Gödels undersøgelser ud i den intuitionistiske logiks semantik

Klaus Frovin Jørgensen

Afdeling for Filosofi og Videnskabsteori, RUC

Den 4. marts, 2011

Heytings uformelle forståelse af symbolernes betydning

($\wedge$) $p : A \wedge B$ hviss p er et par (p_0, p_1) sådan at $p_0 : A$ og $p_1 : B$.

($\vee$) $p : A \vee B$ hviss p er et par (p_0, p_1), $p_0 \in \{0, 1\}$ og $p_1 : A$ hvis $p_0 = 0$ og $p_1 : B$ hvis $p_0 = 1$.

($\rightarrow$) $p : A \rightarrow B$ iff p er en konstruktion, som tager en hvilken som helst q sådan at $q : A$ over i $p(q)$, hvor $p(q) : B$.

($\forall$) $p : \forall x A(x)$ hviss p er en konstruktion, der tager enhver t fra domænet ind i $p(t)$ sådan at $p(t) : A(t)$.

($\exists$) $p : \exists x A(x)$ hviss p er et par (p_0, p_1), hvor p_0 er et objekt fra domænet, og hvor $p_1 : A(p_0)$.

Lad $\bot$ stå for en kontradiktion. Vi antager, der ikke findes noget p, sådan at $p : \bot$. Vi definerer $\neg A$ som $A \rightarrow \bot$.

Intuitionistisk (minimal) udsagnslogik

$$A \to A, \qquad \bot \to A,$$

$$A \to A \vee B, \qquad B \to A \vee B,$$

$$A \wedge B \to A, \qquad A \wedge B \to B,$$

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \qquad \frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C} \qquad \frac{A \to B \quad A \to C}{A \to B \wedge C}$$

$$\frac{A \wedge B \to C}{A \to (B \to C)} \qquad \frac{A \to (B \to C)}{A \wedge B \to C} \qquad \frac{A \to C \quad B \to C}{A \vee B \to C}$$

Tertium Non Datur

Tertium non datur:

$$A \vee \neg A$$

er ikke sund under Heytings bevisfortolkning.

Første-ordens-logik

$$\frac{B \to A(b)}{B \to \forall x A(x)} \qquad \forall x A(x) \to A(t),$$

$$A(t) \to \exists x A(x), \qquad \frac{A(b) \to B}{\exists x A(x) \to B}$$

b er egenvariabel, hvilket vil sige, at b ikke må forekomme fri i B.

Semantik og klassisk logik

Gödel viste i 1930 at klassisk logik havde en rigtig tilfredsstilende semantik, der baserede sig på at give formler mening i forhold til *to og kun to* sandhedsværdier "sand" og "falsk".

I forhold til denne semantik var der ækvivalens mellem bevisbarhed og sandhed, hvilket udtrykt på formler er:

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B \quad \Leftrightarrow \quad A_1, \ldots, A_n \models B$$

Men hvad med intuitionistisk logik?

Forholdet mellem intuitionistisk logik og klassisk logik

Syntaktisk kan man forstå klassisk logik som intuitionistisk logik udvidet med *tertium non datur*. Denne udvidelse er imidlertid ufarlig med hensyn til konsistens:

Sætning (Gödel/Gentzen 1933). Klassisk logik er inkonsistent, hviss intuitionistisk logik er det.

Beviset baserer sig på at oversætte (se næste slide) fra klassisk logik ind i intuitionistisk logik, sådan at hvis en hvis en modstrid i klassisk logik kan udledes, så kan man også udlede en i intuitionistisk logik.

Gödels oversættelse fra klassisk til intuitionistisk logik (1933a)

$$
\begin{aligned}
P^G &\equiv \neg\neg P, && \text{for primformler } P \\
(\neg A)^G &\equiv \neg A^G \\
(A \wedge B)^G &\equiv A^G \wedge B^B \\
(A \vee B)^G &\equiv \neg(\neg A^G \wedge B^G) \\
(A \rightarrow B)^G &\equiv A^G \rightarrow B^G \\
(\forall x A)^G &\equiv \forall x A^G \\
(\exists x A)^G &\equiv \neg \forall x \neg A^G
\end{aligned}
$$

Der følger nu

$$\mathsf{KL} \vdash A \Leftrightarrow \mathsf{IL} \vdash A^G.$$

Intuitionistisk logik var altså stærkere, end man havde regnet med!

Gödels modal-logiske oversættelse (1933b)

S4 er den klassiske udsagnslogik udvidet med et symbol $\Box$ for nødvendighed og de følgende tre aksioms-skemaer og nødvendigheds-reglen:

$$
\begin{array}{l}
\Box A \rightarrow A \\
\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B) \\
\Box A \rightarrow \Box\Box A \\
\vdash A \quad \Rightarrow \quad \vdash \Box A.
\end{array}
$$

Ved at 'skubbe' $\Box$ ind foran alle subformlerne i en intuitionistisk formel A kunne Gödel (1933b) vise:

$$\mathrm{IUL} \vdash A \quad \Rightarrow \mathrm{S4} \vdash A'$$

hvor A' er oversættelsen af A, og IUL er intuitionistisk udsagnslogik.

Hvordan skal vi forstå $\Box$?

Gödel bemærker, at det ikke er klart, hvordan $\Box A$ mere præcist skal forstås. Det ses direkte fra det første skema sammen med nødvendighedsreglen, at

$$\mathsf{S4} \vdash \Box(\Box\bot \to \bot).$$

Hvis vi prøver at forstå $\Box$ som et bevisprædikat $\mathrm{Beviselig}_T$ i et formelt aritmetisk system T får vi, at T beviser sit eget reflektionsprincip. Men dette er i modstrid med Gödel's anden ufuldstændighedssætning, idet vi ville få:

$$\mathrm{Beviselig}_T\big(\neg\mathrm{Beviselig}_T(\bot)\big).$$

Hvad er en logik uden en semantik?

Gödel i 1938

I 1938 gav Gödel foredraget kaldet *Vortrag bei Zilsel*. I dette foredrag diskuterer Gödel Hilberts program, Gentzens konsistensbevis og Heytings intuitionistiske logik. Alt dette foregår i konteksten af et muligt grundlag for matematikken.

Gödel formulerer:

1. De første ansatser til sin Dialectica fortolkning
2. Muligheder for at give en tilfredsstillende fortolkning af S4 (som endnu ingen semantik har) og dermed muligheden af en fortolkning af den intuitionistiske logik.

Gödels ene vej: Dialectica-fortolkningen (1941)

Disjunction Property and Existence Property

Lad HA være den formelle elementære talteori over den intutionistiske logik.

Gödel (1941): Spørgsmålet er, har HA følgende to egenskaber:

- *Eksistens-egenskaben*: Hvis $\mathrm{HA} \vdash \exists x A(x)$ så $\mathrm{HA} \vdash A(t)$ for en term t.
- *Disjunktions-egenskaben*: Hvis $\mathrm{HA} \vdash A \vee B$, for to lukkede formler $A,\ B$ så $\mathrm{HA} \vdash A$ or $\mathrm{HA} \vdash B$.

The System Σ (1/2)

The ground type consits of the natural numbers. There are symbols for zero and successor and variables of all types.
If F is an operation of type $\sigma \to \tau$ this is written as $F^{\sigma\to\tau}$
Operations in Σ are defined from combinators (which introduce λ-abstraction)

$$\mathsf{K}(x, y) = x \qquad \mathsf{S}(x, y, z) = x(z)(yz)$$

The combinators give us λ-abstraction $\lambda x.t$ for terms t, with the following equality:

$$(\lambda x.t[x])s = t[s].$$

Moreover, we have primitive recursion

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{R}(x, y, 0) & = & x \\ \mathsf{R}(x, y, (z+1)) & = & y(\mathsf{R}(x, y, z),\, z) \end{array}$$

The System Σ (2/2)

Quantifier free induction

$$\frac{A(0) \quad A(x^0) \to A(Sx^0)}{A(x^0)}$$

Substitution:

$$\frac{A(x^\sigma)}{A(t^\sigma)}$$

Soundness of translation

The formulas of HA are translated into formulas of the type theory.

Theorem (Gödel 1941).

$$\text{If } \mathrm{HA} \vdash A, \text{ then } \Sigma \vdash A_D(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{y}),$$

where $\boldsymbol{T}$ is a sequence of terms which can be extracted from a proof of A in HA.

Gödel's Results

In 1941 the following results are mentioned:

1. For a certain quantifier free formula $A(x)$ let $C \equiv \neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$. Then $\mathrm{HA} + C$ is consistent.
2. If HA proves $\exists x A(x)$ then Σ proves the *translated* formula $A_D(t)$, for a term t.
3. $\neg\neg$-translation (1933) together with the new interpretation proves consistency of classical arithmetic relative to Σ.

The interpretation was ultimately published in *Dialectica* in 1958: "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes".

Weak versus Strong Counterexamples

Gödel produces with his interpretation a *strong* counterexample. $\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ is demonstrably incompatible with classical logic.

Thus it is shown that intuitionistic logic syntactically is a generalisation of classical logic: Intuitionistic logic can be continued with either *tertium non datur* or with $\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ (but not with both jointly).

Gödels anden vej: En eksakt semantik

Mod den eksakte semantik

Gödels foredrag fra 1938 udgives først i 1995. Hans ideer går i glemmebogen.

Men andre (Kreisels "the theory of constructions" og Goodmans modifikation) forsøgte, dog uden det store held, at komme videre. van Dalen opsummerede situationen således:

"The intendend interpretation of intuitionistic logic as presented by Heyting [. . .] has so far proved to be rather elusive." (van Dalen, 1986)

Artemov (1995, 2001) formulerer en "Logic of Proofs"

Termer i LP:

$$p ::= x_i \mid a_i \mid !p \mid p_1 \cdot p_2 \mid p_1 + p_2$$

Termerne kaldes også *bevis-polynomier*.

Formler i LP:

$$\sigma ::= S \mid \sigma_1 \to \sigma_2 \mid \sigma_1 \wedge \sigma_2 \mid \sigma_1 \vee \sigma_2 \mid \neg\sigma \mid t : \sigma$$

hvor t er en term.

Aksiomatisering af LP

$A0.$ Aksiomatisering i Hilbert-stil af klassisk udsagnslogik i LP's sprog.

$A1.$ $t : A \rightarrow A.$ (*Verifikation*)

$A2.$ $t : (A \rightarrow B) \rightarrow (s : A \rightarrow (t \cdot s) : B)$. (*Applikation*)

$A3.$ $t : A \rightarrow !t : (t : A).$ (*Bevis-tjekker*)

$A4.$ $t_i : A \rightarrow (t_1 + t_2) : A, \qquad i \in \{1, 2\}.$ (*Valg*)

$R1.$ $\dfrac{A \rightarrow B \qquad B}{B}$ (*Modus ponens*)

$R2.$ $\dfrac{}{c : A}$ hvis A er et aksiom fra $A0 - A4$. (*Nødvendighed*)

Et lille short cut i LP

Givet vi har $c : (A \rightarrow B)$, så kan vi få $x : A \rightarrow (c \cdot x) : B$, ved brug af *applikation* og *modus ponens*:

$$\frac{c : (A \rightarrow B) \qquad c : (A \rightarrow B) \rightarrow \big(x : A \rightarrow (c \cdot x) : B\big)}{x : A \rightarrow (c \cdot x) : B}$$

Eksempel (Artemov, 1999)

$$\mathsf{S4} \vdash \Box A \wedge \Box B \;\rightarrow\; \Box(A \wedge B)$$

I LP har vi følgende udledning:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x : A] \qquad \dfrac{c : \big(A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)\big)}{x : A \;\rightarrow\; (c \cdot x) : \big(B \rightarrow (A \wedge B)\big)}}{(c \cdot x) : \big(B \rightarrow (A \wedge B)\big)}}{y : B \;\rightarrow\; (c \cdot x \cdot y) : (A \wedge B)}}{x : A \;\rightarrow\; \big(y : B \;\rightarrow\; (c \cdot x \cdot y) : (A \wedge B)\big)}}{x : A \wedge y : B \;\rightarrow\; (c \cdot x \cdot y) : (A \wedge B)}$$

Artemovs resultat (1995, 2001)

Vi kan fortolke eksakt fra intuitionistisk udsagnslogik ind i LP via S4.

$$\mathsf{IUL} \rightarrowtail \mathsf{S4} \rightarrowtail \mathsf{LP}.$$

Og LP har en meget tilfredsstillende (beregnelig og fuldstændig) semantik i bevisprædikater, for eksempel bevisprædikatet for PA.