

Types, tokens og rationalisme i matematikkens filosofi

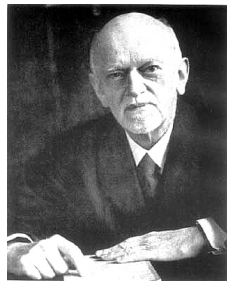
Klaus Frovin Jørgensen

Afdelingen Filosofi og Videnskabsteori, RUC

6. marts, 2010

Hilbert og den aksiomatiske metode

David Hilbert (1862-1943) “Über den Zahlbegriff” er en lille artikel fra 1899.



“Trotz des hohen pädagogischen und heuristischen Wertes der genetischen Methode verdient doch zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnis die axiomatische Methode den Vorzug.” (Hilbert, 1899)

Det filosofiske grundlag for den genetiske metode

Types og tokens (1/4)

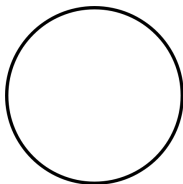
- *Type-token*: En vigtig distinktion imellem kategori og et element af kategorien.
- En *type* eksemplificeres af en *token*.
- Når vi fælder *subjekt-prædikat-domme* benytter vi types (prædikaterne) og refererer til tokens (objekterne).

Type
|
Token

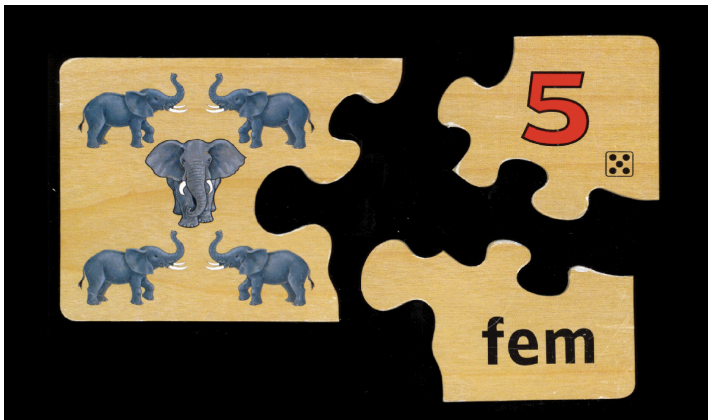


Types og tokens (2/4)

Brugen af *types* og *tokens* er helt fundamental for erkendelsen.



Types og tokens (3/4)

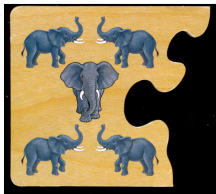


Types og tokens (4/4)

5



5 fem.



Ækvivalensrelationer (1/3)

Vi siger, at $\sim$ er en ækvivalensrelation over D , når den er refleksiv, symmetrisk og transitiv, dvs. hvis det for alle elementer i D gælder at:

- i) $x \sim x$
- ii) $x \sim y$ medfører $y \sim x$
- iii) $x \sim y$ og $y \sim z$ medfører $x \sim z$

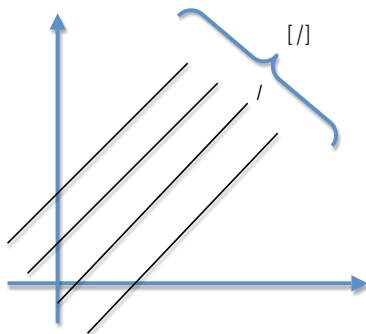
Eksempler

- “har samme farve som”
- “er parallel med”
- “er lig med”
- “kongruent modulo n ”
- “er ækvipotent med”
- ...

Vi betegner med $[x]$ klassen af alle elementer fra D , som er ækvivalente med x , det vil sige:

$$[x] = \{y \in D \mid y \sim x\}$$

Ækvivalensrelationer (2/3)



Ækvivalensklassen til linjen l under ækvivalensrelationen “er parallel med”.

Ækvivalensrelationer (3/3)

For alle $a, b \in D$ gælder $[a] = [b]$ eller $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Sætning. Ækvivalensklasserne udgør en disjunkt forening af hele mængden.

Givet et mængde D og en ækvivalensrelation $\sim$ kan vi gruppere D mht. ækvivalent 'opførsel'.



Ækvivalensklasser som objekter

På baggrund af en mængde D og ækvivalensrelation $\sim$ konstruerer vi $[a]$. Hvordan kan vi opfatte ækvivalensklassen som et objekt?

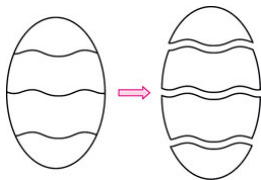
Vores håndtering af de 'oprindelige' objekter *løftes* til de nye, da

$$[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b.$$

Vi håndterer/opererer med de 'nye' objekter (nemlig ækvivalensklasserne) ved hjælp af de 'gamle' objekter (repræsentanterne).

Vi samler alle ækvivalensklasserne i en *kvotient-struktur*:

$$X/\sim = \{[a] \mid a \in D\}.$$



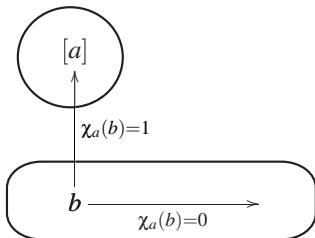
Ækvivalensklasser og generatorer

En ækvivalensrelation $\sim$ har en *karakteristisk funktion*:

$$\chi(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } a \sim b, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi kan parametrisere χ :

$$\chi_a(b) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } a \sim b, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$



Således kan vi (intensionelt) forstå en ækvivalensklasse som genereret af et i) **paradigmatisk eksempel** samt ii) **den tilhørende karakteristiske funktion**.

Naturlige tal som *konceptuelle* objekter

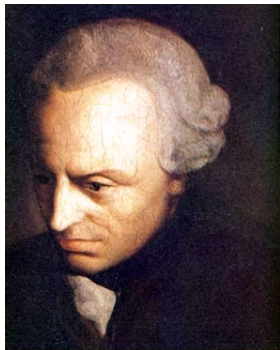
Relationen “er parvist relateret til” er en ækvivalensrelation.

Vi forstår da et naturligt tal som bestående af

- 1 Et *prototypisk* eksempel,
- 2 Den tilhørende *karakteristiske funktion*.



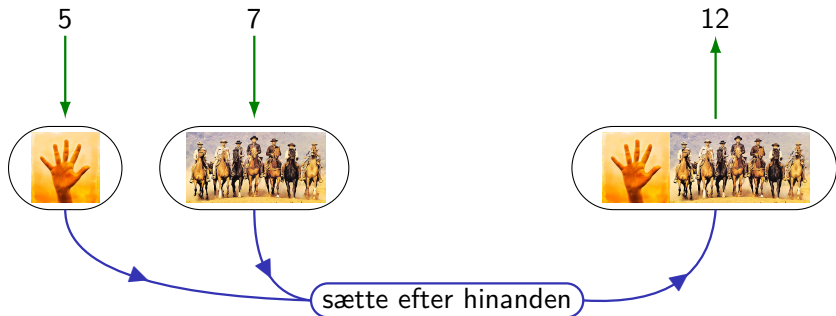
Kant (1724-1804) om tallene (1/2)



Kant (1724-1804) om tallene (2/2)

Begrebet *tolv* er på ingen måde alle medtænkt, når jeg tænker på foreningen af syv og fem. Jeg kan analysere mit begreb om en sådan forening så meget, jeg vil, og alligevel støder jeg ikke på *tolv* i det. Man må altså gå hinsides begrebet og gøre brug af den anskuelse, der svarer til det ene af de to tal, eksempelvis sine fem fingre eller (som Segner i sin aritmetik) fem punkter, hvorefter man led for led tilføjer enhederne i de i anskuelsen givne fem til begrebet syv. Jeg tager altså først tallet 7, og idet jeg for begrebet 5 tager min hånds fingre til hjælp som anskuelse, tilføjer jeg nu til mit billede de enheder, som jeg før har bragt sammen for at danne tallet 5, den ene efter den anden til tallet 7, hvorpå jeg ser tallet 12 træde frem. (Kant, *Kritik af den rene fornuft*, B 15-6)

Addition gennem tokens/repræsentanter



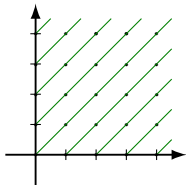
Naturlige og hele tal

- På basis af $\mathbf{N}$ kan vi konstruere de hele tal $\mathbf{Z}$.
- Definér følgende relation på $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow m + n' = m' + n$$

Ækvivalens mellem par *reduceres* til identitet mellem naturlige tal. Derved bliver $\sim$ en ækvivalensrelation.

- Ækvivalensklasserne bliver til de hele tal.



De hele tal

- $\mathbf{Z}$ er kvotientstrukturen $(\mathbf{N} \times \mathbf{N})/\sim$. Det vil sige:

$$\mathbf{Z} = \{[n, 0] \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{[0, n] \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

De kanoniske repræsentanter for de positive hele tal er $(n, 0)$, og for de negative har vi $(0, n)$.

- Vi refererer til en hel ækvivalensklasse ved hjælp af
 - i) Et kanonisk eksempel, samt (mere implicit),
 - ii) Den tilhørende karakteristiske funktion.

Addition $\mathbf{Z}$ via tokens i $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$

Hvordan adderes to ækvivalensklasser? Baseret på addition i $\mathbf{N}$ definerer vi addition i $\mathbf{Z}$:

$$+_Z : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z},$$

$$(m - n, r - s) \mapsto (m - n) +_Z (r - s) := (m +_{\mathbf{N}} r) - (n +_{\mathbf{N}} s)$$

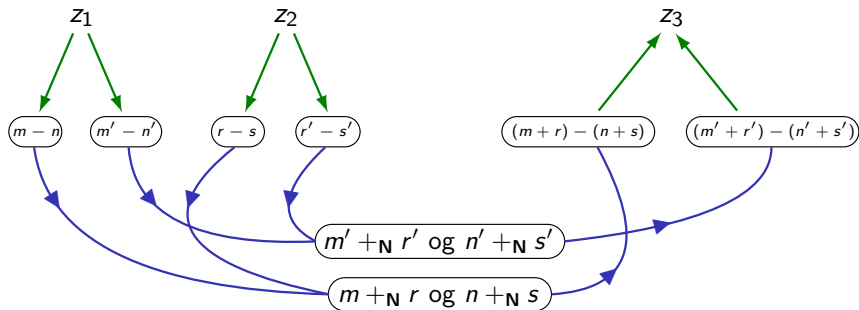
Vi skal herefter sikre os, at definitionen er veldefineret. Altså, at $+_Z$ respekterer ækvivalensklasserne.

$+_{\mathbf{Z}}$ er veldefineret

- **Lemma.** $m - n = m' - n'$ og $r - s = r' - s'$ medfører:

$$(m +_{\mathbf{N}} r) - (n +_{\mathbf{N}} s) = (m' +_{\mathbf{N}} r') - (n' +_{\mathbf{N}} s').$$

- Addition i $\mathbf{Z}$ reduceres til (komponentvis) addition i $\mathbf{N}$:



Algebra, aksiomatik og den genetiske metode

Algebra og aksiomatik

Lad G være en mængde med en operation $\cdot : G \times G \rightarrow G$. Dette kaldes en *gruppe*, hvis

- ① $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, for alle $x, y, z \in G$
- ② Der er et neutralt element e sådan at G :
 - i) $e \cdot x = x$, for alle x
 - ii) For alle x findes der x^{-1} sådan at $x \cdot x^{-1} = e$.

Vi kan nu vise, at $(\mathbf{Z}, +)$ er en gruppe og, at $(\mathbf{Z}, \cdot)$ er en semi-gruppe (dvs. en gruppe uden 2), samt at addition og multiplikation opfører sig distributivt. Altså, er $\mathbf{Z}$ en *Ring*.

De rationelle tal

Genetisk metode. Konstruér $\mathbf{Q}$ som samlingen af ækvivalensklasserne af ordnede par af hele tal (a, b) , med $b \neq 0$. Den *afgørbare* ækvivalensrelation er defineret ved

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

$\mathbf{Q}$ er bliver kvotient-strukturen $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})/\sim$.

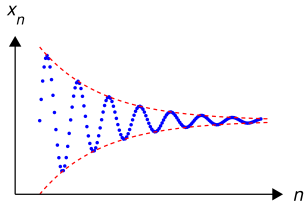
På grundlag af repræsentanter af ækvivalensklasserne kan regnearterne i $\mathbf{Z}$ løftes til $\mathbf{Q}$. (Vi skal også her vise *veldefinerethed*).

Aksiomatisk metode. Går vi til det abstrakte kan vi vise, at $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ er en kommutativ ring, med $(\mathbf{Q}, \setminus \{0\}, \cdot)$ som en gruppe. Altså er $\mathbf{Q}$ et *legeme*.

Mod de reelle tal: Cauchy-følger

Cauchy-følge: En følge af rationelle tal $x_1, x_2, \dots$ er *Cauchy*, hvis der for ethvert ϵ eksisterer et N således, at for alle $n, m > N$

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$



Ud fra klassen **Cau** af alle Cauchy-følger kan vi konstruere de reelle tal.

Konstruktion af de reelle tal

Two Cauchy-følger (a_n) og (b_n) er ækvivalente, hvis deres forskel er 0 i grænsen; altså:

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \lim(a_n - b_n) = 0$$

Fra klassen **Cau** af Cauchy-følger kan de reelle tal konstrueres som ækvivalensklasser:

$$[(a_n)] = \{(b_n) \in \mathbf{Cau} \mid (a_n) \sim (b_n)\}.$$

Bemærk, et reelt tal er generelt en ret uendelig størrelse.

Regneregler for de reelle tal

Definition. Lad x og y være reelle tal. Vælg (a_n) i x og (b_n) i y ; vi definerer da

$$x + y = [(a_n + b_n)]$$

$$x \cdot y = [(a_n b_n)]$$

$$0 = [(0)]$$

$$1 = [(1)]$$

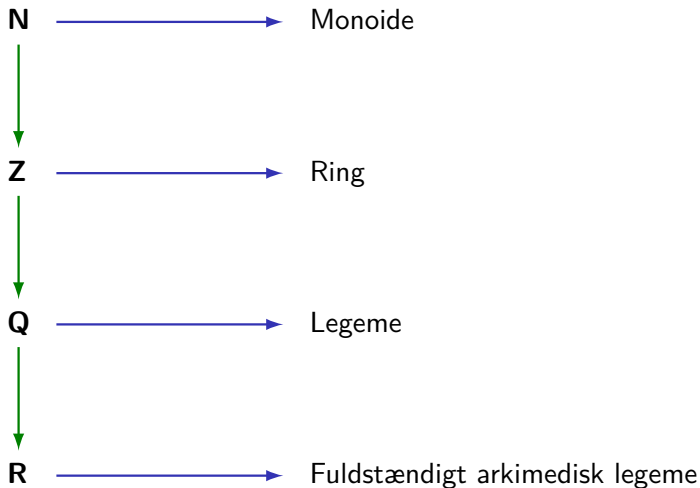
Vi kan ligeledes definere $<$ for de reelle tal. Derved får vi, at

$$\mathbf{R} = (\mathbf{Cau}/\sim, +, \cdot, <)$$

er et fuldstændigt ordnet arkimedisk legeme. Altså *fuldstændigt, uden infinitesimaler med $\mathbf{Q}$ tæt i $\mathbf{R}$.*

Den genetiske og den aksiomatiske metode

Samspil mellem de to metoder



Diskussion og konklusion