Her kunne man være fristet til at konkludere, at Archimedes undgår en benævnelse, fordi han ikke vil komme i problemer i forhold til den gængse opfattelse. Dette kunne også være en af grundene til, at Archimedes metoder ikke bliver videreudviklet i antikken, men faktisk først bliver genoptaget i 1600-tallet, hvor det sker som en nyopdagelse, da de ikke havde ”*Metoden*” til deres rådighed. På dette tidspunkt er der også stor polemik om emnet, hvilket ikke kan undre, da Aristoteles’ filosofi havde stor indflydelse i hvert tilfælde i renæssancen, som er den periode, hvor der er skrevet flest kommentarer til hans filosofiske værker [Den Store Danske Encyklopædi, 2000].

Udover Archimedes’ manglende begrebsdannelse omkring udelelige, der ville være i modstrid med Aristoteles’ opfattelse af det geometriske kontinuum, ligger der også en diskussion om anvendelsen af aktuel uendelighed. Nylæsningen af ”*Metoden*” viser en Archimedes der, efter Netz et al.’s mening, jonglerer med uendelige mængder, næsten som havde de et helt almindeligt tal. Den sikkerhed omkring, hvad der kan lade sig gøre, når f.eks. to planer, der består af ’alle linjerne’ sammenlignes og siges at udgøres af samme antal linjer, viser en mand, der må have overvejet, hvad man skulle forstå ved ’alle linjerne’, der er ens i antal. Hvis alle linjerne var en slags fysiske atomer, så ville det være en endelig mængde, men hvilken udstrækning skulle de så have? Og ville et plan så ikke netop have de takker, som Demokrit taler om, jævnfør kapitel 2? Det virker som om, Archimedes har betragtet alle linjerne som en aktuelt uendelig mængde, og det kan igen være derfor, han har undgået en direkte omtale, som kunne være imod den gængse afvisning af det aktuelt uendelige repræsenteret ved Aristoteles' filosofi. Det kunne også være, at Archimedes simpelthen har set, at det med hans matematiske redskaber ikke har været muligt at give disse aktuelt uendelige mængder et matematisk stringent grundlag. Dette kunne være en grund til, at han har kaldt undersøgelserne mekaniske, hvilket helt omgår problemerne med udelelige og aktuel uendelighed. Men dette kan så igen give en forklaring på, hvorfor hans metoder ikke adopteres af matematikerne i Alexandria. Måske har de simpelthen ikke forstået, hvad han egentlig gjorde. I forbindelse med det aktuelt uendelige skal vi jo netop også helt op til slutningen af 1800-tallet, før det uendelige, med Cantors transfinitte aritmetik, får regneregler, som kan afklare de paradokser, der ellers kan opstå. Her kan f.eks. henvises til Aristoteles' diskussion af, om et uendeligt tal vil være lige eller ulige jævnfør kapitel 3.

Kapitel 6. På vej mod en generel integralteori

I antikkens Grækenland foretager matematikerne ikke en generalisering af Archimedes' mekaniske metode. Den metode, der stod tilbage for eftertiden indtil fundet af "*Metoden*" i 1906, var exhaustionsmetoden efterfulgt af dobbeltmodstridsbeviset. En af grundene til, at Archimedes' mekaniske metode ikke blev videreudviklet i antikken, er formentlig, at der skete et skift i forhold til, hvilke matematiske problemstillinger, der var i fokus i resten af den hellenistiske periode [Knorr, VIII, 1986]. Dette drejede sig blandt andet om trigonometri og numeriske metoder.

Man var i antikken i stand til at 'integrere' mange kvadratiske flader, men der skete ikke en udvikling, der ledte til en generalisering af teknikkerne i retning mod udviklingen af en decideret integrationsteori. Denne udvikling begynder så småt af tage fart i renæssancen, og kulminerer i slutningen af 1600-tallet med, at Newton og Leibniz uafhængigt af hinanden udvikler integral- og differentialregningen, der dog ikke får et stringent grundlag før i slutningen af 1800-tallet. Inden denne kulmination er der flere forløbere, som i høj grad anvender tilgange, der ligger tæt op ad Archimedes' mekaniske metoder.

En af dem, der igangsætter udviklingen af integralregningen er den italienske matematiker, Cavalieri. I dette kapitel er det specielt Cavalieris arbejde, der er undersøgt som eksempel på de næste skridt på vej mod integralregningen. I denne perspektivering er der valgt at fokusere på Cavalieri, bl.a. fordi hans arbejde i slående grad er i direkte forlængelse af Archimedes' arbejde, på trods af det lange tidsrum mellem disse matematikere på omkring 1900 år [Boyer, IV, 1959]. Desuden indfører Cavalieri de udelelige som et udtalt begreb, hvilket er en klar udvidelse i forhold til Archimedes, som aldrig sprogligt gør rede for disse. Denne begrebsdannelse er formentlig meget central for de nye landvindinger, selvom den samtidig giver problemer i forhold til opretholdelsen af den matematiske stringens, som var et af antikkens fokusområder.

Det er interessant og nærmest profetisk, at Archimedes netop udtaler, at han regner med, at eftertidens matematikere vil opdage mange nye sætninger ved hjælp af hans mekaniske metoder. Som tidligere citeret siger Archimedes:

> "*… I am convinced that it will prove very useful for mathematics; in fact, I presume there will be some among the present as well as future generations who by means of the method here explained will be enabled to find other theorems which have not yet fallen to our share.*", [Dijksterhuis, 1956, s. 315].

Og det er ironisk, at der skulle gå så lang tid.

Kort biografi om Cavalieri

Bonaventura Cavalieri blev født i Milano i 1598, og han døde i Bologna i 1647. Cavalieri blev allerede som dreng optaget i Jesuaterordenen. Det var Kardinalen Borromeo, der opdagede hans talent for matematik og introducerede ham for Galileo, som Cavalieri var stærk inspireret af. På anbefaling af Jesuaterordenen blev Cavalieri i 1926 professor i matematik i Bologna, en stilling han udfyldte til sin død [Lund, 2000].

Cavalieri var en af de mest indflydelsesrige matematikere i sin tid. I forbindelse med udviklingen af analysen er hans mest betydningsfulde bidrag, at han var den første til at indføre udelelige i matematikken på nogenlunde systematisk vis. Dette gjorde han med værket "*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*", som blev udgivet i 1635. Dette værk blev, pga. den uklare og ustringente måde, hvorpå han introducerede de udelelige, stærk kritiseret af flere samtidige matematikere. Han var selv opmærksom på dette, men henviste til, at han regnede med at eftertidens matematikere ville løse problemerne [Stuik, 1967]. Desuden svarede han på angrebene i værket "*Exercitationes geometricae sex*", der blev udgivet i 1647. Begge de nævnte værker blev vidt udbredte blandt 1600-tallets matematikere, og Cavalieris arbejde inspirerede mange til at finde deres egne metoder [Pedersen, 1980].

Cavalieris udelelige

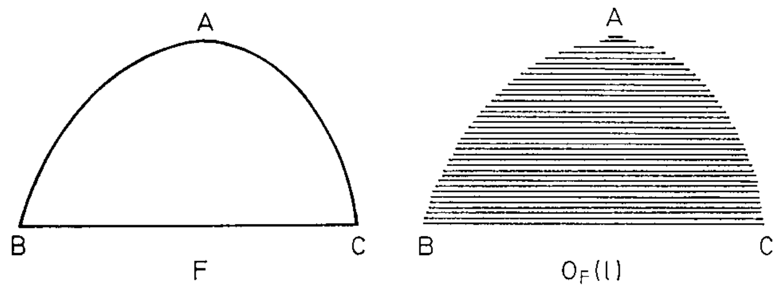
Cavalieri er, som nævnt, den første, der på systematisk vis forsøger at indføre udelelige[12] i matematikken. Han var muligvis inspireret af Kepler, som havde en intuitiv anvendelse af udelelige, dog nægtede Cavalieri selv et sådan slægtskab. Ifølge Boyer [Boyer, 1959] fik Cavalieri sin beskrivelse af de udelelige fra Galileo, som også korresponderede med Kepler, hvorved der kunne være en forbindelse. I forhold til Galileo, hvor anvendelsen af udelelige var til forklaring af fysiske fænomener, var Cavalieris anvendelse af rent geometrisk karakter. Selvom Cavalieri forstod, at antallet af udelelige var ubegrænset eller i uendeligt antal, forfulgte han i modsætning til Galileo[13] ikke dette yderligere.

På figur 6.1 er der vist et eksempel på, hvordan Cavalieri opfattede de udelelige for en plan figur. Cavalieri forklarer de udelelige som 'alle linjerne i den givne figur' ("*Omnes lineae propositae figurae*" [Pedersen, 1980, s. 33]). Dette er, som vist i det foregående kapitel, præcis som Archimedes gør det i "*Metoden*", når han angiver en figur som bestående af alle de parallelle linjestykker. Man kan derfor hævde, at Cavalieri genopdager Archimedes' intuitive forståelse af de udelelige. Til forskel fra Archimedes indfører Cavalieri dog et begreb, idet han kalder alle linjerne i figuren for figurens

[12] På engelsk: 'indivisibles'; på dansk også oversat til 'indivisible størrelser' [Lund, 2000]

[13] Galileo viste en klar interesse for spørgsmålet om det uendelige, og det kan f.eks. nævnes, at han gjorde rede for, at der er en en-til-en korrespondance mellem de naturlige tal og kvadrattallene.

udelelige. Resultatet af Cavalieris begrebsdannelse er dog stadig, som hos Archimedes, at en *n* dimensional figur består af alle de *n*-1 dimensionale figurer.



Figur 6.1. Cavalieris udelelige illustreret med udelelige linjestykker [Andersen, 1985, s. 301].

Der er også et andet vigtigt punkt, hvor Cavalieris begrebsdannelse går videre end Archimedes'. Cavalieri ser de geometriske figurer som bestående af et ubestemt antal af ækvidistante udelelige, f.eks. linjestykker for en plan figur og planer for en rumlig figur. Man kan sige, at denne udtalelse ligger implicit hos Archimedes, men det er ikke noget, han forholder sig til. Det, at de udelelige er ækvidistante, samtidig med at de ingen udstrækning har, er et klart eksempel på Cavalieris manglende stringens, hvilket han blev angrebet for [Boyer, IV, 1959]. Der kan åbenlyst opstå paradokser, når de udelelige, både ikke har udstrækning, og samtidig er ækvidistante.

Guldin var en af de samtidige matematikere, der kritiserede Cavalieris manglende stringens. F.eks. angreb han Cavalieri for at sammenligne uendelige antal [Boyer, IV, 1959]. For at forsvare sig, sagde Cavalieri, at de udelelige skulle være af samme slags. Dette betyder ifølge Cavalieri, at det ikke er tilladt at sammenligne horisontale tværsnit i figurer, der ikke har samme højde, idet de udelelige derved ikke længere er ækvidistante. Dette kan man kalde et intuitivt argument, men det er stadig ikke stringent, og det flytter bare problemet til spørgsmålet om, hvad ækvidistance betyder. Dette forsøger Cavalieri også at forklare, men hans argumenter er ret naive. Han kommer direkte med argumenter om antallet af udelelige, hvis figurerne ikke har samme højde: Hvis den ene figur har en højde, der indeholder 100 udelelige, så er der måske 200 i højden på den anden. Taleksemplet er et argument, der optræder i "*Exercitationes geometricae sex*", hvor Cavalieri forsvarer sig imod de forskellige angreb [Boyer, IV, 1959]. Denne ret atomistiske forståelse af udelelige, leder også til hans intuitive forklaring, hvor de udelelige på en linie ses som perler på en snor, på en overflade beskrives de som trådene i et vævet stykke stof og i et volumen som bladene i en bog. I forbindelse med summeringen af de udelelige til arealer eller voluminer, var Cavalieri klar over, at der manglede stringens, men han håbede, at dette problem ville blive løst af eftertidens matematikere.[Struik, 1967]

Når geometriske figurer består af udelelige, melder spørgsmål om kontinuitet og kontinuumets opbygning sig. For det første er det, jævnfør kapitel 3, klart, at det er stik imod Aristoteles' opfattelse af disse begreber, hvor selve egenskaben ved det kontinuerte er, at det er uendeligt deleligt, og derfor ikke kan bestå af udelelige. Den fysiske beskrivelse med trådende i et stykke stof og bladene i en bog, er også forklaringer, der ville være meget i modsætning til grækernes præcise definitioner, som de f.eks. ses i ”*Elementerne*”. Desuden kan kontinuumet ifølge Aristoteles ikke bestå af noget, der er af en anden dimension.

Det var også et af samtidens kritikpunkter, at de udelelige er af en anden dimension, end figuren den uendelige sum af udelelige udgør. Dette kan dog med nogen rimelighed siges at løses ved, at de udelelige kun indgår i forhold, hvorfor Cavalieri i princippet ikke behøver at antage, at de har en anden dimension, end det de udgør, hvilket vil illustreres i næste afsnit, [Pedersen, 1980].

Cavalieri betragtede de udelelige som hjælpeværktøjer, og dermed var det efter hans opfattelse ikke nødvendigt at beskæftige sig med, om der var uendeligt mange af dem, og hvad de egentlig var for nogle størrelser, så længe de ikke optrådte i konklusioner. Denne ret afslappede holdning til den matematiske stringens ses tydeligt i følgende citat: ”*Rigor, he said, was the affair of philosophy rather than geometry*” [Boyer, 1959, s. 123]. Der var mange, der så fordelene ved Cavalieris metoder, men den manglende stringens gjorde, at mange ikke ville acceptere hans metoder som andet end indledende undersøgelser.

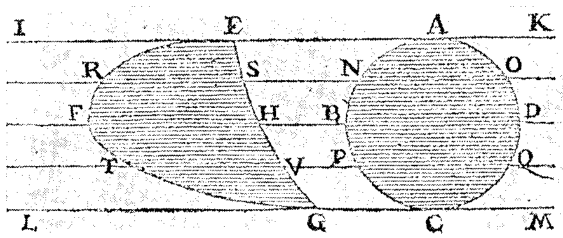
Cavalieris princip

Det er helt klart, at der i Cavalieris udelelige ligger en begyndende begrebsdannelse, som får stor indflydelse på den efterfølgende udvikling af den infinitesimale integralregning. Det er dog ikke de udelelige taget alene, der er interessant for Cavalieris matematiske resultater. Det, Cavalieri ønsker med indførelsen af udelelige, er at udvikle en metode, der kan erstatte den omstændelige exhaustionsmetode, og som er en mere direkte metode [Pedersen, 1980]. Et af Cavalieris interessante resultater er i denne sammenhæng det, der går under Cavalieris sætning eller Cavalieris princip.

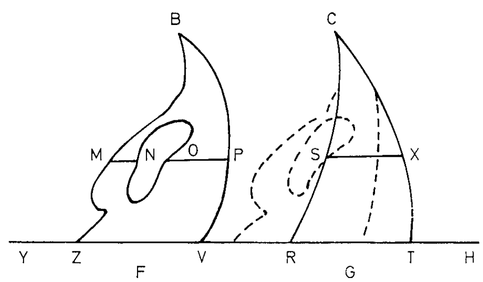
Cavalieris sætning siger,

”*Hvis to massive legemer kan placeres på et vandret bord, så de har den samme højde, og så alle par af tværsnit i legemerne i den samme højde over bordet har det samme areal, da har de to legemer det samme rumfang*” [Den Store Danske Encyklopædi, 2000].

Cavalieris princip er, som det fremgår af ovenstående, en geometrisk metode til at sammenligne voluminer, som naturligvis også kan anvendes til sammenligning af arealer. På figur 6.2 og 6.3 er dette vist med Cavalieris egne illustrationer. Her ses det, at linjen *LGCM* på denne figur, jf. ovenstående formulering, udgør det vandrette bord, og et af de par af tværsnit, der kan sammenlignes, er *FH* og *BD*, som ses at være i samme højde over bordet.



Figur 6.2. Illustration af Cavalieris princip fra "*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*", [Andersen, 1985, s. 349].

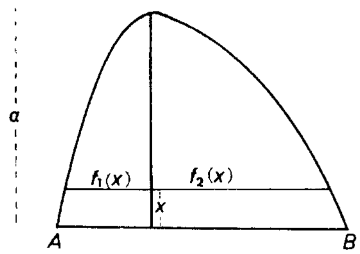


Figur 6.3. Forenkling af illustration af Cavalieris princip fra "*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*", [Andersen, 1985, s. 350].

Cavalieris princip kan naturligvis udvides til at betragte figurer, hvor tværsnittene står i samme forhold. Dette betyder, at tværsnittene ikke behøver at være i forholdet 1:1, men at princippet ligeledes gælder, hvis forholdet på alle steder er det konstante forhold b:c. Dette er, hvad man i moderne undervisningsbøger om rumgeometri finder, under betegnelsen Cavalieris sætning [Boyer, IV, 1959].

På figur 6.4 er der vist et eksempel med plane figurer, hvor forholdet mellem linjestykkerne hele tiden står i samme forhold. Hvis hhv. $f_1(x)$ og $f_2(x)$ på figur 6.4 betegner længden af de linjestykker, der sammenlignes, og F_1 og F_2 betegner de tilsvarende arealer af figurerne forstået som den uendelige sum af parallelle linjestykker, kan princippet i moderne termer formuleres således:

Hvis $f_1(x):f_2(x) = b:c$ for alle positive x mindre end a, da er $F_1:F_2 = b:c$



Figur 6.4. Sammenligning af to plane figurer, hvor alle parallelle tværsnit står i samme forhold [Pedersen, 1980, s. 128].

Der ses her en tydelig analogi med Archimedes' mekaniske metode. Dette kan f.eks. ses i parablens kvadratur i kapitel 5, hvor Archimedes i "*Metoden*" viser, at alle linjestykkerne i parablen står i et bestemt forhold til den indskrevne trekant. Desuden giver nylæsningen af sætning 14 i "*Metoden*" ydermere, at Archimedes, i hvert tilfælde i det konkrete tilfælde, forholder sig til, om de udelelige er i samme antal. Dette er analogt med Cavalieris simple argumenter omkring de udeleliges ækvidistance. Dette skal suppleres med, at Cavalieri ser på figurer af samme højde, hvilket svarer til den måde Archimedes sammenligner figurer på. Cavalieris princip er således helt klart enklere end exhaustionsmetoden og det tilhørende dobbeltmodstridsbevis, men der er ikke særlig stor forskel på Cavalieris princip og Archimedes' betragtninger i "*Metoden*". Som hos Archimedes er det ikke en generel metode, idet den altid vil kræve en geometrisk opfindsomhed i udvælgelsen af figurer, der kan sammenlignes, hvor 'opfindsomheden' i integralregningen ligger i bestemmelsen af stamfunktioner.

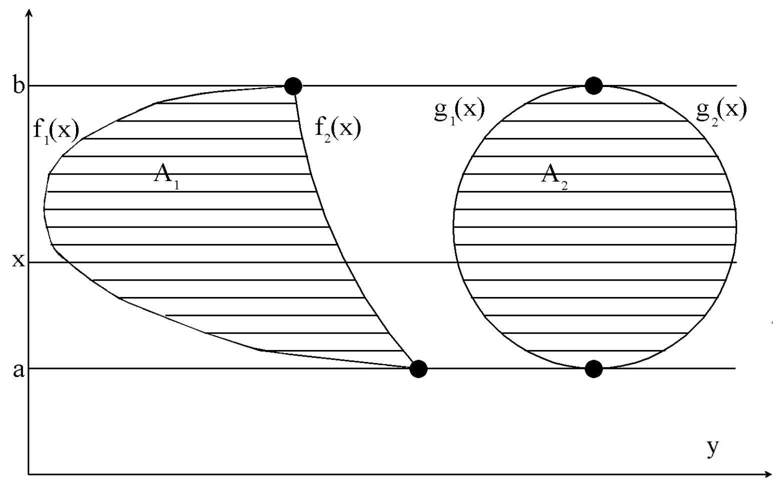
Kritikken i samtiden om, at Cavalieri betragtede sine figurer som bestående af alle de *n*-1 dimensionale figurer, ses dog i nogen grad at reduceres, idet Cavalieri betragter forholdet mellem de udelelige i figurerne. Hvis der betragtes to arealer A og B, og a_n og b_n er længden af de n-te udelelige i arealerne og de udelelige i stedet har tykkelsen Δx, vil følgende forhold kunne opstilles

$$\frac{A}{B} = \frac{\sum a_n \Delta x}{\sum b_n \Delta x} = \frac{\sum a_n}{\sum b_n}, \quad \text{[Pedersen, 1980, s.129]}$$

hvor $\sum a_n \Delta x$ udgør arealet A, og ligeledes for B. Da vil Δx kunne reduceres i udtrykket, hvorved problemet om de udelelige som værende af en anden dimension kan imødekommes.

En moderne fortolkning af Cavalieris princip for arealer kunne være som vist i figur 6.4 og gengivet i f.eks. [Struik, 1967]:

$\forall x \in [a,b]$: $f_2(x) - f_1(x) = g_2(x) - g_1(x)$ $\quad A_1 = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = A_2 = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))dx$



Figur 6.5. Cavalieris princip i moderne fortolkning [Struik, 1967, s. 209]

Integration af potensfunktionen

Det skal nævnes, at Cavalieri er en af de første der viser, det der svarer til, at det bestemte integral fra 0 til a af en potensfunktion er $a^{n+1}/(n+1)$, hvilket vises op til $n = 4$ [Boyer, IV, 1959]. Cavalieri forklarede ydermere, at dette kan generaliseres for alle værdier af n, men han viste det kun for n op til 4, og lavede undersøgelser for n til og med 9 [Struik, 1967]. Dette gjorde han ved at betragte konstante forhold mellem potensen af linjestykker i de to kongruente trekanter, der deler et parallelogram. Det interessante ved dette eksempel er, at det er et af de første spæde tegn på, at der eksisterer generelle algebraiske regneregler, der kan generaliseres til den integralteori, vi kender i dag. Det skal nævnes, at det for Cavalieri forblev geometriske betragtninger, der siger noget om forholdet mellem potenserne af de relevante linjestykker, mens andre stort set samtidige nåede frem til mere generelle resultater, idet deres generaliseringer inkluderede negative, rationale samt irrationale potenser [Boyer, IV, 1959].

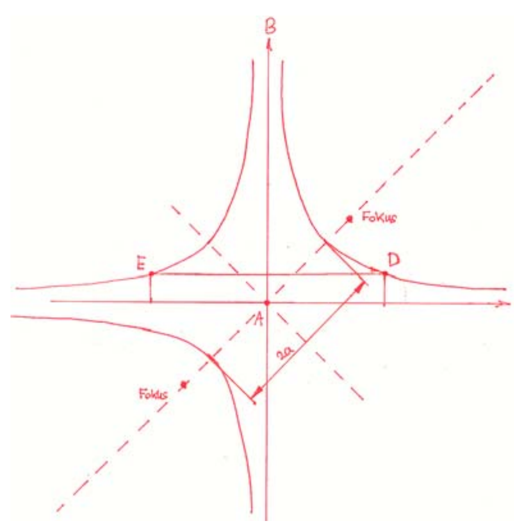
I forbindelse med denne begyndende integration af potensfunktionen skal det nævnes, at dette formentlig ligger langt fra noget Archimedes ville have beskæftiget sig med. I det plane tilfælde ville Archimedes sammenligne forholdet mellem linjestykker i to figurer og ikke potenserne af disse linjestykker. Cavalieris udvidelse med potenser af linjestykker, ses af ovenstående, at være et rigtigt skridt mod udviklingen af en mere generel teori.

Volumenet af et omdrejningslegeme

Et eksempel på en anvendelse af Cavalieris princip, hvor de udelelige i det ukendte volumen ikke længere er tværsnit, men krumme figurer, er udledt af Torricelli, der var elev af Galileo og ven med Cavalieri. Torricelli var en af de matematikere, der ikke mente, at Cavalieris metoder var stringente nok til stå alene. Han anvendte Cavalieris metoder som undersøgelser, og tilføjede normalt efterfølgende stringente beviser ved exhaustionsmetoden. Dette betyder, at Torricelli kan siges at have samme holdning som Archimedes på dette punkt. Det er i den forbindelse pudsigt, at Torricelli i hans ”*De dimensione parabolae*” blandt sine undersøgelser med udelelige gennemfører et bevis, der nærmest er identisk med Archimedes’ sætning 1 i ”*Metoden*” (parablens kvadratur) [Boyer, IV, 1959].

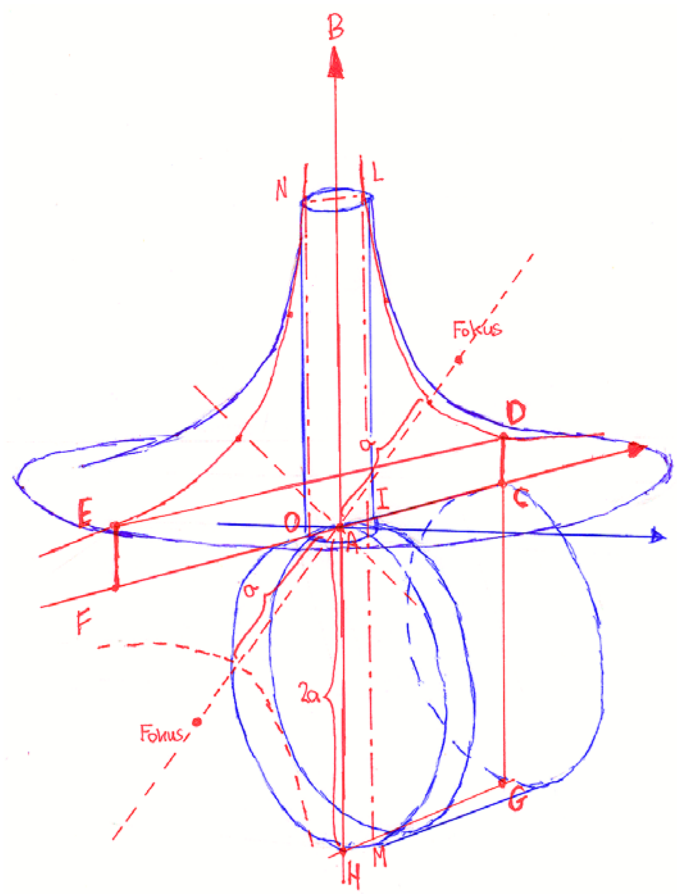
Omdrejning af hyperbelgren

En af de undersøgelser, Torricelli foretager, er bestemmelsen af voluminet af det omdrejningslegeme, der fremkommer ved at dreje en hyperbelgren om dens lodrette asymptote, se figur 6.6. Hyperbelgrenen forsætter mod uendelig, når x går imod 0, mens grenen er afskåret ved en vilkårlig x-værdi, her D. Dette giver en figur med uendelig udstrækning, der stadig har et endeligt rumfang. Dette er naturligvis i forhold til antikken et meget overraskende resultat, og Torricelli troede også selv, at han var den første, der viste et resultat af den karakter. Dette var dog ikke tilfældet, da Oresme så tidligt som i 1300-tallet havde vist, at et volumen med uendelig udstrækning godt kan have et endeligt rumfang [Boyer, IV, 1959].



Figur 6.6. Snit af hyperbelgren der drejet om sin lodrette asymptote og afskåret i x lig D og E.

Det omdrejningslegeme, voluminet skal bestemmes for, er gengivet i rumlig form på figur 6.7. På denne figur er sammenligningsvoluminet, som er en cylinder med radius a og højden D, også vist. Her betegner $2a$ hyperblens storakse.



Figur 6.7. Illustration af hvordan Torricelli sammenligner volumenet for en omdrejningshyperbel med volumenet af en cylinder.

Voluminet af omdrejningslegemet sættes til at bestå af alle dets cylindriske udelelige. Det, beviset nu går ud på, er at vise, at de cylindriske udelelige, som på figuren er eksemplificeret med cylinderen *NLIO*, hele tiden står i forholdet 1:1 til tværsnittene af cylinderen *ACGH*. Da de udelelige summeres over samme højde, højden af sammenligningsvolumenet *AC*, er kravet til anvendelsen af Cavalieris princip opfyldt. Dette betyder, at forholdet mellem alle de udelelige i omdrejningslegemet og alle de udelelige i sammenligningsvolumenet er konstant. Da sammenligningsvolumenet, en cylinder, er kendt, og idet alle udelelige står i forholdet 1:1, har det ukendte volumen, omdrejningshyperblen, samme volumen som cylinderen. Herved er voluminet af omdrejningslegemet fundet.

Ovenstående er gengivet i en meget skrabet form, da det udelukkende er udvidelsen til at anvende cylindriske udelelige, samt bestemmelsen af rumfanget af et uendeligt legeme, der er interessant her. Der kan henvises til Struik for en mere detaljeret gennemgang [Struik, 1967]. I sammenligningen med Archimedes udgør det uendelige legeme en klar udvidelse, som formentlig lå uden for hans rækkevidde. Dog er finten i beviset at se en smart geometrisk sammenhæng mellem to forskellige voluminer, hvilket er i tråd med Archimedes' tankegang. Derfor er Cavalieris princip i sig selv ikke en udvidelse, der lægger op til en mere generel integrationsteori, da det altid kræver geometrisk opfindsomhed.

Konklusion

De næste skridt mod udviklingen af en generel integralteori er her primært eksemplificeret med Cavalieris princip og hans begrebsdannelse omkring udelelige. Dette er et betydeligt skridt på vej mod en generel integralteori, men der er mange andre faktorer, der må siges at være mindst ligeså vigtige. Man kan f.eks. nævne en udvidet brug af symboler, indførelsen af koordinatsystemet og en mere aritmetisk tilgang til geometrien.

Et andet vigtigt nybrud i forhold til antikken, som hænger sammen med den højere grad af aritmetisering, er udviklingen af kinematikken, som ikke var mulig i den geometriske talforståelse, der lå i antikken. Kinematikken er netop Newtons indgangsvinkel i hans udvikling af den generelle teori, der præsenteres i "*Principia*" fra 1687 [Den Store Danske Encyklopædi, 2000]. Som nævnt, udvikler Leibniz uafhængigt af Newton en tilsvarende teori, men hans indgangsvinkel er ikke fysiske principper. Det skal her nævnes, at det er Leibniz valg af symboler, der stadig anvendes i dag (integraltegnet og *dx*). Den integral- og differentialregning, Leibniz og Newton udvikler, er baseret på infinitesimaler (udelelige), som ikke gav et stringent fundament. Derfor må den siges at være endnu et trin på vejen mod den stringente analyse, vi har i dag. Det, der nu er den klassiske analyse, bygger på en accept af det aktuelt uendelige via karakteriseringen af de reelle tal, hvilket kunne kaldes en fuldstændiggørelse af aritmetiseringsprocessen. Analysen afhænger naturligvis også i høj grad af en veldefineret indførelse af funktioner og grænseværdier.

I forhold til Archimedes' mekaniske metode er der ikke meget nyt under solen i Cavalieris metoder. Dog havde Cavalieri mange værktøjer til sin rådighed, som Archimedes ikke havde, hvilket formentlig er grunden til, at han kunne udlede lidt mere, f.eks. i forbindelse med de mere generelle resultater omkring potensfunktionen. Desuden er den begrebsdannelse, der ligger i Cavalieris indførelse af udelelige formentligt et stort skridt i den rigtige retning.

Kapitel 7. Sammenfatning

Et af de aspekter, vi satte os for at belyse, var, hvor tæt grækerne op til og med Archimedes nåede i forhold til at udvikle en mere generel integrationsteori end exhaustionsmetoden. Som det er beskrevet i kapitel 4 kan man med exhaustionsmetoden bestemme, hvordan forhold mellem krumme figurer forholder sig til kendte retlinede figurer. Det var først i slutningen af 1600-tallet, at der med Newton og Leibniz blev udviklet en generel integralteori, der dog ikke var stringent funderet. De grundlæggende bevisteknikker i exhaustionsmetoden blev derfor i 1600-tallet set som forbilledlige med hensyn til matematisk stringens. Mange af 1600-tallets matematikere regnede faktisk med, at alle deres nye resultater inden for integration, kunne bevises stringent med exhaustionsmetoden. Dette er en af grundene til, at man ofte ser exhaustionsmetoden som en forløber for integralregningen.

Det er ikke forkert at opfatte exhaustionsmetoden som en forløber for integralregningen, men der er fundamental forskel på de to metoder til arealbestemmelse. Som det er beskrevet kræver exhaustionsmetoden stor geometrisk opfindsomhed, idet det ønskede resultatet skal være kendt, hvorefter dette med rent aksiomatisk-deduktive metoder fastslås. Vejen til at fastslå resultatet er at konstruere en følge af polygoner, hvis sum konvergerer mod det ønskede areal. Rigtigheden af følgen fastlægges med et dobbeltmodstridsbevis. I den generelle integralteori kan ethvert areal, der omgrænses af en kurve fremstillet med en kendt funktion, findes, idet integralet principielt bestemmes som grænseværdien for summen af inddelingerne, når udstrækningen af disse inddelinger går mod nul. Det essentielle trin er derved bestemmelsen af en grænseværdi, hvilket netop er, hvad exhaustionsmetoden behændigt undgår. Derudover kan der med stamfunktionsbegrebet udledes mange generelle regneregler, som letter dette arbejde.

Problematikken omkring den matematiske stringens i integralteorien er relateret til aktuel uendelighed, som undgås i anvendelsen af exhaustionsmetoden. I integralteorien optræder det aktuelt uendelige i grænseovergangen, hvor der optræder uendeligt små infinitesimaler i uendeligt antal. Der lå i 1600-tallet stor bekymring vedrørende disse problematikker, som først løses helt oppe i slutningen af 1800-tallet. Mange forskere antager analogt med dette, at de græske matematikere havde en lignende bekymring, og endda en decideret frygt for det uendelige. Det aktuelt uendelige undgås i grækernes omstændelige metode, og en forenkling af denne via indførelsen af et grænseværdibegreb ville netop lede til problemer med aktuel uendelighed. Desuden antages det, at forløberne til exhaustionsmetoden indeholdt argumenter, der involverede aktuel uendelighed. En eventuel bekymring omkring anvendelsen af aktuel uendelighed hos de græske matematikere sættes ofte i relation til Aristoteles' teori for det uendelige, hvor man kun kan tale om uendelighed i potentiel forstand.

Afvisningen af det aktuelt uendelige hos Aristoteles og i matematikken via exhaustionsmetoden foregår stort set samtidigt. At denne sammenhæng kan skyldes en påvirkning fra filosofien, afvises af de moderne forskere, der er behandlet i denne rapport. Et af argumenterne imod en påvirkning fra filosofien, fremsat af Knorr, er, at exhaustionsmetoden udelukkende blev udviklet for at styrke den matematiske stringens. Dette argument kan dog diskuteres, da der i Euklids "*Elementer*" på flere steder optræder sætninger og postulater, der forudsætter en aktuel uendelighed, hvilket ikke peger på skærpet opmærksomhed omkring den matematiske stringens. Kouremenos' argumenter for at afvise en direkte påvirkning fra filosofferne bygger på et anakronistisk argument, baseret på Cantor, om, at han udviklede den transfinitte aritmetik for at løse et matematisk problem, som han efterfølgende retfærdiggjorde filosofisk. Igen er argumentet diskutabelt. Det er derfor svært helt at afvise en påvirkning fra filosofien i forbindelse med udviklingen af exhaustionsmetoden, som ofte sandsynliggøres. Det er efter vores mening generelt svært at undgå en vis påvirkning i en tid, hvor matematik og filosofi er så tæt forbundet som hos grækerne. Den omvendte påvirkning er i hvert tilfælde tydelig, idet tidens filosoffer havde stor interesse for matematikkens grundlag.

Det var når exhaustionsmetoden skulle anvendes, som nævnt i ovenstående, nødvendigt at kende resultatet, før det kunne bevises. Det er derfor noget af et mysterium, hvordan grækerne fremsatte deres sætninger. Det eneste eksempel fra den tid, hvor sløret løftes vedrørende udviklingen af ideer, findes i Archimedes' mekaniske metode, der er beskrevet i "*Metoden*". Her optræder problematikken omkring den matematiske stringens, idet Archimedes, i analogi med mange af 1600-tallets matematikere, anvender udelelige størrelser i sine bestemmelser af arealer. Archimedes mente ikke selv at den udforskende mekaniske metode kunne erstatte et matematisk bevis. Han giver ikke selv præcise argumenter for dette, men beskriver dog metoden som mekanisk og undersøgende. Der er blandt moderne fortolkere uenighed om, hvorvidt dette udelukkende skyldtes metodens mekaniske karakter, eller om det ligger i hans implicitte anvendelse af udelelige.

Den nyeste forskning af Archimedes argumentation i "*Metoden*" peger på, at det både er de mekaniske betragtninger og anvendelsen af udelelige, der gør, at Archimedes udelukker sin metode som matematisk bevisførelse. Dette virker efter vores mening som et overbevisende synspunkt, da selve adskillelsen i en mekanisk metode og en udelelighedsmetode bygger på indførelsen af begrebet udelelige, som Archimedes ikke selv anvender. Begrebsdannelsen omkring de udelelige finder først sted i 1600-tallet, hvilket er beskrevet i kapitel 6. Det mest interessante ved de nye resultater er dog Archimedes' overraskende fortrolige anvendelse af udelelige. Archimedes' anvendelse af udelelige ses i høj grad at være analog med Cavalieris, både med hensyn til det regnetekniske og den intuitive forståelse. Der skal være en en-til-en korrespondance mellem de udeleliges 'antal' i de figurer, der sammenlignes. Desuden ses figurerne intuitivt som bestående af disse udelelige.

I Archimedes mekaniske metode ligger der en aktualisering af det uendelige, idet *n* dimensionale figurer betragtes som bestående af den uendelige sum af de tilhørende *n*-1 dimensionale udelelige. Dette bekræfter ikke den holdning, at der skulle have eksisteret en frygt for det uendelige. På den anden side accepterer Archimedes kun metoden som udforskende, hvilket kunne underbygge, at der var en generel modvilje mod det aktuelt uendelige hos samtidens matematikere, og måske også hos Archimedes. Dette kunne begrundes med en udbredelse af Aristoteles' lære, dvs. en manglende accept af aktuel uendelighed. Diskussionen om det uendelige præger også holdningen i 1600-tallet, hvor matematikerne har store problemer med at fundere den matematiske uendelighed, deres nye metoder indbefatter. I begge tilfælde er det specielt kontinuumets egenskaber problematikken er forbundet med. Desuden har man problemer med at regne med uendelige antal. Dette klares af både Archimedes og Cavalieri ved at betragte forhold, hvor summen af de udelelige er i en-til-en korrespondance, hvilket ikke umiddelbart kan funderes stringent af hverken Archimedes eller Cavalieri. Denne fundering sker, som nævnt, først i slutningen af 1800-tallet.

I forhold til grækernes generelle udviklingsstade er der ret lang vej mod udviklingen af en generel integralregning. Archimedes mekaniske metode kan ikke siges at repræsentere grækernes sædvanlige fremgangsmåde, da den er et enestående eksempel på en sådan teknik. Desuden sker der ikke en videreudvikling af Archimedes nye måde at foretage matematiske undersøgelser på, hvilket ikke tyder på, at den har vundet indpas hos tidens matematikere. Dette kan måske skyldes, at metoden var for visionær eller alternativt, at 'integrationen' gled ud af de primære arbejdsområder til fordel for andre grene af matematikken.

De næste skridt på vej mod udviklingen af en generel integralteori i 1600-tallet var sjovt nok forbundet med en nyopdagelse af Archimedes' mekaniske metode. Der var dog mange andre vigtige nyopdagelser, som bidrog til denne udvikling. Her kan bl.a. nævnes indførelsen af symbolik, koordinatsystemet og en udvidet aritmetisering. Disse udviklingstrin har stor betydning for udviklingen af nogle af de centrale matematiske værktøjer i analysen, nemlig funktioner og grænseværdier.

I forbindelse med samspillet mellem matematik og filosofi virker diskussionen i litteraturen ofte følelsesladet, hvor slagsmålet ser ud til gå på, hvilken af disciplinerne der fortjener førstepladsen. Det virker mere interessant at diskutere, hvad de to indgangsvinkler hver især kan bidrage med i forhold til at opnå en større erkendelse. Der ligger hos alle matematikere mere eller mindre implicit et filosofisk valg i tilslutningen til en bestemt skole. I vores tid ligger der f.eks. i accepten af den klassiske analyse det filosofiske valg, at det aktuelt uendelige accepteres, idet aktuel uendelighed indgår i de grundlæggende forudsætninger. Der kan træffes et alternativt valg ved at tilslutte sig den konstruktivistiske tilgang til matematisk analyse, som ikke baserer analysen på en anvendelse af det aktuelt uendelige. De græske matematikere traf, i valget af exhaustionsmetoden til bestemmelse af arealer, implicit et filosofisk valg, idet metoden undgår aktuelt uendelige matematiske størrelser. Om et andet valg, f.eks. indførelsen af et mindre stringent grænseværdibegreb, ville have ændret udviklingen af deres matematik kan ikke besvares, men grækernes valg i undgåelse af det aktuelt uendelige i matematikken fik i hvert tilfælde enorm betydning for eftertiden.

Litteraturliste

[Aaboe, 1996]: “*Didactial and Other Remarks on Some Theorems of Archimedes and Infinitesimals*”, Aaboe, A., og Berggren, J. L., Centaurus, Vol. 38, s. 295-316, 1996.

[Andersen, 1985]: “*Cavalieri’s Method of Indivisibles”*, Andersen, K., et al., History of Exact Sciences, Vol.31, nr.1, s.291-367, 1985.

[Bostock, 1996]: ”*Physics, a new Translation by Robin Waterfield –With an Introduction and Note by David Bostock*”, Bostock, D., Oxford University Press, Oxford, New York, 1996. Forordet til bogen.

[Boyer, II, 1959]: “*The History of the Calculus and its Conceptual Development*”, Boyer, C. B., kap. 2, s. 14-61, Dover Publications, Inc., New York, 1959.

[Boyer, IV, 1959]: “*The History of the Calculus and its Conceptual Development*”, Boyer, C. B., kap. 4, s. 96-186, Dover Publications, Inc., New York, 1959.

[Den Store Danske Encyklopædi, 2000]: ”*Den Store Danske Encyklopædi Danmarks Nationalleksikon*”, Gyldendal, 2000.

[Dijksterhuis 1953]: ”*Die Integrationsmethoden von Archimedes*”, Dijksterhuis, E. J., Nordisk Matematisk Tidsskrift, s. 5-21, 1953.

[Dijksterhuis, 1956]: ”*Archimedes*”, Dijksterhuis, E. J., Kapitel X og XI, s. 313-346, Ejnar Munksgaard, Copenhagen, 1956.

[Heath, 1912]: “*The Works of Archimedes*” inklusiv “*The Method of Archimedes*”, Heath, T. L., Dover publications, inc., New York, 1912

[Heath, 1931]: “*A Manual of Greek Mathematics*”, Heath, T. L.; Dover Publications, Inc., New York, 1931.

[Heath, 1, 1956]: ”The *Thirteen Books of Euklid’s Elements*”, Vol. I, Heath, T. L., Dover Publications, Inc, New York, 1956.

[Heath, 2, 1956]: ”The *Thirteen Books of Euklid’s Elements*”, Vol. II, Heath, T. L., Dover Publications, Inc, New York, 1956.

[Heath, 3, 1956]: ”The *Thirteen Books of Euklid’s Elements*”, Vol. III, Heath, T. L., Dover Publications, Inc, New York, 1956.

[Hintikka, 1973]: ”*Time and Necessity*”, Hintikka, J., Kap. 6, s. 114-134, Clarendon Press, Oxford 1973.

[Jørgensen 2000]: ”*Tidlig Græsk Matematik og Euklids Femkantskonstruktion*”, Jørgensen, M., http://www.hekau.dk/mat110.pdf, 2000

[Kline, III, 1972]: “*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*”, Vol. 1, kap. 3, s. 24-56, Oxford University Press, Oxford, New York, 1972.

[Kline, VII, 1972]: “*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*”, Vol. 1, kap. 7, s. 145-171, Oxford University Press, Oxford, New York, 1972.

[Knorr, 1978]: “*Archimedes and the elements: Proposal for a revised Chronological Ordering of the Archimedean Corpus*”, Knorr, W. R., Archive for History of Exact Sciences, vol. 19, s. 211-290, 1978

[Knorr, 1982]: ”*Infinity and Continuity: The Interaction of Mathematics and Philosophy in Antiquity*”, Knorr, W. R., Cornell University Press, London, Fra en essay samling redigeret af Norman Kretzmann, 1982.

[Knorr, 1986]: ”*The Ancient Tradition of Geometric Problems*”, Kap 1, s. 1-15, Knorr, W. R., Birkhäuser, Tyskland, 1986.

[Knorr, VIII, 1986]: ”*The Ancient Tradition of Geometric Problems*”, Kap 8, s. 339-382, Knorr, W. R., Birkhäuser, Tyskland, 1986.

[Kouremenos, 1995]: “*Aristotle on Mathematical Infinity*”, Kap. 5, s. 71-99, Kouremenos, T., Franz Steiner Stuttgart, 1995.

[Kouremenos, 1997]: “*Mathematical Rigor and the Origin of the Exhaustion Method*”, Kouremenos, T., Centaurus, Vol. 39, s. 230-252, 1997.

[Lund, 2000]: “*Fra kvadratur til integration. Træk af arealberegningens historie”*, kap. 4, Lund, J., Matematiklærerforeningen, Odense, 2000.

[Mejlbo 1988]: “*Om Uendelighedsbegrebet I Matematikken*”, kap.1, Mejlbo, L.C., Matematisk Institut, Aarhus Universitet, 1988.

[Mueller, 1981]: “*Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euklid’s Elements*”, Mueller, I., The Massachusetts Institute of Technology, 1981.

[Netz et al., 2001]: ”*A new reading of Method Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest (Part 1)*”, Netz, R., Saito, K., og Tchernetska, N., SCIAMVS, vol. 2, s. 9-29, 2001.

[O’Connor et al., 1]: “*Euclid of Alexandria*”, J. J. O’Connor m.fl., **http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Euclid.html**, 1999.

[O’Connor et al., 2]: “*A history of the calculus*”, J. J. O’Connor m.fl., **http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The_rise_of_calculus.html**, 1996.

[O’Connor et al., 3]: “*Archimedes of Syracuse*”, J. J. O’Connor m.fl., **http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Archimedes.html**, 1999.

[Pedersen, 1980]: ”*Techniques of the Calculus 1630-1660*”, kap. 1. fra “*Tekster til kurset Analysens tidlige historie 1987”*, Andersen, Kirsti m.fl..; Det fysiske Institut Aarhus Universitet, Århus, 1987.

[Politikens Filosofiske Leksikon, 1998]: “*Politikens Filosofiske Leksikon*”, redigeret af Lübcke, P., Politikkens Forlag, København, 1998.

[Struik, 1967]: “*A Source Book in Mathematics, 1200-1800*”, Struik, D.J., kap. 4, s. 209-231, Princeton University Press, USA, 1967.

[Waterfield, 1996]: ”*Physics, a new Translation by Robin Waterfield*”, Waterfield, Robin, Oxford University Press, Oxford, New York, 1996.