Roskilde University

Grafisk fremstilling af fraktaler og kaos

Christiansen, Peder Voetmann

Publication date:
1989

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Citation for published version (APA):
Christiansen, P. V. (1989). *Grafisk fremstilling af fraktaler og kaos*. Roskilde Universitet. Tekster fra IMFUFA Nr. 174

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

• Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
• You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain.
• You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact rucforsk@kb.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

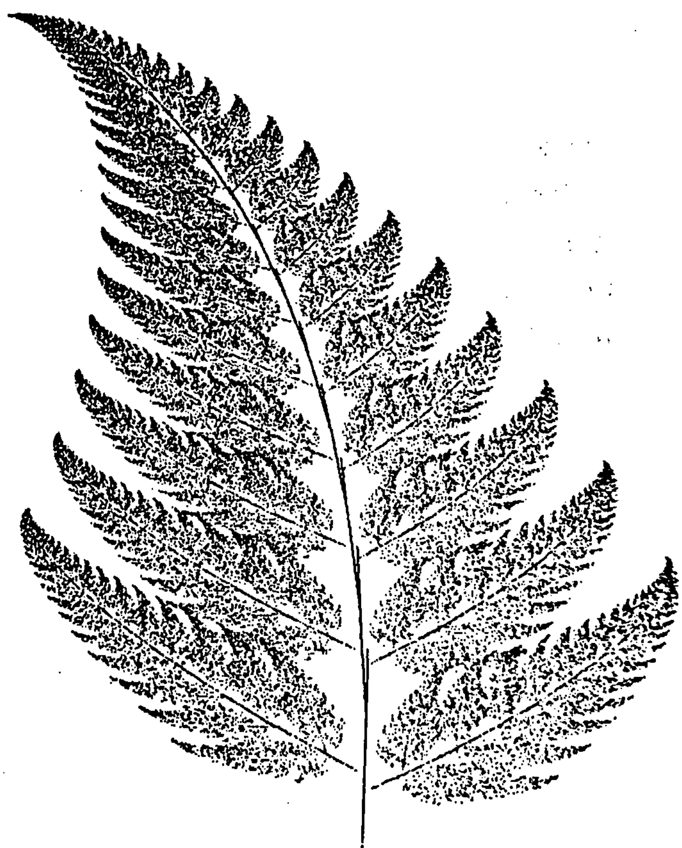
Download date: 03. Jul. 2025

TEKST NR 174 1989

Grafisk fremstilling af

FRAKTALER OG KAOS.

Peder Voetmann Christiansen.



TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde
Grafisk fremstilling af FRAKTALER OG KAOS.
af: Peder Voetmann Christiansen

IMFUFA tekst nr. 174/89 76 sider ISSN 0106-6242

Abstract .

Teksten introducerer nogle simple eksempler på systemer med kaotisk adfærd og diskuterer, hvordan man grafisk skelner en sådan fra andre typer af bevægelse, f.eks. næstenperiodiske. Desuden gives en række eksempler på fraktaler med eksakt eller tilnærmet selv-similaritet, og den fraktale dimension introduceres ved skala-invarians betragtninger.

Det er meningen, at teksten skal afprøves i gymnasieklasser i forbindelse med det matematisk-datalogiske emne i løbet af foråret 89, og til efteråret eventuelt følges op med en revideret version, udgivet af matematiklærerforeningen.

Forord .

Denne tekst er beregnet til det matematisk-datalogiske emne i 3. gymnasieklasse. Studiet af fraktaler og kaotiske dynamikker indbyder til en eksperimentel tilgang til matematikken, hvor datamaskinen benyttes som en form for mikroskop, der giver indblik i komplicerede strukturer. Der er derfor ikke gjort meget ud af matematisk bevisførelse, men det er mit håb, at den selvstændige produktion af overraskende grafiske udtryk med simple programmer kan give appetit til at gå på matematisk opdagelse.

Jeg har lagt vægt på simple iterative og rekursive metoder, som ikke kræver kendskab til komplekse tal. "Figentræet og mandelbrødet" er et sammenhængende emne i kaos-fraktal-teorien, som behandles i en anden tekst, udgivet af matematiklærerforeningen. Figentræet er derfor et af de oplagte emner, som er udeladt af denne tekst. Der findes dog et figentræ-program på den medfølgende diskette. En anden tekst, Henrik Darlies "fraktaler i Comal", som kan rekvireres via Amtscentralen, ledsages også af en diskette. Heri findes en mængde udmærkede programmer, som vil kunne supplere eksemplerne i denne tekst.

Et hovedemne i nærværende tekst er begrebet "fraktal dimension", som indføres i forbindelse med strengt skalainvariante eller selv-similære figurer, frembragt ved rekursive procedurer. Et 20 timers undervisningsforløb bør bygges op om denne kerne, således at alle gennemfører de rekursive stregtegninger, gennemgået i kapitel 4 (max. 10 timer). Den resterende del af forløbet kan så benyttes til videregående undersøgelse, f.eks. af iterationsformlerne i kap. 1 og 2, som indbyder til kunstneriske frembringelser, eller til et af emnerne DLA (kap. 3), kurver med areal (kap. 5), reflektion fra cylindre (kap. 6), eller bolden i grøften (kap. 7).

Programeksemplerne er skrevet i Uni-Comal til PCere. Der gives ikke nogen introduktion til Comal-sproget, bortset fra den specielle "skildpadde-grafik", som benyttes til de rekursive stregtegninger i kap. 4. Programeksemplerne findes på to disketter, den ene i PC-UniComal, den anden i RC-Comal sammen med en pakke med skildpaddegrafikken. Disse disketter rummer oversættelser af programmer skrevet i andre sprog, først og fremmest mine BASIC programmer til hjemmecomputeren Amstrad CPC 6128. Oversættelserne af de større programmer er udført af Heine Larsen, som jeg hermed takker for den store hjælp, han har ydet mig.

Figurerne i teksten er frembragt af en almindelig matrix printer, koblet til min hjemmecomputer (bortset fra fig. 14, som er lavet med plotter). Der er benyttet 2 forskellige formater: et groft format med 320*200 punkter inden for billedrammen og et fint med 640*600 punkter. Det grove format tillader til gengæld brug af fire "farver", der på de sort-hvide billeder viser sig som forskellige gråtoner. Da de forskellige maskiner afviger meget fra hinanden i deres grafiksystemer, har jeg måttet afstå fra at give konkrete anvisninger på fremstilling af papirbilleder. I teksten forudsætter jeg en CGA-grafik med 640*200 punkter på skærmen. Billeder med 640*600 punkter må så laves ved sammenstykning af tre skærmbilleder, hvis maskinen tillader det.

Indholdsfortegnelse .

Kapitel 1 :
Simpel iteration: Martins formel .

Ordet "iteration" betyder "gentagelse". Iterationsformler har vigtige anvendelser i matematikken, f.eks. til numerisk løsning af ligninger: Man starter med at give et første bud på løsningen. Dette tal indsættes i en iterationsformel, som så giver et nyt (og forhåbentlig bedre) bud, som så igen indsættes, osv. I heldige tilfælde vil gentagen anvendelse af formlen producere tal, som hurtigt konvergerer mod den rigtige løsning, men man kan sagtens komme ud for overraskelser, f.eks. konvergens mod en forkert løsning, eller mangel på konvergens.

Vi skal her se på iterationsformler, som virker på talpar, i stedet for enkelte tal. Et talpar (x,y) kan opfattes som koordinater i en plan, og med passende valg af skala kan det afsættes som et punkt på computerens skærm. En uendelig følge af talpar frembringes ved opskriften

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= F(x_n,y_n) \\ y_{n+1} &= G(x_n,y_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

Følgen må startes med et "frø" (x_0,y_0). Når man så efter hver anvendelse af (1) afsætter det fremkomne, nye talpar som et punkt på skærmen (forudsat, at det, passende skaleret, falder inden for skærmens rammer), vil der efterhånden fremkomme et mønster af prikker, som i mange tilfælde har en ganske overraskende skønhed og detaljerigdom.

Den vigtigste forudsætning for, at den simple iteration (1) kan føre til interessante billeder, er, at mindst én af fuunktionerne F og G er <u>ikke-lineær</u> , dvs. involverer andre beregninger end addition og multiplikation med en konstant. Som eksempel ser vi på <u>Martins formel</u> , som først blev publiceret i tidsskriftet Scientific American fra september 1986 (A.K.Dewdney i spalten "Computer recreations"):

$$x_{n+1} = y_n - \mathrm{SGN}(x_n)*\mathrm{SQR}(\mathrm{ABS}(b*x_n - c))$$
$$y_{n+1} = a - x_n \qquad (2)$$

Funktionen G er i dette tilfælde lineær, medens F er ikke-lineær. Der er her benyttet et formelsprog, som minder om computerens Comal, idet multiplikation angives med tegnet *; SGN er fortegnsfunktionen, som er +1, 0 eller -1, når argumentet er hhv. positivt, nul, eller negativt; SQR er kvadratrodsfunktionen, og ABS er absolutværdien (den numeriske værdi). Størrelserne a, b og c er såkaldte parametre, som skal holdes konstante under iterationen, men som man bagefter kan forsøge at give andre værdier.

Vi kan benytte nedenstående procedure:

```
PROC martin(a,b,c,x0,y0,n,dx,dy,mx,my)
    x:=x0
    y:=y0
    FOR k:=1 TO n DO
        x1:=y-SGN(x)*SQR(ABS(b*x-c))
        y:=a-x
        x:=x1
        IF ABS(x-mx)<dx AND ABS(y-my)<dy THEN
                  PLOT(320*(1+(x-mx)/dx),100*(1+(y-my)/dy))
        ENDIF
    ENDFOR k
ENDPROC martin
```

Her er a, b og c de tre parametre i Martins formel, x0 og y0 er startværdierne (frøet), n er antallet af iterationer, og dx, dy, mx og my er konstanter, som angiver billedområdet som et rektangel med midtpunkt i (x,y)=(mx,my) og kantlængderne 2*dx og 2*dy.

Inden proceduren benyttes, skal man fremkalde grafikpakken med kommandoen USE graphics. Eventuelt kan grafikmoden med 640*200 punkter specificeres med kommandoen graphicscreen(0). Prøv så at køre 1000 iterationer med start i (0,0) midt på skærmen. Benyt kommandoen

```
martin(0.1,0.2,-0.3,0,0,1000,10,10,0,0)
```

På fig.1 vises resultatet af en række kørsler med de samme parameterværdier, altså a=0.1, b=0.2, c=-0.3. For hver ny kørsel er startværdierne for x og y tilfældigt valgt.

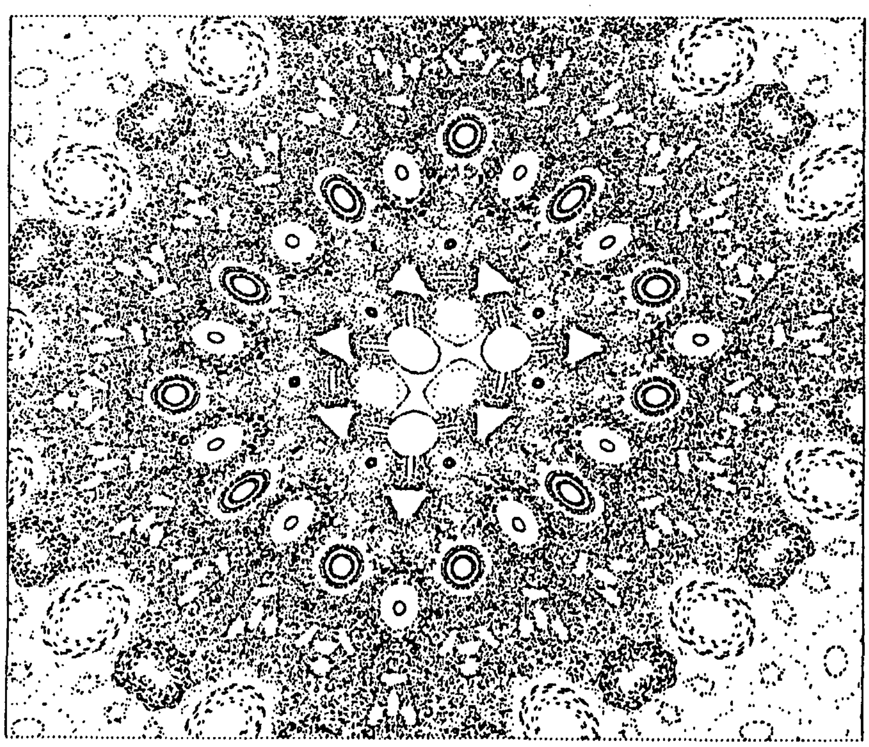


Fig. 1 . Martin: a=0.1, b=0.2, c=-0.3, dx=5, dy=5, mx=my=0.

Når man iagttager skærmen, medens figuren dannes, bemærker man, at hver ny startværdi fører til et bælte af punkter rundt om et centrum. I mange tilfælde vil punkterne danne et system af ellipser (eller ellipselignende lukkede kurver); denne bevægelsesform kaldes næstenperiodisk . Hvis man kunne være så heldig at ramme et af ellipsecentrerne med startværdierne for x og y, ville man få en periodisk bevægelse, som kun afsætter et bestemt antal punkter, ligegyldigt hvor længe, iterationen kører. Når man rammer lidt ved siden af et af disse centrer, vil man efter forløbet af perioden ikke ramme startpunktet igen, men lidt ved siden af, og i det lange løb fås aftegnet et antal ellipser, svarende til perioden for den rent periodiske bevægelse. På fig. 1 ses f.eks. to ellipsesystemer med perioden 11 og nær centrum to andre systemer med perioden 3. Ind imellem ellipsesystemerne er der en diffus sværtning med punkter, som indgår i en kaotisk bevægelse .

På fig. 2 er benyttet samme parametre og samme centrum, men værdierne af dx og dy er sat til 1, således at vi får et udsnit omkring midten af fig. 1.

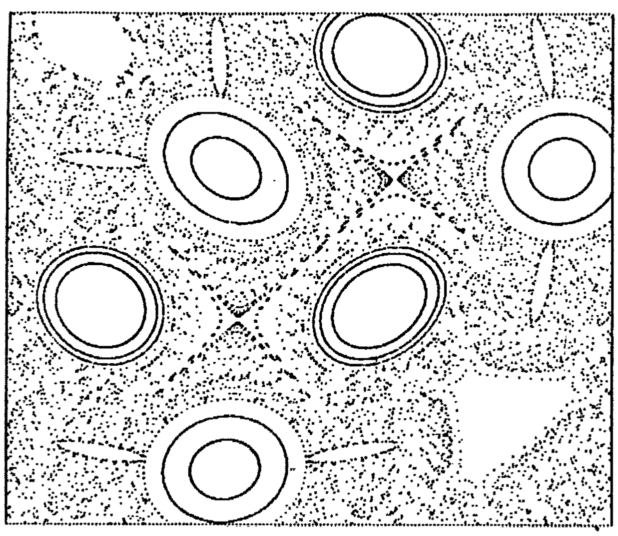


Fig. 2 . Martin: som fig. 1, men dx=dy=1.

Vi ser på fig. 2 de to ellipsesystemer med perioden 3, samt en kaotisk fordeling med huller i. Desuden ses to skarpt aftegnede hyperbelsystemer mellem ellipserne. Centrerne af disse hyperbler udgør en ustabil periodisk bevægelse . Når vi rammer lidt ved siden af et af disse centrer, vil punktet under sin bevægelse glide langs hyperbelgrenene, og selv om det muligvis i begyndelsen tiltrækkes af centret, vil det uvægerligt senere frastødes og ende i det kaotiske område.

Martins formel er et eksempel på en iteration, der, i modsætning til formlerne for numerisk løsning af ligninger (f.eks. Newton-Raphson), næsten aldrig "falder til ro" dvs. konvergerer mod et enkelt punkt eller et endeligt system af punkter (en såkaldt attraktor). Den minder derved om såkaldt konservative mekaniske systemer, hvor der ingen gnidning er, og hvor den mekaniske energi derfor er bevaret. Vi skal senere, i kapitel 7, se på et sådant system, nemlig en bold, der hopper i en grøft, og i dette eksempel vil vi kunne genfinde mange træk fra Martins iteration. Martins formel, som ikke er tænkt som en model for noget som helst, men snarere som en metode til frembringelse af smukke og gyselige mønstre ("wallpaper for the mind", som Dewdney kalder sin artikel i Scientific American, der også rummer andre eksempler til iteration) rummer imidlertid en utrolig varietet i sit tredimensionale parameterrum, og hvis man går på opdagelse her, kan man være næsten sikker på at frembringe noget, som ingen før har set.

Lad os prøve med nogle andre parameterværdier (foreslået i Dewdneys artikel), nemlig $a=-200$, $b=0.1$ og $c=-80$. I dette tilfælde vil figuren også have et centrum, som imidlertid ligger langt væk fra (0,0). Vi kan bestemme dette centrum som et stationært punkt, dvs. vi indsætter $x_{n+1} = x_n$ og $y_{n+1} = y_n$ i (2) og løser det fremkomne ligningssystem. Herved bestemmes centret på fig. 3:

$$mx = -95.5547; \; my=-104.4453 \tag{3}$$

Denne figur viser en mangfoldighed af næstenperiodiske bevægelser: Et enkeltperiodisk ellipsesystem omkring centret (det stationære punkt), som går brat over i et næsten kvadratisk system, som gradvist i større afstande bliver ottekantet. På fig. 4 vises et nærbillede af det underlige overgangsområde fra det cirkulære til det kvadratiske til det ottekantede mønster. I dette område findes såkaldte bifurkationer , dvs. den cirkulære bevægelse omkring centrum går i stykker til et system af usammenhængende cirkelbuer (ordet "cirkel" skal ikke tages for bogstaveligt). Ved langvarige iterationer kan der ophobes numeriske fejl, som på fig. 4 bl.a. viser sig ved mystiske overlapninger mellem de forskellige kurvesystemer.

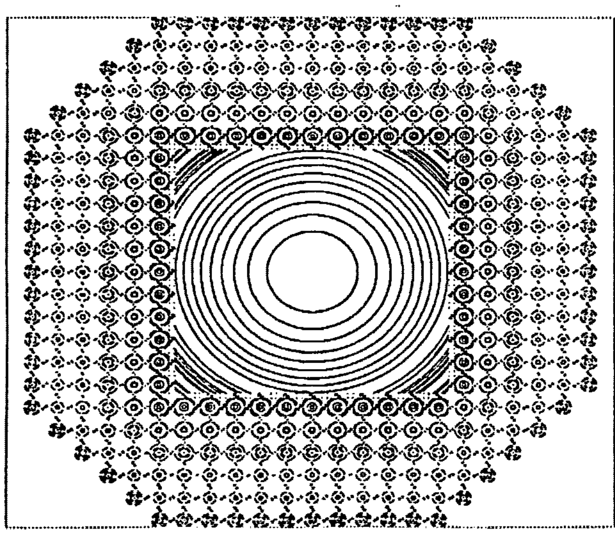


Fig. 3 . Martin: a=-200, b=0.01, c=-80, dx=213, dy=200, mx og my i det stationære punkt, ligning (3).

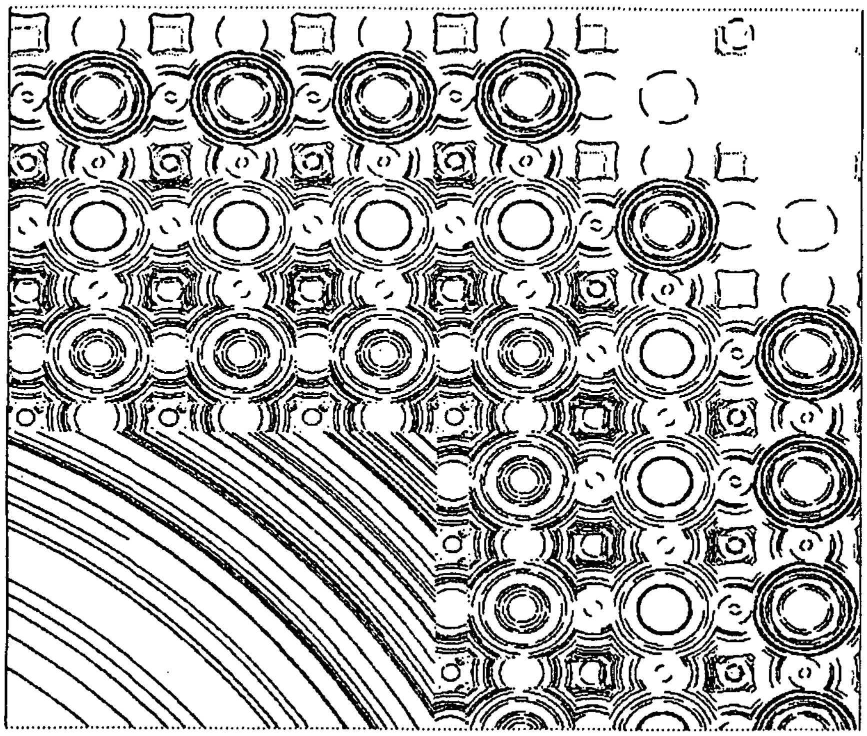


Fig. 4 . Martin: som fig. 3, men centrum (mx,my) i (0,0) og dx=53, dy=50.

Kapitel 2 :
Itererede funktionssystemer (IFS) .

I stedet for, som i foregående kapitel, at lave en simpel iteration af et enkelt funktionspar (lign. (1)), kan man benytte et system af K funktionspar. For hvert enkelt skridt vælges en tilfældig af funktionerne i systemet:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= F_i(x_n, y_n) \\
y_{n+1} &= G_i(x_n, y_n)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

hvor indexet i kan antage værdier mellem 1 og K og skal udvælges tilfældigt for skridt af iterationen. Ud over de parametre, som kan indgå i funktionssættet (F_i, G_i), skal man så benytte et sæt sandsynligheder til bestemmelse af de relative hyppigheder, hvormed numrene på de respektive funktionspar udvælges. Disse sandsynligheder, p(i) må alle være positive tal mellem 0 og 1, og de skal tilfredsstille betingelsen, at summen af de K sandsynligheder skal være 1. Lad os antage, at vi har givet disse sandsynligheder, p(i) for i fra 1 til K, således at denne betingelse er opfyldt, og lad os overveje, hvordan vi kan få maskinen til at foretage et tilfældigt valg, svarende til disse sandsynligheder.

I Comal er der en funktion RND, som frembringer et tilfældigt tal med jævn sandsynlighedsfordeling mellem 0 og 1. Vi behøver derfor blot at dele intervallet mellem 0 og 1 op i K delantervaller med længder svarende til sandsynlighederne p(i), så kan vi hver gang lade valget afgøres ved nummeret på det interval, som det frembragte tilfældige tal falder indenfor. Hvis vi anbringer intervallerne i nummerorden, således at det første interval har venstre endepunkt i 0 og højre endepunkt i p(1), kan vi bestemme de højre endepunkter cp(i) for intervallerne 1-K ved programmet

```
cp(1):=p(1)
FOR i:=2 TO K DO cp(i):=cp(i-1)+p(i)
```

Det sidste interval har så højre endepunkt cp(K)=1. Et tilfældigt valg af et i mellem 1 og K i overensstemmelse med sandsynlighederne p(i) kan så foretages på følgende måde:

```
z:=RND
i:=1
WHILE cp(i)<z DO i:=i+1
```

Hvis alle sandsynlighederne har samme værdi (1/K), er det ikke nødvendigt at udregne størrelserne cp(i), idet valget af i kan foretages ved den simple opskrift

```
i:=1+INT(K*RND)
```

hvor vi har benyttet funktionen INT(x), hvis værdi er det største hele tal, som er mindre end eller lig med x.

I kapitel 1 blev det bemærket, at simpel iteration af en enkelt funktion kræver, at funktionen er ikke-lineær, hvis der skal komme noget ikke-trivielt ud af det. Indførslen af det tilfældige valg mellem flere funktioner i IFS-metoden gør, at selv lineære funktioner kan frembringe interessante, såkaldte fraktale, figurer. De følgende eksempler på IFS benytter kun lineære funktioner, og simpelheden af funktionsudtrykkene giver sig udtryk i en simpel form for ligedannethed mellem del og helhed af figurerne, som kaldes <u>selv-similaritet</u> . En ret linje er selv-similær, men som påpeget af matematikeren B. Mandelbrot er der mange andre muligheder for selv-similære figurer, og det er i første omgang sådanne figurer, som Mandelbrot indførte betegnelsen fraktaler for.

Vi starter med konstruktion af <u>Serpinski-trekanten</u> . Der er givet tre punkter, (xp(1),yp(1)), (xp(2),yp(2)) og (xp(3),yp(3)), som ikke ligger på samme rette linje. I den på fig. 5 viste Serpinski trekant, udgør disse punkter vinkelspidserne af den store, ligesidede trekant, men det er uvæsentligt, at trekanten er ligesidet. Der skal bruges tre lineære afbildninger af punkterne (x,y) i planen. Afbildning nr. i multiplicerer simpelthen punktets afstande i x- og y-retningen til det faste punkt (xp(i),yp(i)) med faktoren ½. En sådan afbildning kaldes en affinitet til et punkt. Den enkelte afbildning, samt valget mellem de tre affiniteter (samme sandsynlighed) kan foretages med proceduren:

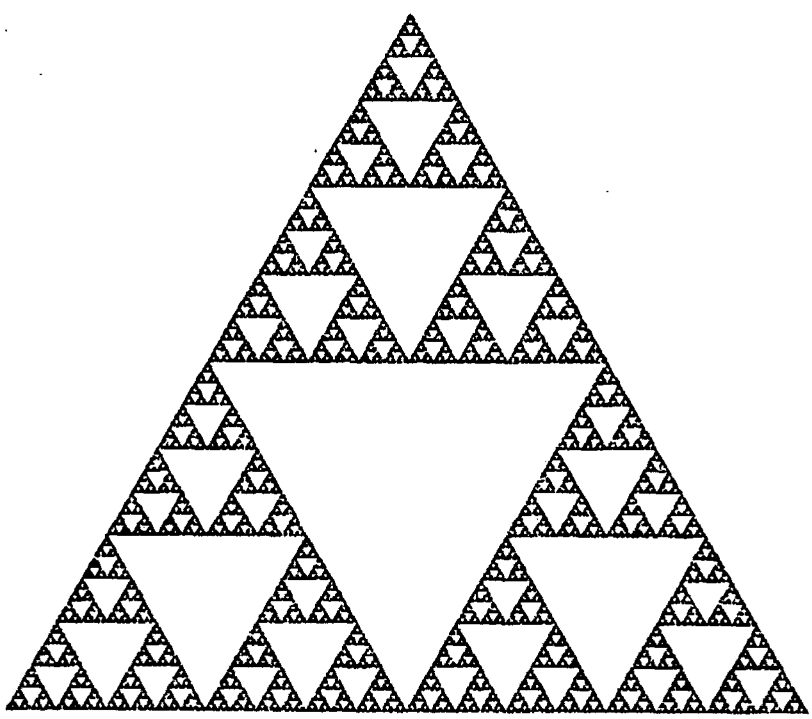
```
PROC serpin3
    n:=1+INT(3*RND)
    x:=0.5*(x+xp(n))
    y:=0.5*(y+yp(n))
ENDPROC serpin3
```

Denne procedure benyttes i nedenstående program, som starter med at erklære variabelsættene xp(i) og yp(i) og tildele dem værdier. Derefter vælges startværdi for (x,y) i trekantens tyngdepunkt midt på skærmen. Der udføres så en såkaldt <u>indsvingning</u> på 1000 iterationer, som foregår "bag kulisserne", dvs. uden at de resulterende punkter afmærkes på skærmen. Først efter, at indsvingningen har elimineret de "forbigående" (transiente) punkter, starter den egentlige iteration, som fortsættes, indtil brugeren trykker på en tast. Efter afbrydelse af tegningen, vil et nyt tryk på en tast fjerne billedet og bringe tekstskærmen tilbage.

```
DIM xp(3),yp(3)
xp(1):=100
yp(1):=0
xp(2):=540
yp(2):=0
xp(3):=320
yp(3):=200
USE graphics
graphicscreen(0)
x:=320
y:=200
FOR k:=1 TO 1000 DO serpin3
WHILE KEY$<>"" DO NULL
WHILE KEY$="" DO
    serpin3
    plot(x,y)
ENDWHILE
WHILE KEY$<>"" DO NULL
WHILE KEY$="" DO NULL
textscreen
END
```

(Et lille fif: bemærk, at WHILE sætningerne optræder i par, således at karakterbufferen først tømmes for eventuelle indestående karakterer, inden den næste WHILE sætning går i gang med at gøre noget, så længe der ikke trykkes på en tast. I RC-COMAL, skal man i stedet for den tomme streng "" benytte udtrykket CHR$(0)).

Selv-similariteten af den ligesidede Serpinski-trekant på fig. 5 kan beskrives således: Hvis vi fra trekantens øverste punkt går ned til midtpunkterne af de omsluttende sider, får vi her en lille trekant, som er ligedannet med den store. Inden i den lille trekant kan vi finde samme forhold. Hvis vi tænker på de afmærkede punkter som havende masse og de hvide områder som masseløse, vil det gælde, at en halvering af sidelængden for en trekant med toppunkt i det øverste punkt af figuren fører til en mindre trekant, hvis masse er en tredjedel af den oprindelige trekants. Eller, hvis vi går fra det mikroskopiske til det makroskopiske: når længdeskalaen forøges med en faktor 2, forøges massen med en faktor 3. Som vi skal diskutere i de følgende kapitler, betyder dette, at vi kan tilskrive Serpinski-trekanten <u>den fraktale dimension</u> (ligedannethedsdimensionen) log(3)/log(2) = 1.585.



<u>Fig. 5</u> . Serpinski-trekanten.

Vi kan forestille os, at vi fremstiller en materiel Serpinski-trekant på følgende måde: Vi starter med en ligesidet trekant af krydsfinér. Så forbinder vi midtpunkterne af trekantens sider med linjer og saver langs disse med en løvsav, således at vi får udskåret en trekant i midten. Dernæst gennemfører vi samme operation på de tre tilbageværende trekanter, og igen på de 3*3 resterende trekanter, og således bliver vi ved i en uendelighed.

Lad os antage, at den store trekant, vi startede med, vejede 1 kg. Spørgsmålet er nu: hvor meget vejer alle de udsavede småtrekanter tilsammen? Det kan let udregnes ved simpel matematik. Den første trekant, vi savede ud, har et areal på 1/4 af den oprindelige trekants, så den må veje 1/4 kg. De tilbageblevne tre trekanter vejer hver 1/4 kg, og fra dem skal vi i næste omgang udsave de tre midtertrekanter, som så hver især må veje (1/4)*(1/4) kg. Vi kan da let indse, at den samlede vægt af de uendelig mange trekanter, vi har udsavet, når vi er færdige, må kunne skrives på formen:

$$\text{vægt i kg} = (1/4)*(1 + 3/4 + (3/4)^2 + (3/4)^3 + \ldots).$$

Den uendelige sum i parantesen er en såkaldt kvotientrække af typen $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$, hvor kvotienten q har værdien 3/4, dvs. den er numerisk mindre end 1. For en sådan række gælder det, at den uendelige sum har værdien $1/(1-q)$, så vi finder:

$$\text{vægt i kg} = (1/4)*(1/(1 - 3/4)) = 1.$$

De udsavede småtrekanter vejer tilsammen præcis lige så meget som den store trekant, vi startede med! Den resterende Serpinski-trekant, som stadig indeholder en utællelig mangfoldighed af punkter, er en "uendelig tynd" mængde, en såkaldt Cantor-mængde, og det hænger sammen med, at dens fraktale dimension, som vi udregnede til 1.585, er mindre end dimensionen af det rum, den er indlejret i (2).

Det næste eksempel på IFS involverer kun to lineære funktioner med samme sandsynlighed. Resultatet bliver et todimensionalt område, "drageøen", med en indviklet, fraktal "kystlinje". Vi kan benytte følgende procedure:

```
PROC drageifs(x0,y0,scx,scy,n)
    x:=x0
    y:=y0
    FOR k:=1 TO n DO
        x1:=0.5*(x-y)+SGN(RND-0.5)
        y:=0.5*(x+y)
        x:=x1
        plot(scx*x,scy*y)
    ENDFOR k
ENDPROC drageifs
```

Her er (x0,y0) startpunktet for punktfølgen (x,y). Proceduren laver n iterationer og plotter punkterne med brug af skalakonstanterne scx og scy. Det er i dette tilfælde ikke nødvendigt at foretage indsvingning; man skal blot sørge for, at (x0,y0) ligger i det indre af øen, som efterhånden bliver helt udfyldt med punkter; dvs. x0 skal helst ligge mellem -5/3 og 5/3, og y0 mellem -1/3 og 1/3. Et passende program til tegning af drageøen kan være:

```
USE graphics
graphicscreen(0)
drageifs(0,0,100,50,10000)
```

Med 10000 punkter, som her angivet, får man ikke øen helt udfyldt; der vil være punkter, som først rammes efter en meget langstrakt proces, om nogensinde. En vis tålmodighed kræves, når man laver fraktaler, men alt med måde!

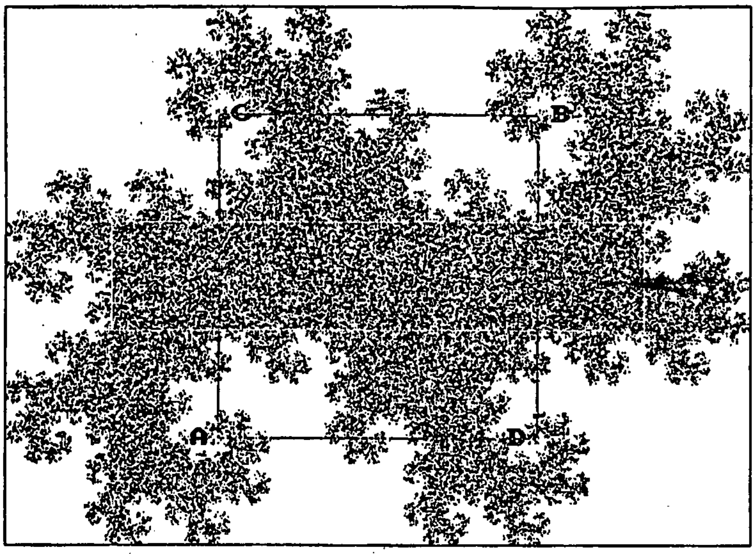


Fig. 6 . Drageøen.

Drageøen har et symmetricentrum i (0,0). På figuren vises tre forskellige rektangler med samme centrum: Det omskrevne rektangel har kantlængderne 14/3 og 10/3, og det indskrevne (tynd hvid streg) har kantlængderne 10/3 og 2/3. Endelig vises et kvadrat med kantlængden 2 og vinkelspidser i punkterne A, C, B og D. Vi skal senere, under omtalen af dragekurven , komme ind på betydningen af disse punkter.

Drageøens kystlinje viser sin fraktale selv-similaritet ved, at store halvøer er besat med små halvøer af samme form, og inden i de store bugter er der små bugter med samme form som de store bugter. Hvad mere er: halvøer og bugter, figur og baggrund udviser de samme formelementer. Man kan dække planen med identiske puslespilsbrikker af form som drageøen. Afstanden mellem nabobrikkers centrer må så være 4 (= 7/3 + 5/3) i x-retningen og 2 (= 5/3 + 1/3) i y-retningen. Vi vender tilbage til problemet om "tiling", dvs. "flisedækning", i forbindelse med dragekurven i kapitel 5.

Som det sidste eksempel på IFS metoden ser vi på konstruktionen af bregnebladet på bogens forside. Til denne, meget naturligt udseende fraktal kræves fire lineære funktionspar (sml. lign. (4)):

$$F_i(x,y) = a_i*x + b_i*y$$
$$G_i(x,y) = c_i*x + d_i*y + e_i \qquad (5)$$

hvor i altså kan antage værdierne fra 1 til 4. Der benyttes således 20 parametre a_1 - - e_4, men vi kan straks fra starten fastsætte a_1=b_1=c_1=e_1=0. Det første funktionspar bliver således en projektion ind på y-aksen, som frembringer den nederste, lodrette del af bregnebladets midterribbe. De resterende 16 parametre kan varieres inden for ret vide rammer, hvorved der kan laves blade med mange forskellige størrelser og krumninger. Det andet og tredje funktionspar har betydning for krumningerne og det fjerde for størrelsen, men vi skal ikke her gå i matematiske detaljer. Parametrene, som er benyttet til tegningen på forsiden, er angivet i nedenstående skema:

i	a	b	c	d	e
1	0	0	0	0.25	0
2	0.85	0.04	-0.04	0.85	1.6
3	0.2	-0.26	0.26	0.22	0.8
4	-0.15	0.28	0.26	0.24	1

Sandsynlighederne for valg af de fire funktionspar betyder ikke noget for bladets endelige form, men er afgørende for fordelingen af punkter i de forskellige områder. Benyt f.eks. p_1=0.02, p_2=0.8, p_3=0.08, p_4=0.1.

Den nedenfor angivne procedure forudsætter, at parametrene og de "cumulative" sandsynligheder cp(i) (sml. indledningen til dette kapitel) i forvejen er dimensionerede og tildelt værdier. Ligesom proceduren serpin3 bestemmer den valget af funktionsparret og opererer en enkelt gang på det givne talpar (x,y):

```
PROC bladifs
    z:=RND
    i:=1
    WHILE cp(i)<z DO i:=i+1
    x1:=a(i)*x+b(i)*y
    y:=c(i)*x+d(i)*y+e(i)
    x:=x1
ENDPROC bladifs
```

Med de opgivne parameterværdier vil bladet dannes inden for en ramme med x mellem -3 og 3 og y mellem 0 og 12. Følgende lille program vælger først et tilfældigt startpunkt inden for denne ramme. Dernæst foretages indsvingning, og til sidst plottes (indtil man afbryder ved tryk på en tast) punkterne (x,y) passende skaleret til en skærm med 640*200 punkter. For at udnytte skærmens opløsningsevne bedst er y-værdierne afsat vandret og x-værdierne lodret:

```
x:=6*(RND-0.5)
y:=12*RND
FOR k:=1 TO 100 DO bladifs
WHILE KEY$<>"" DO NULL
WHILE KEY$="" DO
    bladifs
    plot(53*y,33*(x+3))
ENDWHILE
```

Bregnebladet er blot ét eksempel på fraktalgeometriens evne til frembringelse af naturligt udseende objekter. IFS metoden er en af de vigtigste teknikker til dette formål, men der er udviklet andre metoder, som er gode til f.eks. skyer og bjerge. Et fraktalprogram, der kan fremstille vellignende landskabsbilleder kræver et sæt parametre, der specificerer f.eks. bjergkædernes "forrevethed" og skyernes mængde og art (cirrus, cumulus, nimbus). I forhold til det frembragte billedes informationsmængde (128000 bits for et normalt skærmbillede med 640*200 punkter) er informationsindholdet i parameterværdierne meget lille (ca 100 bits for bregnebladets parametre). Et fraktalprogram frembringer ny information , eller man skal måske snarere sige, at computeren udfolder information , som i infoldet form, eller "kimform" befinder sig i programmet og parametrene.

Bortset fra de kommercielle anvendelser af sådanne metoder, er der interessante filosofiske og naturvidenskabelige perspektiver i den tanke, at formdannende processer i naturen, f.eks. fosterets udvikling, foregår efter lignende principper. Selve det faktum, at vi med simple fraktalprogrammer og et fåtal af parametre kan lave naturligt udseende billeder, er selvfølgelig ikke noget bevis på, at naturen fungerer på samme måde; det er klart, at virkeligheden er langt mere kompliceret end ethvert program. Men hvis man vil forstå principperne bag naturens dannelse af former, er det nok en god begyndelse, at man i en vis, begrænset forstand kan efterligne dem.

Kapitel 3 : Fraktal dimension: DLA-støvfnug og prikfraktaler .

I kapitel 1 så vi på en rent deterministisk iterationsproces, dvs. hele forløbet var entydigt bestemt ud fra begyndelsesværdierne af x og y. Med IFS metoden i kapitel 2 introduceredes et element af tilfældighed i valget af et funktionspar for hvert skridt i iterationen. Vi skal nu gå et skridt videre i denne retning og se på en helt indeterministisk proces, hvor tilfældigheden dominerer totalt. Det er den såkaldte DLA-proces, der kan opfattes som en model for dannelsen af støvfnug. Navnet DLA betyder diffusion-limited aggregation .

En samling partikler, der uafhængigt af hinanden udfører tilfældige bevægelser (brownske bevægelser) siges at diffundere. Hvis en sådan samling af partikler til at begynde med er koncentreret i et lille område, vil de under diffusionen efterhånden fjerne sig fra hinanden, ikke fordi de frastøder hinanden (deres bevægelser antages at være uafhængige), men simpelthen fordi en konfiguration, hvor partiklerne ligger tæt sammen, er meget usandsynlig i forhold til en konfiguration, hvor de er mere jævnt spredt ud. Hvis vi anbringer en koncentreret klat farvet væske i et stort rumfang ufarvet væske, vil diffusionen efterhånden udbrede farven, således at klattens areal stort set vokser proportionalt med den forløbne tid.

Vi kan nemt simulere en brownsk bevægelse af en partikel på computerskærmens kvadratiske punktgitter. Vi skal så blot sørge for, at partiklen ikke diffunderer udenfor skærmen. Følgende lille program vælger for hvert skridt en af fire tilfældige bevægelsesretninger, undtagen når partiklen er på randen af skærmen:

```
x:=640*RND
y:=200*RND
plot(x,y)
WHILE KEY$<>"" DO NULL
WHILE KEY$="" DO
    kurs:=INT(4*RND)
    IF kurs=0 AND x<639 THEN x:=x+1
    IF kurs=1 AND y<199 THEN y:=y+1
    IF kurs=2 AND x>0 THEN x:=x-1
    IF kurs=3 AND y>0 THEN y:=y-1
    plot(x,y)
ENDWHILE
```

Da alle de afmærkede punkter bliver stående på skærmen, får man med dette program aftegnet hele banen for den diffunderende partikel. Hvis man kun vil se selve partiklen, må man sørge for at viske det gamle punkt ud, før man plotter det nye.

DLA processen startes ved, at en kim-partikel sættes fast på skærmens midte. Herefter startes en diffunderende partikel fra et tilfældigt sted på randen af skærmen. Denne partikel fortsætter sin bevægelse, indtil den rammer et af de fire nabopunkter til kimpartiklen, hvor den sætter sig fast. Kimen er så vokset til to partikler med ialt 6 nabopunkter. En ny partikel sættes i gang fra skærmranden og diffunderer, indtil den rammer et af disse nabopunkter, hvor den sætter sig fast. Således fortsættes, og efterhånden vokser kimen til en stor, uregelmæssig forgrenet struktur. Denne struktur fortsætter med at vokse, efterhånden som nye partikler sætter sig fast. Væksten sker næsten udelukkende fra spidserne af grenene; det er meget usandsynligt, at en partikel trænger dybt ind i en "fjord", dvs. et mellemrum mellem grene. Således kan vi forestille os, et støvfnug vokser. Når det er blevet stort, vil det have en meget lille massefylde, fordi mellemrummende bliver større, jo længere vi kommer bort fra centret. På fig. 7 vises resultatet af et eksperiment, hvor DLA fnugget er opbygget af 760 partikler.

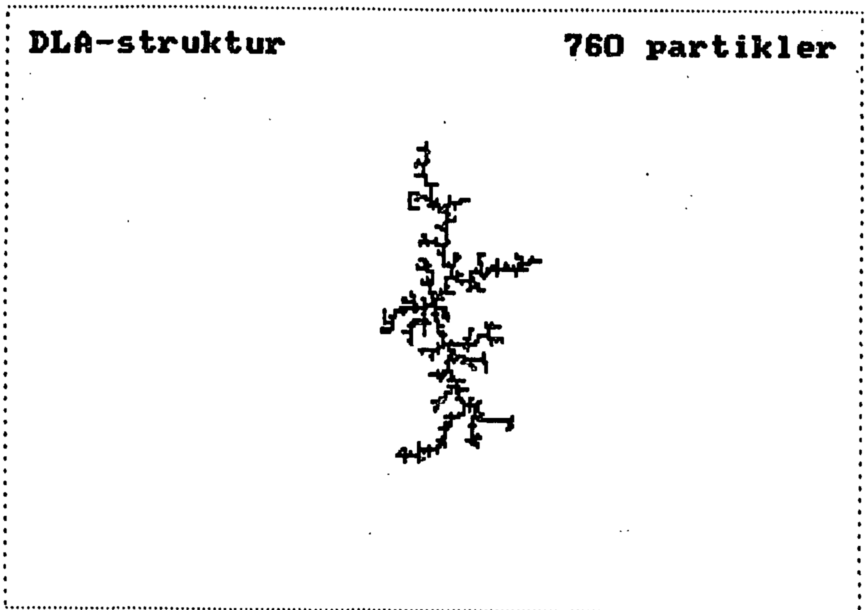


Fig. 7 . DLA-struktur.

For at undersøge fordelingen af partikler i en DLA-struktur, går vi frem på følgende måde. Med centrum i den oprindelige kimpartikel tænker vi os lagt et kvadrat med kantlængden L skærmpunkter, hvor L er et ulige heltal. Vi tæller så, hvor mange partikler, N(L), der befinder sig inden i og på randen af dette kvadrat, og dette gør vi for alle værdier af L fra 1 og op til en så stor værdi, at hele støvfnugget kan være inden i kvadratet. For L=1 er N=1, idet kimpartiklen jo er i centrum, og når L er så stor, at hele støvfnugget er i kvadratet, er N(L) lig med det totale antal partikler i strukturen. Funktionen N(L) for strukturen på fig. 7 er vist i et dobbeltlogaritmisk diagram på fig. 8.

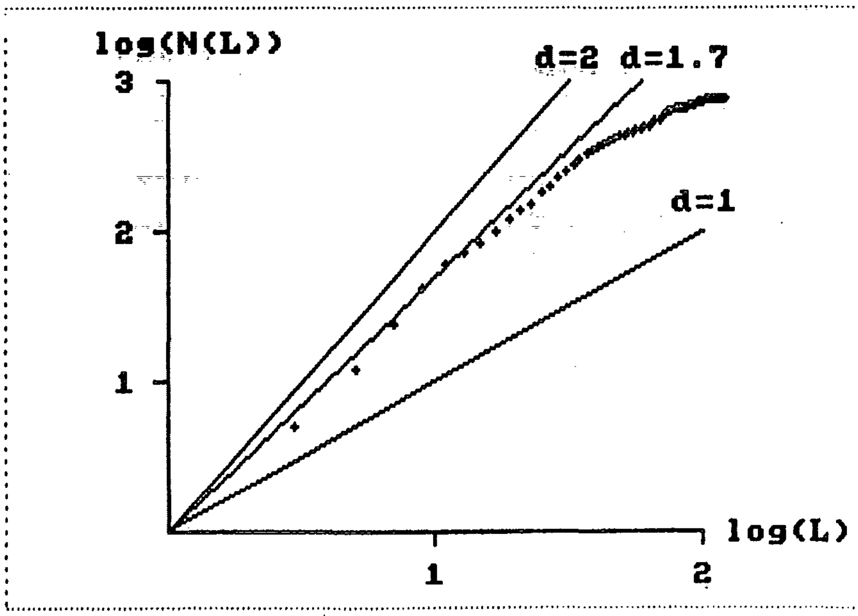


Fig. 8 . Dobbeltlogaritmisk diagram for N(L) fra fig. 7.

Hvis nu punkterne stort set var jævnt fordelt i planen, ville N(L) vokse proportionalt med arealet af kvadratet, dvs. proportionalt med L^2, og i det dobbeltlogaritmiske diagram ville punkterne følge en linje med hældningskoefficienten d=2. Hvis derimod punkterne hang sammen i en endimensional tråd, ville vi få en linje med hældningskoefficienten d=1. Begge disse linjer er indtegnede på fig. 8, og som man kan se, følger punkterne ingen af dem. Derimod følger de i et stort interval ret godt en linje med hældningskoefficienten d=1.7. Vi tilskriver derfor DLA-strukturen den fraktale dimension (ligedannethedsdimensionen) 1.7. Forsøg med langt større DLA-fnug (100000 partikler) viser en ret lille spredning af den således bestemte dimension, selv om fnuggene kan falde meget forskellige ud. Strukturen af det underliggende gitter, om det er kvadratisk eller triangulært er underordnet, og det gør heller ikke noget, om man definerer "naboer" anderledes, således at der er 8 naboer til et punkt på et kvadratisk gitter. Den fraktale dimension af DLA-strukturer afhænger imidlertid af dimensionen af det euklidiske rum, de er indlejrede i: i tre dimensioner fås $d=2.5$.

Lad os overveje, hvad det betyder, når funktionen $N(L)$ i et dobbeltlogaritmisk diagram falder på en ret linje med hældningskoefficienten d. Dvs. der er tale om en potensfunktion

$$N(L) = k \cdot L^d \tag{6}$$

En sådan funktion er <u>skalainvariant</u>, dvs. hvis vi omdefinerer "enheden" for længden L ved at gange talværdien med en vilkårlig positiv skalakonstant, ξ, så vil der kunne bestemmes en skalakonstant, η, for "massen" N, således at de skalerede størrelser

$$L_\xi = \xi \cdot L \; ; \; N_\eta = \eta \cdot N \tag{7}$$

stadig følger samme potenslov:

$$N_\eta(L_\xi) = k \cdot L_\xi{}^d \tag{8}$$

Vi skal blot vælge $\eta = \xi^d$.

Blandt "pæne" (analytiske, dvs. vilkårligt ofte differentiable) funktioner er det kun potensfunktioner, som således er invariante overfor skalatransformationer. At masse- fordelingen i en DLA struktur er skalainvariant betyder altså, at den ser ens ud i det store og i det små, og at den kan beskrives med en fraktal dimension d, som i ligning (6). Hvis længdeskalaen forøges med faktoren ξ, vil masseskalaen forøges med faktoren $\eta = \xi^d$, uanset hvor stor, længdeskalaen var til at begynde med. Den fraktale dimension hænger altså sammen med skalafaktorerne ved formlen:

$$d = \log \eta / \log \xi \tag{9}$$

Denne skalainvarians findes ofte for naturlige fænomener, men kun inden for et vist interval af størrelsesordener (med "en størrelsesorden" forstås normalt en faktor 10, dvs. 1 på en logaritmisk skala, hvis man bruger 10-tals logaritmer). På fig. 8 ser man kun en omtrentlig skalainvarians over knapt to størrelsesordener, og det er jo ikke meget, men skærmens begrænsede opløsningsevne levner jo ikke plads til ret meget mere.

En uendeligt udstrakt fraktal struktur, hvis dimension d er mindre end dimensionen af det euklidiske rum, den er indlejret i, vil have den gennemsnitlige massefylde 0 (og støvfnug <u>er</u> jo som bekendt lette), for massefylden er jo forholdet mellem masse og "rumfang" (areal i 2 dimensioner), og når massen N vokser med en mindre potens af den lineære dimension L end rumfanget, når L går mod uendelig, vil massefylden gå mod nul. Det er det samme forhold, som gør sig gældende for Serpinski-trekanten i foregående kapitel, som jo også viste sig at være uendelig let.

Skalainvariansen af DLA-støvfnugget er en form for selv-similaritet, dvs. delen er ligedannet med det hele, men ligedannetheden er i dette tilfælde statistisk, ikke eksakt. På tilsvarende måde er selv-similariteten af naturlige former som bjerge, åer og skyer af statistisk art, men i enkelte tilfælde, som f.eks. bregnebladet, finder vi en selv-similaritet, som er næsten lige så eksakt som Serpinski-trekantens. I det følgende skal vi se på, hvordan vi konstruerer eksakt selv-similære former. Det sker ved indlejring af et formelement i sig selv, og metoden kaldes rekursiv programmering. Princippet kan sammenlignes med en kinesisk æske. Når vi åbner en sådan, finder vi en mindre æske indeni, og når vi åbner denne, viser den sig at indeholde en endnu mindre æske. Således kan vi fortsætte, indtil vi kommer til den inderste æske, som ikke kan åbnes. Hvis vi har åbnet n æsker, før vi kommer til den inderste, siger vi, at den yderste æske er på niveau n , den næstyderste på niveau n-1, osv., den inderste på niveau 0.

Lad os forestille os, at vi er ude på tur med vores rumskib. Vi ser i det fjerne en underlig struktur:

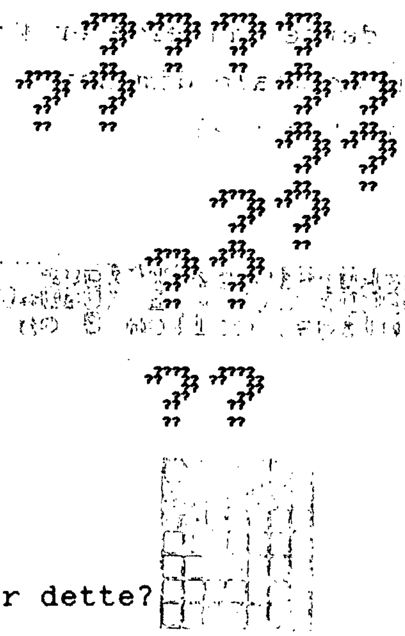
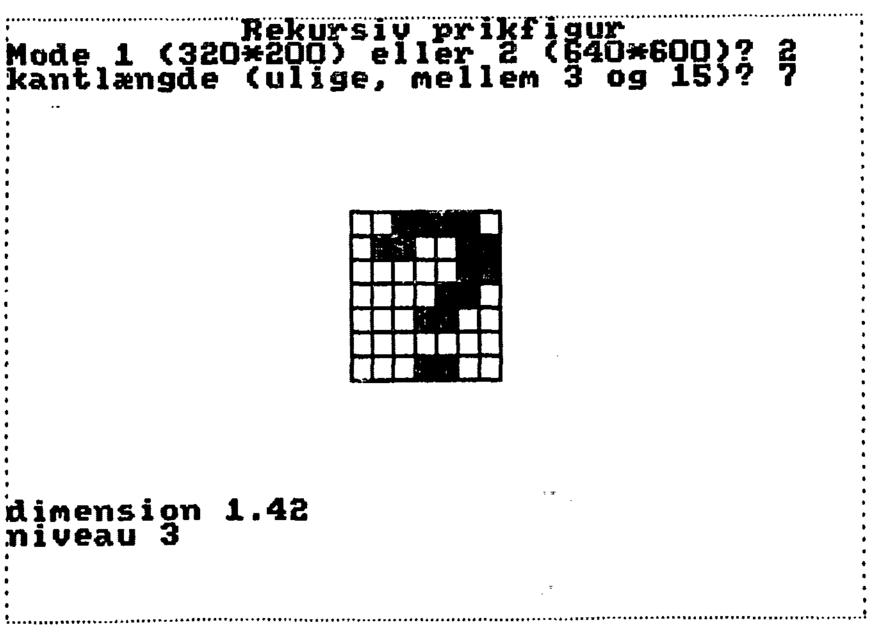


Fig. 9 . Hvad er dette?

På lang afstand (og det er mange lysår!) ligner det et spørgsmålstegn, opbygget af prikker. Mon disse prikker er stjerner? Nej, når vi kommer nærmere, ser vi, at de er spørgsmålstegn, opbygget af mindre prikker. Og selv disse prikker viser sig i kikkerten som små spørgsmålstegn, opbygget af prikker. Eller er det prikker?

Når vi er kommet så langt i vores overvejelser, har vi indset, at der er tale om en <u>prikfraktal</u>, dvs. en selv-similær struktur, som kan opbygges af en <u>generator</u> bestående af et prikmønster. Generatoren for fig. 9 er åbenbart et spørgsmålstegn, som jo kan opbygges af prikker på et kvadratisk gitter. Bogstaver og andre tegn på computerens skærm kan opbygges på et kvadrat med 7*7 felter, og spørgsmålstegnet er opbygget som vist på fig. 10. Det må være tilstrækkelige data til konstruktion af det fraktale spørgsmålstegn i så mange niveauer, som der er plads til på skærmen. Når vi kender den lineære udstrækning af generatoren i forhold til byggeelementet (prikken), har vi skalafaktoren s i ligning (9), og antallet af prikker giver masse-skalafaktoren m. I dette tilfælde er $s=7$ og $m=16$, så vi kan straks udregne den fraktale dimension af strukturen på fig. 9 til log(16)/log(7) = 1.42.



<u>Fig. 10</u> . Generator for fig. 9.

Konstruktionen af en prikfraktal er simplest, hvis generatoren er bygget på et kvadratisk gitter med et ulige antal felter på hver led. Så er centret af kvadratet jo sammenfaldende med centret af det midterste felt. Vi kan angive koordinaten af midterfeltet i forhold til generatorkvadratet som (0,0). Lad os sige, at kantlængden af generatoren er det ulige heltal g = 2s+1, og at der indgår p prikker i generatoren. Koordinaterne for disse prikker kan så dimensioneres som arrays xg(i) og yg(i), hvor i løber fra 1 til p, og hvor hvert xg og yg kan antage værdier fra -s til s. Alle disse indledende manøvrer kan ordnes simpelt med følgende lille program, som også udregner dimensionen:

```
DIM xg(49),yg(49)
INPUT "kantlængde (ulige) ": g
INPUT "antal prikker (max. 49) ": p
PRINT "dimension: ", LOG(p)/LOG(g)
FOR k:=1 TO p DO
    PRINT k;": ";
    INPUT "xg, yg ": xg(k),yg(k)
ENDFOR k
```

Selve konstruktionen varetages af en rekursiv procedure, dvs. en procedure, der kalder sig selv. Hvis proceduren udefra kaldes på niveau n, så må de i procedurekroppen forekommende kald være på et lavere niveau (n-1 eller mindre) og desuden må der være en konkret (ikke-rekursiv) beskrivelse af, hvad proceduren skal gøre, hvis niveauet er 0. Det kommer således til at foregå ligesom nedenstående, velkendte rekursive definition af fakultetsfunktionen:

$$n! = n\cdot(n-1)! \;;\; 0! = 1. \qquad (10)$$

Når en prikfraktal skal tegnes på niveau 0, skal der simpelthen sættes en prik i et opgivet punkt, (cx,cy). For at udnytte skærmen bedst muligt, vil vi lade denne prik være så lille som muligt, dvs. en pixel. På niveau 1 vil vi lade centret ligge i det opgivne punkt (cx,cy), og figurens udstrækning bliver g pixels på hver led. På niveau 2 skal vi for hver prik i generatoren tegne selve generatoren, og figurens udstrækning bliver g^2 pixels på hver led. Lad os nu se, hvordan vi kan opbygge proceduren:

```
PROC rekprik(n,cx,cy)
  IF n=0 THEN
    plot(cx,cy)
  ELSE
    FOR k:=1 TO p DO
      rekprik(n-1,cx+g↑(n-1)*xg(k),cy+g↑(n-1)*yg(k))
    ENDFOR k
  ENDIF
ENDPROC rekprik
```

Som vi skal se i næste kapitel, kan vi opbygge alle de rekursive tegneprocedurer efter samme enkle skema:

IF niveau=0 THEN tegn byggeelement ELSE opbyg generator med byggeelementer erstattet af den ønskede rekursive figur på et niveau, som er 1 mindre end det opgivne niveau.

For at få plads til den størst mulige rekursive prikfigur på skærmen må man lade centret (cx,cy) ligge midt på skærmen (320,100). Det maximale niveau, nmax, er så givet ved, at kantlængden g opløftet til potensen nmax skal være mindre end antallet af pixels på skærmens korte led (200). Dvs. vi kan beytte følgende procedurekald:

```
rekprik(INT(LOG(200)/LOG(g)),320,100)
```

Prøv nu at tegne nedenstående figur (Fournier-gitter på niveau 4). Her er g=3, p=5, dvs. dimensionen er log 5/log 3 = 1.46. Koordinaterne for de 5 prikker i 3*3 generatoren er: (-1,1), (1,1), (0,0), (-1,-1) og (1,-1).

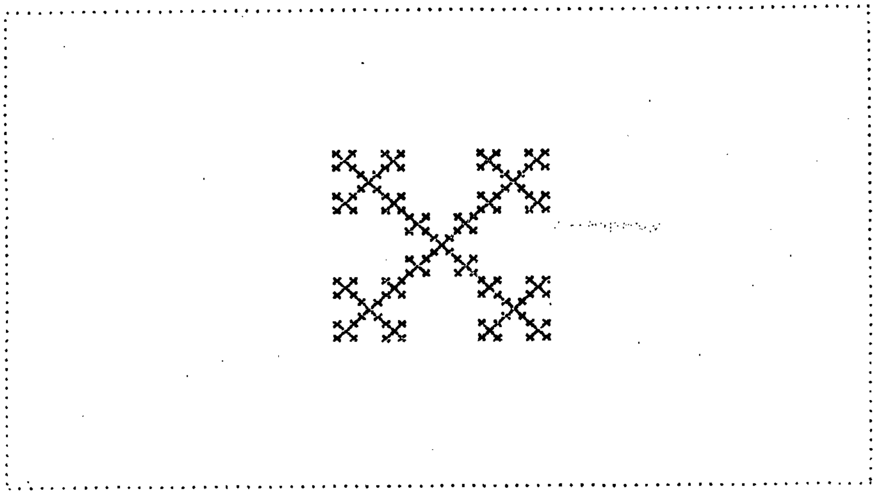


Fig. 11 . Fournier gitter, niveau 4.

Prøv også med g=3 at lave figuren med p=2, og koordinaterne (-1,0) og (1,0). Da punkterne her ligger på en vandret linje, og da skærmen har flere punkter på den vandrette led, er det muligt at gå til niveau 5. I dette tilfælde er dimensionen mindre end 1 (log 2/log 3 = 0.63). Figuren kaldes det originale Cantor-sæt .

Kapitel 4 :

Rekursive stregtegninger: Skildpadde-generatorer .

Prikfraktalerne i kapitel 3 var definerede ved en generator, hvis byggeelementer var prikker. På lignende måde kan vi definere stregfraktaler, hvor byggeelementet i generatoren er streger. Vi vil holde os til tilfælde, hvor generatoren er opbygget af lige lange linjestykker, og for at undgå trigonometriske udregninger af endepunkterne for disse linjestykker, vil vi benytte os af den såkaldte skildpadde-grafik , der findes som en særlig pakke i Uni-Comal og fremkaldes med kommandoen USE turtle. (RC-Comal har ikke turtle-pakken, men den findes på den til denne tekst hørende RC-Comal diskette).

Når skildpaddegrafikken er kaldt frem, ser man i et grafisk vindue midt på skærmen skildpadden som en pilespids, der peger lodret opad. Dette er skildpaddens udgangsposition, og til dette sted og denne retning vil den returnere, når den får kommandoen home. Øverst på skærmen er der et textvindue, hvor kommandoerne kan skrives, og man kan da straks se dem blive udført. Prøv f.eks. at skrive: ht (hide turtle, skildpadden bliver usynlig), st (show turtle, den kommer frem igen), rt(90) (right 90, drej 90^{o} til højre), fd(100) (forward 100, gå fremad stykket 100), lt(45) (left 45, drej 45^{o} til venstre), pu (pen up, løft pennen, så bevægelsen ikke trækker en streg), bk(50) (bak 50), pd (pen down, sænk pennen, klar til at tegne igen), home, cs (clear screen, slet grafikskærmen).

Fordelen ved skildpadden fremfor den sædvanlige grafik-cursor er, at skildpadden husker sin retning , ikke blot sin position. Mange af kommandoerne virker således relativt til både den nuværende retning og position, f.

eks. fd(s), som flytter skildpadden fremad stykket s fra det punkt, hvor den stod, og i den retning, dens næse peger. Der findes dog også <u>absolutte</u> kommandoer, som f. eks. seth(v) (setheading), der indstiller retningen til vinklen v, regnet med uret fra lodret, uanset hvad retningen var før.

Den følgende tabel giver en oversigt over de vigtigste skildpadde-kommandoer, samt deres forkortelser. Ud over disse, kan man stadig bruge de sædvanlige grafikkommandoer, såsom plot, draw og move.

<u>Kommando.</u>	<u>Betydning.</u>	<u>Forkortelse.</u>
back(s)	bak stykket s	bk(s)
clearscreen	slet grafik	cs
forward(s)	fremad stykket s	fd(s)
hideturtle	gem skildpadden	ht
home	gå hjem	
left(v)	drej v grader til venstre	lt(v)
pendown	sænk pen	pd
penup	løft pen	pu
right(v)	drej v grader til højre	rt(v)
setheading(v)	drej til retning v grader (fra lodret op, med uret)	seth(v)
showturtle	vis skildpadden	st

Kommandoen textscreen fjerner skildpaddegrafikken, så når man vil have den tilbage, må man igen skrive USE turtle.

Som en blød start vil vi nu skrive en skildpadde-procedure, som definerer en ny udgangsposition "ude vestpå med næsen mod øst".

```
PROC vest(s)
    seth(90)
    pu
    bk(s)
    pd
ENDPROC vest
```

Da skærmen har flest punkter på den vandrette led, er det bekvemt at lade de følgende stregfraktaler starte i et punkt A i venstre halvdel af skærmen og ende i et punkt B i højre halvdel. Vi vil forudsætte, at skildpadden før tegning står i A med næsen i retning af B, og at den slutter i B med næsen samme vej som ved starten. Som start kan man da skrive kommandoerne home, cs, vest(100).

Vi skal nu skrive procedurer for nogle rekursive stregtegninger, hvis generatorer er vist på fig. 12.

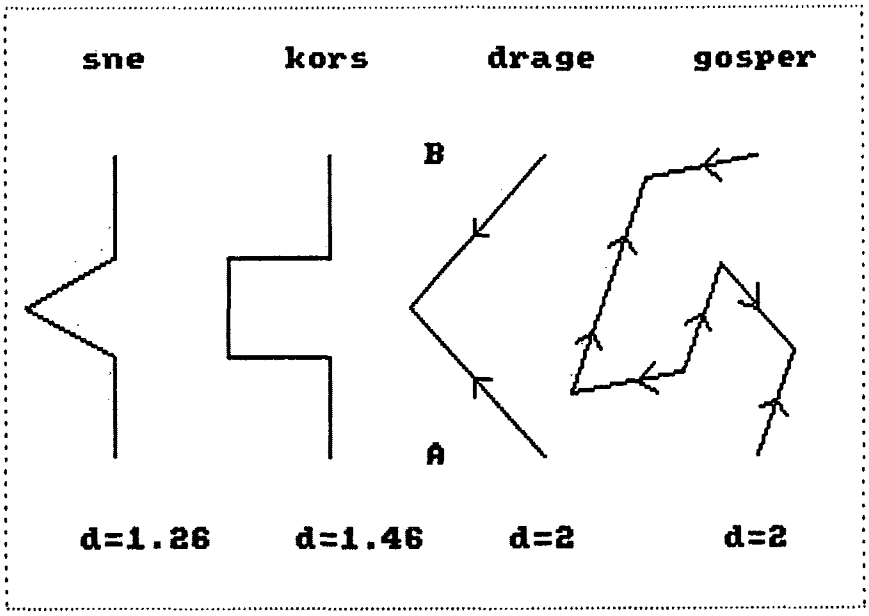


Fig. 12 . Generatorer for rekursive stregtegninger.

Generatorerne (niveau 1) for de rekursive tegninger er vist med begyndelsespunktet A nederst og slutpunktet B øverst. På niveau 0 vil de alle være en lodret streg fra A til B. Ud fra generatorerne kan vi udregne de fraktale dimensioner for figurerne efter samme system som tidligere. Lad os sætte længden af de enkelte linjestykker i generatoren til 1, og lad L betegne længden fra A til B, målt med denne enhed, medens N er antallet af linjestykker, der indgår i generatoren. L og N svarer så til de tidligere indførte skalafaktorer ξ og η, så dimensionen er givet ved:

$$d = \log N/\log L \qquad (11)$$

Nedenstående tabel viser N og L og den fra (11) udregnede fraktale dimension for de af generatorerne på fig. 12 frembragte stregfraktaler:

	sne	kors	drage	gosper
N	4	5	2	7
L	3	3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{7}$
d	1.26	1.46	2	2

To af fraktalerne, sne og kors, er altså "tynde", dvs. deres dimension er mindre end skærmens (2), medens de to andre, drage og gosper, er "fede" fraktaler" eller "space filling curves" som tenderer mod at udfylde et areal.

Vi starter med at lave en rekursiv skildpadde-procedure, der tegner kurven "sne" (den triadiske Koch-kurve eller snowflake-kurven). Vi skal bruge to input-parametre, niveauet n og AB-afstanden s. Hvert af de i generatoren indgående linjestykker har så længden s/3, og disse linjestykker skal i den rkursive procedure erstattes med "sne" på niveau n-1, ifølge den sædvanlige opskrift:

```
PROC sne(n,s)
    IF n=0 THEN
        fd(s)
    ELSE
        sne(n-1,s/3)
        lt(60)
        sne(n-1,s/3)
        rt(120)
        sne(n-1,s/3)
        lt(60)
        sne(n-1,s/3)
    ENDIF
ENDPROC sne
```

Proceduren forudsætter, at skildpadden ved kaldet er i punktet A med næsen i retning af B, og at den slutter i B med næsen samme vej. Den sidste betingelse er konsistent med, at skildpadden enten går lige frem (hvis n=0) eller, at den drejer ialt 120^{o} mod venstre og 120^{o} mod højre. Det er ligeledes forudsat, at pennen er nede ved kaldet, og det vil den så vedblive at være under udførslen.

Hvis vi nu, når proceduren er kompileret (run) giver kommandoerne USE turtle, vest(100) og sne(1,200), skulle vi gerne se generatoren blive tegnet vandret hen over skærmen. Derefter kan vi prøve at tegne kurven på niveau 4. Også højere niveauer kan prøves, men man må betænke, at for hver gang, vi sætter niveauet 1 i vejret, stiger udførselstiden med en faktor 4, og længden af de enkelte linjestykker bliver hurtigt mindre end skærmens opløsningsevne.

Vi kan også prøve at lade proceduren sne indgå i et program som det følgende, der på niveau 1 tegner en sekstakket stjerne og på højere niveauer noget i retning af en snekrystal, som har givet snowflake kurven sit navn:

```
INPUT "kantlængde ": L
INPUT "niveau ": niv
USE turtle
graphicscreen(0)
pu
fd(L*0.29)
vest(L/2)
sne(niv,L)
rt(120)
sne(niv,L)
rt(120)
sne(niv,L)
```

Prøv nu på egen hånd at skrive en tilsvarende rekursiv procedure for kurven "kors". Denne kurve er beslægtet med det på fig. 11 viste "Fournier gitter", hvilket jo antydes af, at den har samme dimension (log 5/log 3). Analogien viser sig klart, hvis man med kors-kurven vandrer rundt i et kvadrat mod uret. Hvis man går den anden vej rundt, kan man lave en flot "dækkeserviet i korssting".

Vi vender os nu til de to "fede" fraktaler, dragekurven og gosperkurven. På generatorerne for disse to er der angivet pile, der kan fortolkes som tegneretningen . Hvis vi ser på generatoren for dragekurven, viser den, at vi først skal gå (eller "drage") fra A til et punkt C på midtnormalen mellem A og B. Dernæst skal vi springe ned til punktet B, og herfra skal vi igen "drage" op til C. Endelig skal vi, som det hele tiden er forudsat, ende nede i B med næsen i retningen fra A til B. Skildpadden må altså foretage nogle hop undervejs, dvs. bevæge sig med løftet pen, men den skal slutte med pennen nede. Da forholdet mellem generatorlængden og linjestykket for drage-generatoren er givet ved det irrationale tal $\sqrt{2}$, kan det lønne sig i forvejen at udregne dette tal og indlægge det i en konstant sq2.

```
sq2:=SQR(2)
PROC drage(n,s)
  IF n=0 THEN
    fd(s)
  ELSE
    lt(45)
    drage(n-1,s/sq2)
    lt(90)
    pu
    bk(s/sq2)
    pd
    drage(n-1,s/sq2)
    pu
    bk(s/sq2)
    rt(135)
    pd
  ENDIF
ENDPROC drage
```

Hvis dragekurven tegnes, så forbindelseslinjen AB er vandret eller lodret, vil den komme til at bestå af vandrette og lodrette linjestykker på de lige niveauer, men af skrå linjestykker på de ulige niveauer. De skrå linjer er ikke så pæne på skærmens raster-gitter. En pæn dragekurve på et ulige niveau opnås, hvis AB danner vinklen 45° med vandret. På 13 vises en tegneserie med de lige niveauer fra 0 til 14. At kurven har den fraktale dimension 2, viser sig ved, at den danner en "øgruppe". Forbindelsen mellem denne øgruppe og den tidligere omtalte "drageø" viser sig, hvis man først tegner dragekurven på et ulige niveau (f.eks. 13) så retningen AB går 45° opad (som på fig. 6) og derefter tegner den samme kurve baglæns fra B til A. Vi vender tilbage til diskussion af dragekurven og drageøen i næste kapitel.

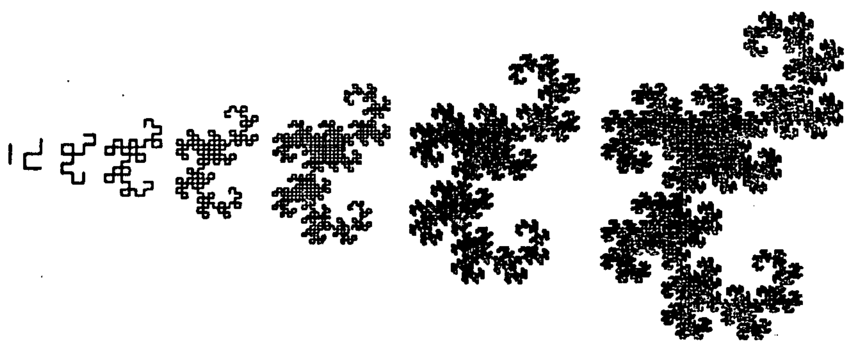


Fig. 13 . Dragekurven på de lige niveauer fra 0 til 14.

Vi går videre til Gosper-kurven, som er en af de mest interessante "space filling curves", fordi den, selv om den tenderer mod at udfylde et areal (kaldet "Frankrig"), på mirakuløs vis undgår at skære eller røre sig selv. Generatoren består af 7 linjestykker, af hvilke de to går i forlængelse af hinanden. Vinklerne mellem linjestykkerne er alle multipla af 60°, og afstanden mellem endepunkterne A og B er $\sqrt{7}$ gange så stor som længden af de enkelte linjestykker. Vi kan så ved brug af projektionssætningen udregne vinklen v mellem det første linjestykke og retningen AB. Vi skal blot løse ligningen

$$\cos(-v)+\cos(60^{\circ}-v)+\cos(180^{\circ}-v)+\cos(120^{\circ}-v)+2*\cos(-v)+\cos(-v-60^{\circ}) = \sqrt{7} \qquad (12)$$

Ligning (12) har kun den ene løsning cos v = $5\sqrt{7}/14$, hvilket svarer til, at v må have værdien 19.1066 grader. Vi kan så lave gosper-proceduren, idet vi tager hensyn til de på generatoren angivne tegneretninger:

```
sq7:=SQR(7)
PROC gosper(n,s)
    IF n=0 THEN
        fd(s)
    ELSE
        rt(19.1066)
        gosper(n-1,s/sq7)
        lt(120)
        pu
        fd(s/sq7)
        rt(120)
        pd
        gosper(n-1,s/sq7)
        rt(120)
        gosper(n-1,s/sq7)
        rt(120)
        pu
        fd(s/sq7)
        pd
        gosper(n-1,s/sq7)
        rt(120)
        gosper(n-1,s/sq7)
        gosper(n-1,s/sq7)
        lt(120)
        pu
        bk(s/sq7)
        pd
        gosper(n-1,s/sq7)
```

```
        pu
        bk(s/sq7)
        rt(100.8934)
        pd
    ENDIF
ENDPROC gosper
```

Den sidste drejning til højre på 100.8934 grader er bestemt ved, at den samlede højredrejning skal være lig med den samlede venstredrejning, for at skildpadden kan slutte med næsen den rigtige vej.

Som det ses af fig. 14, ligger størstedelen af "Frankrig" over linjen AB, så for at få en stor figur, er det godt at starte under midten. Skriv f.eks. pu, bk(35), vest(75), gosper(4,150).

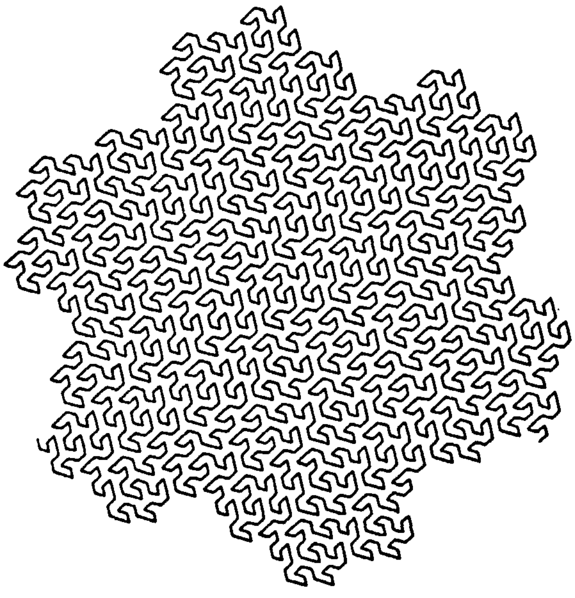


Fig. 14 . Gosperkurven, niveau 4.

Både drage- og gosperkurven er kontinuerte, så det kan virke lidt utilfredstillende at tegne dem så springende, som de to sidste procedurer gør. Kan de ikke tegnes, uden at pennen skal løftes undervejs? Jo, men for at gøre det, må vi have to procedurer, der gensidigt kalder hinanden. De dele af generatorerne, som gennemløbes "den forkerte vej" kan jo i stedet defineres som en anden procedure, hvor skildpaddens drejninger svarer til, at vi gennemløber samme kurve fra B til A. Nedenstående par af procedurer vil tegne gosperkurven sammenhængende:

```
PROC gosper1(n,s)
     IF n=0 THEN
         fd(s)
     ELSE
         rt(19.1066)
         gosper1(n-1,s/sq7)
         lt(60)
         gosper2(n-1,s/sq7)
         lt(120)
         gosper2(n-1,s/sq7)
         rt(60)
         gosper1(n-1,s/sq7)
         rt(120)
         gosper1(n-1,s/sq7)
         gosper1(n-1,s/sq7)
         rt(60)
         gosper2(n-1,s/sq7)
         lt(79.1066)
     ENDIF
ENDPROC gosper1
```

```
PROC gosper2(n,s)
     IF n=0 THEN
         fd(s)
     ELSE
         rt(79.1066)
         gosper1(n-1,s/sq7)
         lt(60)
         gosper2(n-1,s/sq7)
         gosper2(n-1,s/sq7)
         lt(120)
         gosper2(n-1,s/sq7)
         lt(60)
         gosper1(n-1,s/sq7)
         rt(120)
         gosper1(n-1,s/sq7)
         rt(60)
         gosper2(n-1,s/sq7)
         lt(19.1066)
     ENDIF
ENDPROC gosper2
```

På fuldkommen tilsvarende måde kan vi lave dragekurven sammenhængende. Vi vil dog nu prøve at gøre det lidt anderledes, for forskellen på at gennemløbe dragekurven fra A til B eller fra B til A består jo i det væsentlige i, om man starter med at dreje 45° til venstre eller til højre. Denne forskel kan vi udtrykke ved at indføre en ekstra input parameter "op", som skal være +1, hvis vi starter med at dreje til venstre og -1, hvis vi drejer til højre. Vi kan så skrive lt(op*45), for at dreje -45° til venstre er det samme som at dreje 45° til højre.

Medens vi er i gang, kan vi også indføre vinklen som en ekstra parameter v, så vi ikke altid skal dreje 45°. Afstanden mellem A og B er så $2 \cdot \cos v$, så dimensionen bliver

$$d = \log 2/\log(2 \cdot \cos v) \qquad (13)$$

Med den således generaliserede drageprocedure (dragegen, nedenfor) kan vi altså lave fraktaler med alle mulige dimensioner mellem 1 og 2 ved at lade v variere mellem 0° og 45°. For v>45° bliver d>2 iflg. (13) (∞ for v=60°, det skal man ikke tage for højtideligt). I proceduren benyttes en konstant omr=PI/180, som omregner fra grader til radianer.

```
PROC dragegen(n,s,v,op)
    IF n=0 THEN
        fd(s)
    ELSE
        lt(op*v)
        dragegen(n-1,s/(2*COS(omr*v)),v,1)
        rt(2*op*v)
        dragegen(n-1,s/(2*COS(omr*v)),v,-1)
        lt(op*v)
    ENDIF
ENDPROC dragegen
```

I dragegen indgår to kald af dragegen, det første med op=1, det andet med op=-1. Som en sidste lille øvelse i dette afsnit kan man prøve at eksperimentere med ændringer af op-værdierne i disse kald. F.eks. kan man prøve at lade den være +1, eller -1, eller op i begge kald. Eller man kan lave tilfældige, rekursive kurver, en slags brownske bevægelser med variabel dimension (den sædvanlige brownske bevægelse har fraktaldimensionen 2) ved at lade værdien af parameteren op, +1 eller -1, i de to kald være tilfældigt bestemt. Fordelen ved at lave tilfældige kurver på denne måde er, at man ikke alene har styr på, hvor de starter, men også på, hvor de ender.

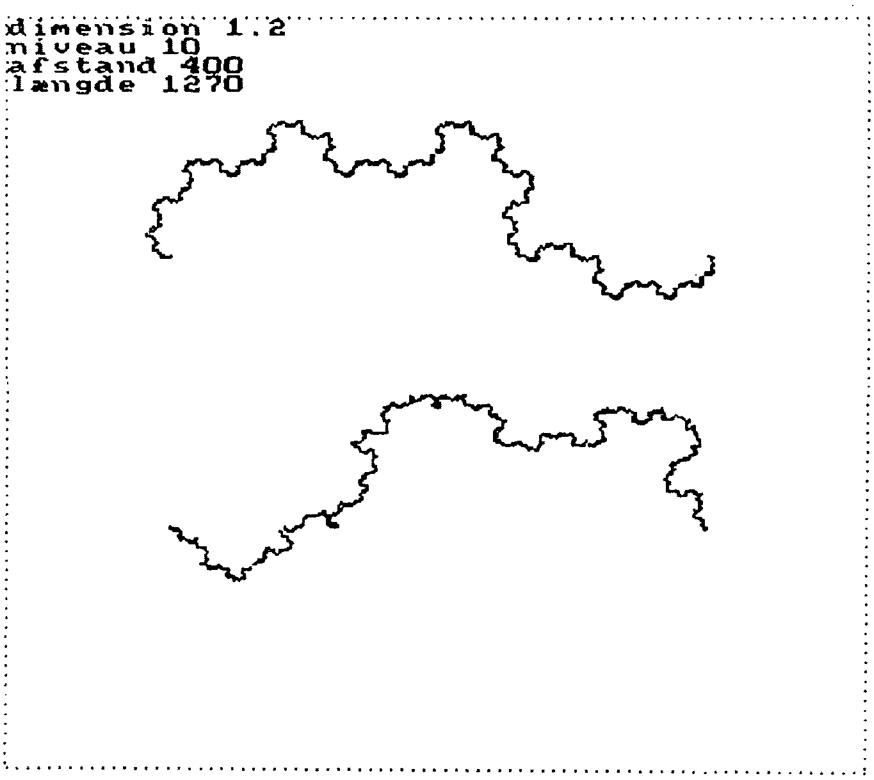


Fig. 15 . Øverst: regulær dragegen-kurve med d = 1.2.
Nederst: tilfældig kurve med samme dimension.

Kapitel 5 :
Dragekurven: Simple talforhold og puslespil .

I kapitel 2 fremstillede vi drageøen ved en meget simpel iteration, hvori der indgik et tilfældigt valg mellem to lineære funktioner. I kapitel 4 opdagede vi, at en todimensional fraktal kurve, dragekurven, fremstillet rekursivt med en uhyre simpel generator, er beslægtet med drageøen: Hvis vi først laver dragekurven fra A til B og derefter tilbage fra B til A, får vi drageøen. Denne overensstemmelse findes strengt taget kun "på niveau ∞" for dragekurven, så når vi i det følgende taler om kurven uden at specificere niveauet, forudsætter vi stiltiende, at niveauet er højt nok til, at vi ikke i praksis har noget ud af at gå højere op. For sædvanlig skærmgrafik ligger denne grænse omkring niveau 15.

Den iterativt fremstillede drageø (fig. 6) har nogle bestemte koordinater: centret ligger i (0,0), punkterne A og B i hhv. (-1,-1) og (1,1). I dette koordinatsystem er afstanden AB altså lig med $\sqrt{8}$. Det omskrevne rektangel på fig. 6 rækker fra x=-7/3 til x=7/3 og fra y=-5/3 til y=5/3, og det indskrevne rektangel ræker fra x=-5/3 til x=5/3 og fra y=-1/3 til y=1/3. Vi kan anvende drageøen som puslespilsbrik, således at vi uden om den centrale ø med centrum i (0,0) anbringer fire andre brikker, hvis omskrevne rektangler berører det indskrevne rektangel for den centrale brik. Afstanden mellem centrerne for disse brikker må altså være 5/3 + 7/3 = 4 i x-retningen og 1/3 + 5/3 = 2 i y-retningen. Hele planen kan dækkes med sådanne brikker, som altså hver især råder over et rektangel med kantlængderne 4 og 2. Det følger heraf, at <u>drageøen har arealet 8</u> , dvs. (mere generelt) <u>samme areal som et kvadrat med siden AB</u> .

Som det fremgår af fig. 16 har hver brik i dette puslespil i virkeligheden 6 nærmeste naboer, som berører den. Tre farver er nødvendige, hvis man vil undgå, at brikker med samme farve støder sammen.

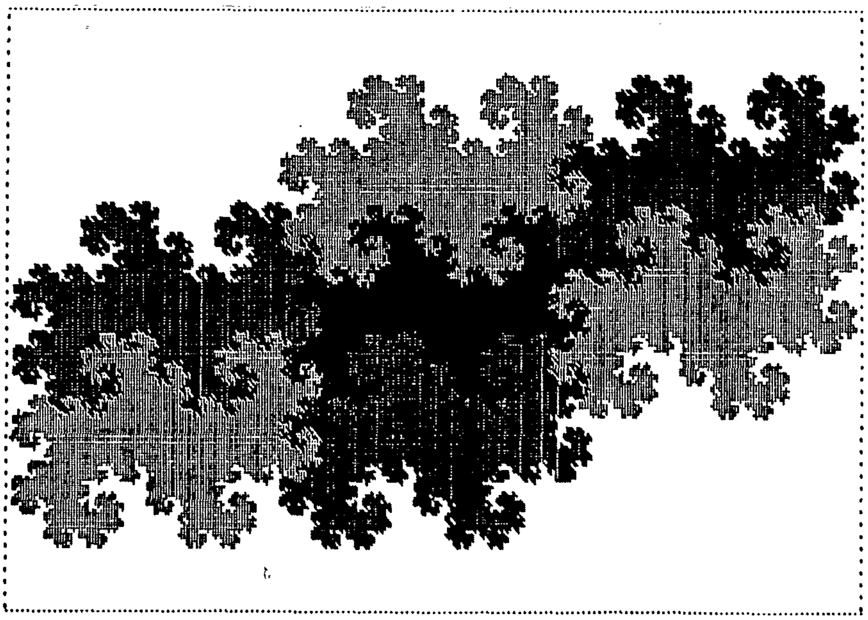


Fig. 16 . Drageøen som puslespilsbrik.

En dragekurve, som starter i A=(0,0) og ender i B=(1,1) har således arealet 1. Dette areal er summen af arealerne af de uendelig mange småøer, som dragekurvens øgruppe er sammensat af. Som det ses på fig. 17, er der én af disse øer, som er større end alle de andre; lad os kalde den "Sjælland" (denne ø, som indeholder punktet C, er tofarvet på fig. 17). Blandt de resterende øer er der igen én, som er større end de andre, nemlig naboøen til venstre for "Sjælland", lad os kalde den "Fyn". Bortset fra disse to, er de andre øer parvist lige store. Vi skal prøve at bestemme arealet af disse øer, først og fremmest "Sjælland" og "Fyn".

Først bemærker vi, at dragekurvens forløb fra A til B kan beskrives med en reel parameter, t, som løber fra 0 til 1. En dragekurve på niveau n er jo sammensat af 2^n linjestykker, så vi kan fastsætte, at t skal være 0 ved tegningens start, og hver gang der er tegnet et linjestykke, skal der lægges 2^{-n} til t, så vil t have værdien 1, når tegningen er færdig. Dragekurven på niveau n er jo sammensat af to niveau n-1 kurver, den første fra A til C (mørkegrå på fig. 17), den anden fra B til C. Hvis kurven tegnes fortløbende (uden hop), hvilket vi vil forudsætte i det følgende, tegnes den anden niveau n-1 kurve fra C til B, og punktet C svarer til parameterværdien t = 0.5. Vi har så en kontinuert afbildning af intervallet [0,1] på det af dragekurven beskrevne todimensionale område, og man kan let indse, at arealet af en ø er lig med længden af det til øen svarende parameterinterval.

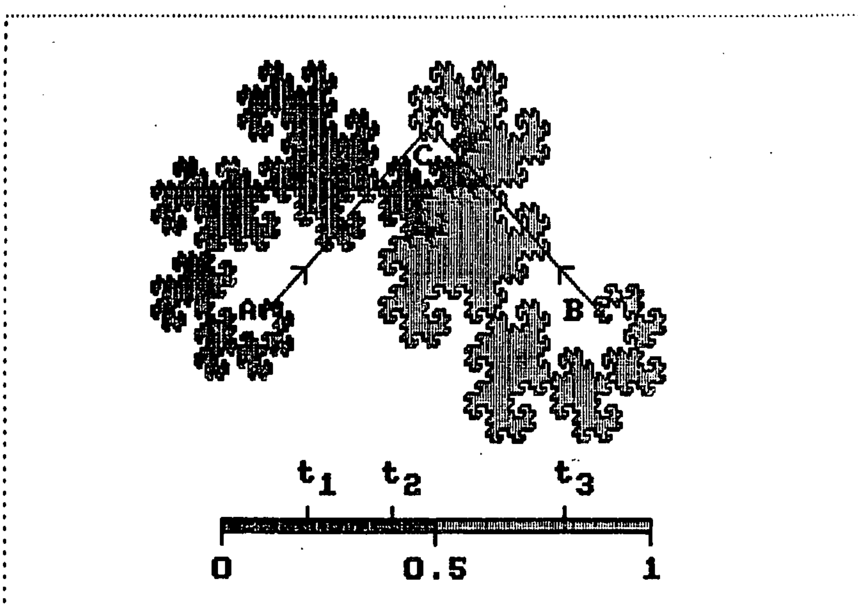


Fig. 17 . Dragekurven og parameterintervaller for øer.

Proceduren, som har tegnet dragekurven på fig. 17 holder regnskab med parameteren t og kan derfor tegne de to halvdrager AC og CB med forskellig farve. Afstanden mellem A og B, målt i skærmkoordinater, er valgt til $2^{n/2}$, hvor n er niveauet, således at hvert linjestykke præcis svarer til én pixel. Dette muliggør, at dragekurvens omkreds tegnes med en anden farve end det indre. Det er nemlig sådan, at indre punkter besøges to gange, men ydre punkter kun én gang, så hvis computeren gør det muligt at teste, om et punkt tidligere er farvet, kan man give det en anden farve, når det besøges anden gang.

Lad antallet af indre punkter være n_i og antallet af ydre punkter n_y. Da det totale antal punktbesøg er 2^n, har vi:

$$2 \cdot n_i + n_y = 2^n \tag{14}$$

Det totale areal, målt med pixelarealet som enhed, vil være halvdelen af dette, hvilket stemmer med, at arealet skal være 1, når afstanden AB er $\sqrt{2}$: $\frac{1}{2} \cdot 2^n \cdot (\sqrt{2}/2^{n/2})^2 = 1$. De ydre punkter bidrager altså kun halvt så meget til arealet som de indre, men også kun halvt så meget til parameterens tilvækst. På tilstrækkeligt høje niveauer vil antallet af ydre punkter kun være en forsvindende brøkdel af antallet af indre punkter, og dette vil gælde for hvert endeligt parameterinterval, således at arealet af den tilsvarende del af kurven simpelthen bliver lig med parameterintervallets længde, når linjestykkerne AC og CB begge har længden 1.

Lad os sige, at øen "Fyn" svarer til parameterintervallet fra t_1 til t_2 på fig. 17 og "Sjælland" til intervallet fra t_2 til t_3. Da "Fyn" i heldragen fra A til B er "Sjælland" i halvdragen fra A til C, har vi:

$$t_3 - t_2 = 2 \cdot (t_2 - t_1) \tag{15}$$

$$t_3 = 2 \cdot t_2 \tag{16}$$

Da den lysegrå halvdrage fra B til C er kongruent med den mørkegrå fra A til C, er det samlede areal af småøerne før "Fyn" identisk med arealet af småøerne efter "Sjælland", dvs.

$$t_1 = 1 - t_3 \tag{17}$$

Vi har så tre ligninger til bestemmelse af de tre parameterværdier, og vi finder:

$$t_1 = 1/5 \; ; \; t_2 = 2/5 \; ; \; t_3 = 4/5 \tag{19}$$

"Fyn" har altså arealet 1/5 og "Sjælland" 2/5 af hele dragekurvens areal. Videre kan man så indse, at de to største af de parvist forekommende småøer hver er halvt så store som "Fyn", de to næststørste igen halvt så store, osv. og når vi regner det hele sammen:

$$\text{Sjælland} + \text{Fyn} + 2 \cdot \text{småøer} =$$
$$2/5 + 1/5 + 2 \cdot (1/10 + 1/20 + 1/40 + \ldots) = 1$$

Når man således kender start- og slutværdien af parameteren t for hver af dragekurvens øer, kan man give dem forskellige farver og således skabe et nyt puslespil. Dragekurvens øer har ikke helt samme facon som den store, symmetriske drageø, men de muliggør en "tiling" af denne, som vist på fig. 18. Dette system kan så videreudbygges til flisedækning af hele planen. På fig. 19 vises et forslag til en ny type fliser på badeværelset, som dog nok ikke er så lette at sætte op som de almindelige, kvadratiske.

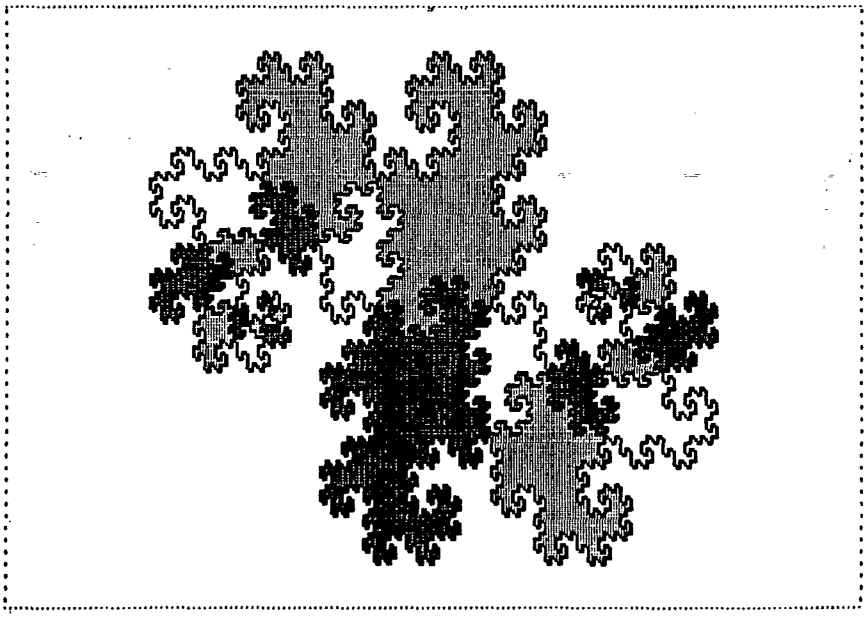


Fig. 18 . Tiling af drageøen med dragekurvens øer.

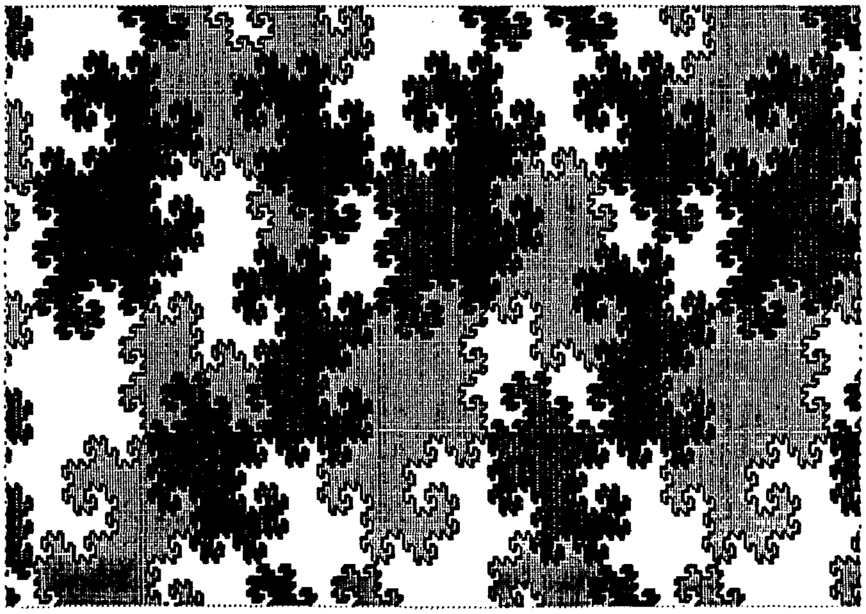


Fig. 19 . Et forslag til nye fliser på badeværelset.

Når vi nu har løst arealproblemet for drageøen, melder spørgsmålet sig: hvad er dens omkreds. Dette spørgsmål skal vi dog ikke forvente et fast tal som svar på, for omkredsen er en fraktal kurve, og længden af en sådan vokser eksponentielt med niveauet for en fast afstand mellem endepunkterne A og B. Hvis vi som før lader AB-afstanden $s(n)$ være $2^{n/2}$ (n er niveauet), således at de enkelte små linjestykker i dragekurven har længden én pixelafstand, kan omkredsen af hele drageøen udtrykkes på formen

$$n_y(n) = k\cdot(s(n))^d \tag{20}$$

hvor d er omkredsens fraktale dimension (sml. lign. (6)). Når vi så for fast n går over til standard-længdeenheden, således at længden AB er $\sqrt{2}$, finder vi omkredsens længde, $O(n)$, ved at dividere n_y med $s(n)$ og gange med $\sqrt{2}$, dvs.

$$O(n) = k'\cdot(\sqrt{2})^{n\cdot(d-1)} \tag{21}$$

hvor $k' = k\cdot\sqrt{2}$. Da d jo er større end 1 for en kontinuert fraktal kurve, ser vi altså, at omkredsen vokser eksponentielt med niveauet. Direkte optælling af n_y som funktion af n giver resultaterne

n	12	13	14	15	16	17
n_y	1202	2038	3457	5856	9938	16854

Vi kan da ved sammenligning med formlen (sml. (20))

$$n_y = k'\cdot(\sqrt{2})^{n\cdot d-1} \tag{22}$$

bestemme det bedste fit for konstanterne k' og d. Resultatet er $\underline{k' = 3.0000}$ og $\underline{d = 1.5242}$.

En nøjere undersøgelse af vores andet eksempel på en "fed" fraktalkurve, gosperkurven, kan gennemføres på lignende måde. Her skal blot nævnes nogle resultater, som man eventuelt kan efterprøve. Når kurven tegnes fortløbende, kan man ved hjælp af en parameterfremstilling få en kontinuert afbildning af enhedsintervallet på arealet af "Frankrig". Hvert af de 7 linjestykker i generatoren svarer til en gosperkurve på niveau n-1, og hver af disse kan eventuelt gives sin egen farve ved tegningen. Som det fremgår af fig. 20, er "Frankrig" en puslespilsbrik til tiling af planen, som kan opdeles i 7 mindre brikker af samme form.

Hvis hvert af linjestykkerne i generatoren har længden 1 (AB = $\sqrt{7}$), er gosperkurvens samlede areal $7\sqrt{3}/2$. Ved at forlænge nogle af disse linjestykker på fig. 20 opstår der nogle ligesidede trekanter, og man kan ret nemt pusle sig frem til, at der skal 14 trekanter til for at dække arealet. Den fraktale dimension af omkredsen er ca 1.2.

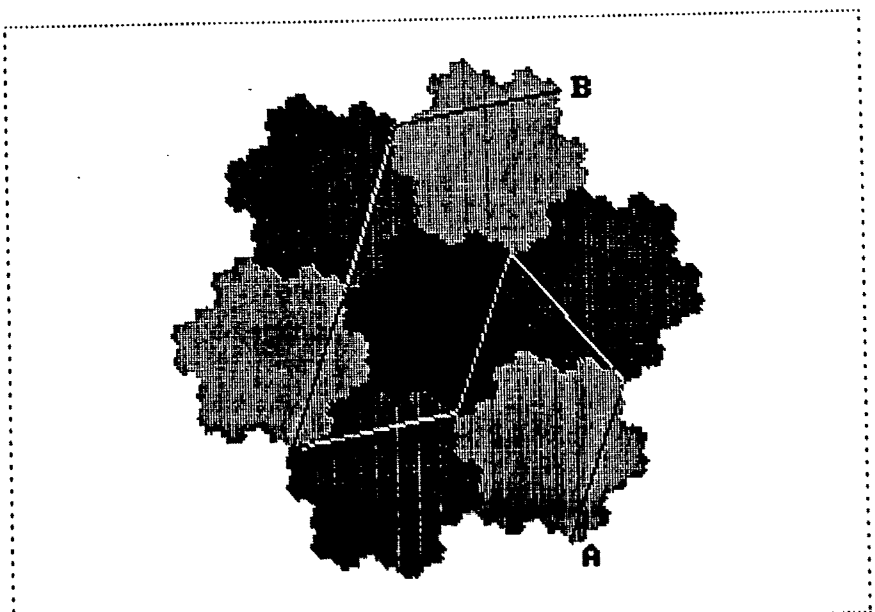


Fig. 20 . Gosperkurvens opdeling.

Kapitel 6 :
Reflektion fra cylindre .

I de sidste to kapitler skal vi se på et par simple fysiske fænomener med en fraktal og kaotisk opførsel. I modsætning til DLA modellen i kapitel 3, som var rent tilfældig, er der her tale om stærkt lovbunden adfærd, faktisk så lovbunden, at fænomenerne i deres renhed kun vanskeligt kan observeres i laboratoriet, men til gengæld så meget lettere på computerskærmens simulerede virkelighed.

Den første model er reflektion af en lysstråle fra en mængde spejlende cylindre . Opstillingen fremgår af fig. 20. I den højre del af figuren ses et todimensionalt snit af de cirkulære cylindre. Antallet af cylindre skal være mindst 3, hvis der skal komme noget spændende ud af eksperimentet.

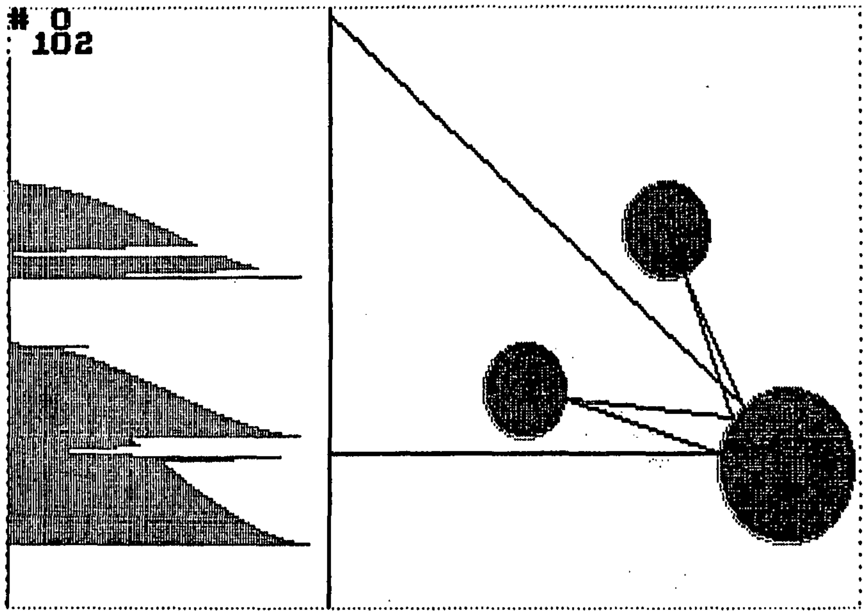


Fig. 21 . Reflektion af lysstråle fra cylindre.

Cylindrenes radier og placering på skærmen kan være tilfældig, blot må de ikke overlappe hinanden. En lysstråle sendes vandret ind fra venstre i en vis højde y. Efter et antal reflektioner (indfaldsvinkel = udfaldsvinkel), som kan variere fra 0 til ∞, forlader strålen området igen, og den danner nu en vis vinkel v (mellem 0 og 2π) med vandret. Opgaven går ud på at afbilde v som funktion af y. En sådan afbildning ses i venstre del af fig. 20. Bortset fra "falske diskontinuiteter", hvor v springer fra 0 til 2π, vil der være skarpe spidser og kløfter ind imellem områder med glat (differentiabel) variation. Hvis man udvælger et y-område omkring en spids eller kløft, kan man i næste omgang lade y variere inden for dette område, men strække afbildningen af v, så den fylder hele den lodrette akse. Man vil så opdage ny struktur i dette område. I princippet kan man på denne måde forstørre kurven vilkårligt op. Det viser sig da, at den er fraktal i den forstand, at den ikke bliver glat, selv ved meget stor forstørrelse, men vedblivende afslører nye spidser og kløfter.

Lad os nu se, hvordan vi behandler systemet matematisk med henblik på skrivning af et program. Det drejer sig i første omgang om at bestemme skæringspunkter mellem en cirkel og en ret linje. I anden omgang skal vi sørge for at udvælge det rigtige skæringspunkt som det sted, hvor der sker reflektion, og endelig skal vi bestemme en ny ret linje, svarende til den reflekterede lysstråle. Når vi er nået så langt, gentager problemet sig, og vi skal blot blive ved med at løse det, så længe, der er en løsning, dvs. indtil lysstrålen slipper væk.

Hvis en lysstråle udgår fra punktet (x_0,y_0) og har retningsvinklen v_0, kan den beskrives som en ret linje med parameterfremstillingen

$$x(t) = x_0 + t \cdot \cos(v_0) \; ; \; y(t) = y_0 + t \cdot \sin(v_0) \qquad (23)$$

Antag, at vi har en cylinder med radius r liggende med centrum i (c_x, c_y). Strålens vinkelrette afstand fra centret er da:

$$a = ABS(\cos(v_0) \cdot (c_y - y_0) - \sin(v_0) \cdot (c_x - x_0)) \qquad (24)$$

En nødvendig betingelse for, at strålen rammer cylinderen er naturligvis, at a er mindre end r. Vi må imidlertid også forlange, at t-værdien for skæringspunktet skal være positiv (ellers er det jo strålens forlængelse bagud, der rammer), og når der så er skæring, skal vi vælge skæringspunktet med den mindste t-værdi. Når vi har udregnet a (CM på fig. 22) og b (QM), kan vi finde indfaldsvinklen (PQL) og derfra bestemme retningen for den reflekterede stråle (QR).

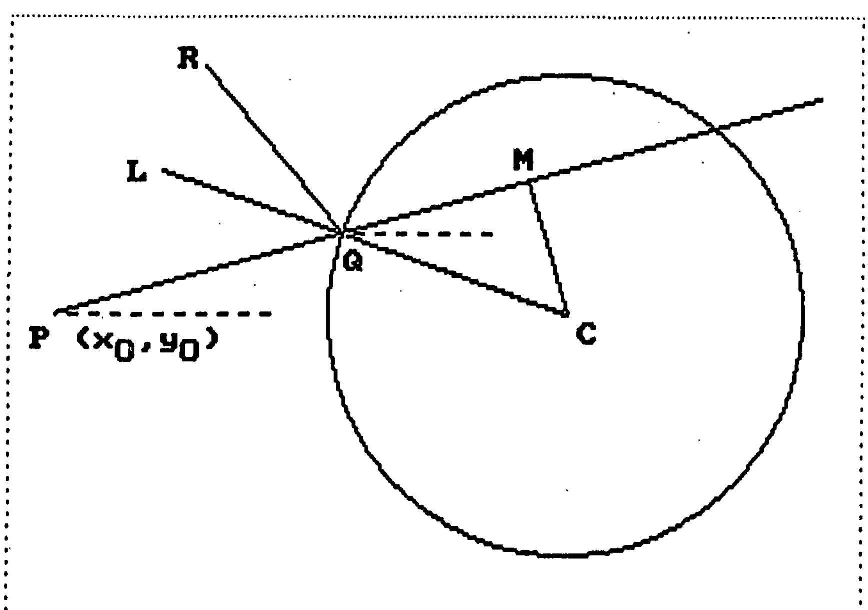


Fig. 22 . Strålegang PQR ved reflektion fra cylinder.

Nedenstående procedure ram(cx,cy,r) bestemmer skæringspunktet Q mellem en indgående stråle og en cirkel med centrum (cx,cy) og radius r og retningsvinklen i forhold til vandret for den reflekterede stråle. Linjens variable x0, y0 og t er eksterne (globale), dvs. defineret uden for proceduren. Hvis der ikke er noget skæringspunkt, tildeler proceduren t en negativ værdi:

```
PROC ram(cx,cy,r)
    cv:=COS(v0)
    sv:=SIN(v0)
    a:=ABS(cv*(cy-y0)-sv*(cx-x0))
    IF a>r THEN
        t:=-1000
    ELSE
        b:=SQR(r*r-a*a)
        t:=cv*(cx-x0)+sv*(cy-y0)-b
        IF t>0 THEN
            x0:=x0+t*cv
            y0:=y0+t*sv
            v0:=v0+PI-2*ATN(a/b)
            WHILE v0<0 DO v0:=v0+2*PI
            WHILE v0>2*PI DO v0:=v0-2*PI
        ENDIF
    ENDIF
ENDPROC ram
```

Proceduren bestemmer altså udgangspunktet (x0,y0) samt retningen for den reflekterede stråle, og herefter kan den så anvendes igen og igen, indtil den sidst reflekterede stråle ikke rammer nogen af cylindrene (t negativ). Problemet er ikke rekursivt, for der er ingen "bund" i det, svarende til niveauet 0. Hver gang en ny stråle er beregnet, er situationen den samme som før, og i princippet kan der være uendelig mange reflektioner, men i praksis slipper strålen altid ud før eller senere.

Lad os antage, at cylindrenes centrer og radier er indlagt i nogle arrays cx(k), cy(k) og r(k), hvor k kan gå fra 1 til n. For en given højde y af den indkommende, vandrette stråle kan vi da beregne hele strålegangen ved følgende programstump:

```
x0:=200
y0:=y
v0:=0
t:=1
moveto(x0,y0)
WHILE t>0 DO
    k:=0
    t:=0
    WHILE t<=0 AND k<n DO
        k:=k+1
        ram(cx(k),cy(k),r(k))
    ENDWHILE
    IF t>0 THEN
        drawto(x0,y0)
    ELSE
        draw(50*cv,50*sv)
    ENDIF
ENDWHILE
```

Når (hvis) programmet slipper ud af den yderste WHILE-løkke, vil v0 være retningsvinklen for den udgående stråle, og denne vinkel kan så afbildes som funktion af y. Vi skal ikke her gå i flere detaljer med programmeringen, men henviser til disketten eller programlisten i appendix A.

Kapitel 7 :
Bold i grøft .

En fuldstændig elastisk bold slippes fra en vis højde h og falder ned i en grøft, hvis bund har højden 0. Her er den så dømt til for tid og evighed at springe frem og tilbage mellem grøftens to sider. Falde til ro i bunden kan den aldrig, for dens elasticitet sikrer jo, at summen af kinetisk og potentiel energi vedblivende vil være det samme som den potentielle energi i det øjeblik, vi gav slip på bolden, altså

$$E = \tfrac{1}{2}m \cdot (v_x^2 + v_y^2) + mgy = mgh \qquad (25)$$

hvor (v_x, v_y) er boldens hastighedsvektor, y dens højde, m dens masse og g tyngdeaccelerationen.

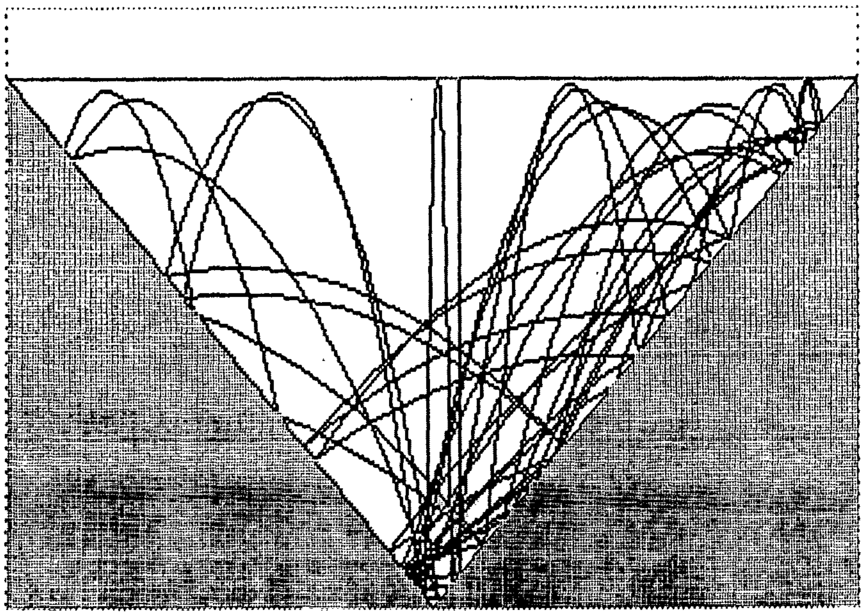


Fig. 23 . Banekurve for bold i grøft.

Vi beskriver grøften som to skråplaner med den numeriske hældningskoefficient α. Hvis grøftens bund vælges som nulpunkt for vores koordinatsystem, kan de to skråplaner beskrives ved ligningen

$$y = \alpha \cdot ABS(x) \tag{26}$$

For at undgå for mange konstanter, vil vi sætte boldens masse til 1. Ifølge Galileis faldlov er bevægelsen i tyngdefeltet jo uafhængig af massen, og vi kan så bruge bogstavet m til noget andet. Altså: lad os se på situationen lige efter, at bolden har foretaget det mte opspring fra et af de to skråplaner. Hvis x-koordinaten ved dette opspring er x_m, må hastigheden iflg (25) og (26) tilfredsstille betingelsen

$$v_m{}^2 = v_{xm}{}^2 + v_{ym}{}^2 = 2g \cdot (h - \alpha \cdot s_m \cdot x_m) \tag{27}$$

hvor s_m = SGN(x_m) er fortegnet af x_m. Vi skal så beregne stedet og hastigheden for det (m+1)te opspring. Vi kan sige, at opspring m sker til tiden t=0. Indtil bolden rammer igen, har vi så:

$$\begin{gathered} v_x(t) = v_{xm} \;;\; v_y(t) = v_{ym} - g \cdot t \\ x(t) = x_m + v_{xm} \cdot t \;;\; y(t) = y_m + v_{ym} \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{gathered} \tag{28}$$

Det næste nedslag af bolden finder sted, når $x(t) = x_{m+1}$, $y(t) = y_{m+1} = \alpha \cdot ABS(x_{m+1}) = \alpha \cdot s_{m+1} \cdot x_{m+1}$. Der er nu to tilfælde, vi må skelne imellem:

1) Bolden rammer samme skråplan: $s_{m+1} = s_m$.
2) Bolden rammer modsatte skråplan: $s_{m+1} = -s_m$.

Lad os først antage, at tilfælde 1) foreligger. Vi får da af (28):

$$y_m + v_{ym} \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2 = \alpha \cdot s_m \cdot (x_m + v_{xm} \cdot t) \qquad (29)$$

og da $y_m = \alpha \cdot s_m \cdot x_m$, finder vi tiden for nedslag nr. m+1 til

$$t = \frac{2}{g} \cdot (v_{ym} - \alpha \cdot s_m \cdot v_{xm})$$

og indsættelse af dette i (28) giver så

$$x_{m+1} = x_m + v_{xm} \cdot \frac{2}{g} \cdot (v_{ym} - \alpha \cdot s_m \cdot v_{xm}) \qquad (30)$$

Vi har her forudsat tilfælde 1), dvs. at x_m og x_{m+1} har samme fortegn. Så må det gælde, at

$$x_m \cdot [x_m + v_{xm} \cdot \frac{2}{g} \cdot (v_{ym} - \alpha \cdot s_m \cdot v_{xm})] > 0 \qquad (31)$$

Omvendt må vi kunne slutte, at hvis (31) ikke er opfyldt, så er det tegn på, at vi er i tilfælde 2), selv om udtrykket (30) i dette tilfælde ikke er rigtigt. Når (31) er opfyldt, bliver hastigheden ved nedslag nr. m+1 givet ved

$$v'_{x,m+1} = v_{xm}$$

$$(32)$$

$$v'_{y,m+1} = v_{ym} - 2 \cdot (v_{ym} - \alpha \cdot s_m \cdot v_{xm}) = 2 \cdot \alpha \cdot s_m \cdot v_{xm} - v_{ym}$$

Vi lader altså v' betegne hastighedskomposanter ved nedslag, medens v står for opspringet lige efter reflektionen. Selve reflektionen beskrives lettest, når vi indfører hastighedens komposanter v_t og v_n efter hhv. tangenten og normalen til skråplanen på det sted, hvor reflektionen skete.

$$v_x = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cdot (v_t - \alpha \cdot s \cdot v_n)$$
$$v_y = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cdot (\alpha \cdot s \cdot v_t + v_n) \tag{33}$$

Ved reflektionen sker der så simpelthen det, at v_n skifter fortegn, medens v_t bevarer sin værdi, dvs. når vi benytter (33) på hastigheden ved opspring m, indsætter dette i i (32) og så skifter fortegn på v_n, får vi hastighedskomposanterne ved opspring nr. m+1, dvs. $v_{x,m+1}$ og $v_{y,m+1}$. Disse udtryk kan vi så indsætte i de omvendte formler til (33) og finde komposanterne efter tangenten og normalen ved opspring nr. m+1, stadig under forudsætning af tilfælde 1):

$$v_{t,m+1} = v_{tm} - 2\alpha s_m v_{nm}$$
$$v_{n,m+1} = v_{nm} \tag{34}$$

Simpelheden af disse udtryk viser, at det kan betale sig at bruge hastighedens komposanter efter tangent og normal ved opspringet som tilstandsvariable. Dette har den yderligere fordel, at vi så ved, at den ene variabel, v_n altid må være positiv. Energibevarelsen (25) giver

$$v_t{}^2 + v_n{}^2 = 2gh \tag{35}$$

dvs. punktet (v_t, v_n) må ligge inden for en halvcirkel med radius $\sqrt{2gh}$. Betingelsen (31) for, at vi er i tilfælde 1), kan omformuleres til

$$x_m \cdot [x_m + \frac{2}{g} \cdot v_{nm} \cdot (v_{tm} - \alpha \cdot s_m \cdot v_{nm})] > 0 \tag{36}$$

Vi må nu behandle det vanskeligere tilfælde 2), når (36) ikke er opfyldt. Der skal så det modsatte fortegn på højresiden af (29), og tiden fra det mte opspring til det (m+1)te nedslag findes til

$$t = \frac{1}{g}\cdot(\alpha s_m v_{xm} + v_{ym} + W_m)$$

hvor (37)

$$W_m = \sqrt{(\alpha s_m v_{xm}+v_{ym})^2+4gy_m}$$

En lidt omstændelig udregning fører så til, at vi i tilfælde 2) i stedet for (34) får:

$$v_{t,m+1} = v_{t,m} - \alpha s_m v_{nm} + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\cdot W_m$$

$$v_{n,m+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\cdot W_m \qquad (38)$$

Størrelsen W kan også udtrykkes ved v_t og v_n:

$$W^2 = 4gh - 2v_n^2 + \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\cdot[(1-\alpha^2)v_n^2 - 2v_t^2 + 4s\alpha v_t v_n] \qquad (39)$$

Der er ét tilfælde, som er særlig simpelt, nemlig tilfældet $\alpha = 1$, hvor grøftens to sider står vinkelret på hinanden. Så længe bolden springer på samme side af grøften, har normalhastigheden jo en konstant værdi v_1. Når den så springer over til den modsatte side, får den en ny værdi v_2. I tilfældet $\alpha = 1$, hvor sidste led i (39) forsvinder, er værdien af v_2 uafhængig af tangentialhastigheden, og vi finder simpelthen, at normalhastighederne er de samme, hver gang bolden er på en bestemt side af grøften. De to værdier hænger sammen på følgende måde:

$$v_1^2 + v_2^2 = 2gh \qquad (40)$$

Med brug af (34) eller (38), alt efter om (36) er opfyldt eller ej er problemet reduceret til en iteration af samme type som beskrevet i kapitel 1. Hver gang, bolden har lavet et opspring, kan vi afsætte et punkt på skærmen, svarende til værdierne af v_t og v_n, og vi får da dannet en såkaldt Poincaré-afbildning . På fig. 24 ses en sådan afbildning for tilfældet $\alpha = 1.1$ og for tre forskellige værdier af $\xi = \alpha x_0/h$. For $\xi = 0.1$ ses en kaotisk bevægelse og for de to andre værdier to forskellige typer af næstenperiodiske bevægelser (perioder 3 og 5). Analogien med Martins formel er tydelig.

I tilfældet $\alpha = 1$ er alle bevægelser næstenperiodiske, og Poincaré-afbildningen fremviser to vandrette linjer, svarende til værdierne v_1 og v_2. For $\alpha < 1$ er alle bevægelser kaotiske, og for $\alpha > 1$ findes en kompliceret blanding af kaotiske og næstenperiodiske bevægelser.

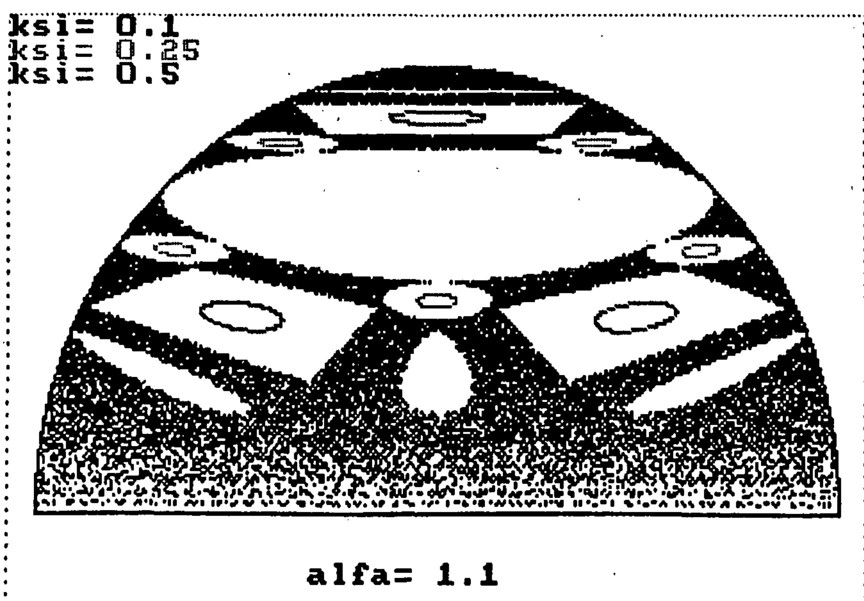


Fig. 24 . Poincaré-afbildning for den hoppende bold.

Appendix A :
Programliste, reflektion fra cylindre .

```
0010 // Program PERIFLEX.          Heine Larsen.  December 1988
0020 USE system
0030 USE graphics
0040 USE sound
0050 fullscreen
0060 aspect:=0.8 // inq(30)/inq(31)
0070 xpixels:=inq(20); ypixels:=inq(22)
0080 f$:=""18" -#.############### "19""
0090 DIM infline$ OF 50
0100 infline$:=""18""+18*" "+""19""
0110 ncylmax:=12
0120 ncyl:=3
0130 mr:=0.6
0140 sr:=0.2
0150 RANDOMIZE
0160 DIM r(1:ncylmax), cx(1:ncylmax), cy(1:ncylmax), a(1:ncylmax), b(1:ncylmax)
0170 selectwindow(2)
0180 DIM shape$ OF shapesize#(inq(19),inq(20),inq(21),inq(22))
0190 putstyle(0)
0200 info
0210 main
0220 textwindow(1,25,1,80)
0230 textscreen
0240 END
0250
0260
0270
0280 PROC info
0290   PAGE
0300   PRINT ""0",";
0310   PRINT AT 5,20: ""18" REFLEKSION FRA CYLINDRE "19""
0320   PRINT AT 8,5: "Programmet viser strålegangen for en lysstråle, som sendes ind fra
venstre";
0330   PRINT AT 9,5: "og reflekteres fra tilfældigt anbragte cylindre."
0340   PRINT AT 10,5: "I et diagram til venstre afsættes afbøjningsvinkel vandret og højde
lodret."
0350   PRINT AT 12,5: "Et nyt sæt cylindre vælges ved at trykke ""c"", og angive parametre.";
0360   PRINT AT 13,5: "Nederste linje angiver Y-min, Y og Y-max og indikationer for
tilstanden.";
0370   PRINT AT 14,5: "Et scan af Y-værdier startes og stoppes ved tryk på ENTER.";
0380   PRINT AT 15,5: "Lyden slås til og fra ved tryk på ""1"".";
0390   PRINT AT 16,5: "Ved at trykke ""z"" kan man zoome ind på diagrammet med"
0400   PRINT AT 17,5: "piletasterne, page up, page down, home og end. "
0410   PRINT AT 18,5: "Ved at trykke på TAB-tasten skifter man mellem øvre og nedre grænse"
0420   PRINT AT 19,5: "Zoom afsluttes ved tryk på ESC."
0430   PRINT AT 25,20: "Tryk på en tast ...";
0440   WHILE KEY$="" DO NULL
0450   PRINT ""0",";
0460   PAGE
0470 ENDPROC info
0480
0490 PROC main
0500   scanning:=FALSE
0510   pause:=FALSE
```

```
0520  lyd:=TRUE
0530  fast:=FALSE
0540  zooming:=FALSE
0550  ymin:=-2; ymax:=2
0560  cylindre
0570  ymin:=inq(25); ymax:=inq(26); nstep:=inq(22)-inq(21)
0580  ystart:=ymin; yslut:=ymax; ystep:=(yslut-ystart)/nstep
0590  reset_scan
0600  infoline
0610  LOOP
0620    IF scanning THEN
0630      y:=ynext; ynext:=y+ystep
0640      ray
0650      diagram
0660      IF y>=yslut THEN
0670        scanning:=FALSE
0680        infoline
0690        y:=yslut; ynext:=ystart
0700      ENDIF
0710    ENDIF
0720    c$:=KEY$
0730    CASE c$ OF
0740    WHEN ""
0750    WHEN ""13""
0760      scanning:=NOT scanning
0770      infoline
0780    WHEN " "
0790      IF scanning THEN
0800        infoline
0810      ELSE
0820        selectwindow(2)
0830        IF fast THEN putshape(inq(19),inq(21),shape$)
0840        ray
0850      ENDIF
0860      infoline
0870    WHEN ""27""
0880      EXIT
0890    WHEN "l"
0900      lyd:=NOT lyd
0910      infoline
0920    WHEN "c"
0930      scanning:=FALSE
0940      cylindre
0950      ystart:=ymin; yslut:=ymax
0960      reset_scan
0970      infoline
0980    WHEN "+"
0990      fast:=TRUE
1000      infoline
1010    WHEN "-"
1020      fast:=FALSE
1030      infoline
1040    WHEN "1"
1050      getnumber("Y-Start = ",ystart)
1060      ystart:=minmax(ymin,ystart,ymax)
1070      IF ystart>yslut THEN swap(ystart,yslut)
1080      reset_scan
1090      infoline
1100    WHEN "2"
1110      getnumber("Y-Slut = ",yslut)
1120      yslut:=minmax(ymin,yslut,ymax)
1130      IF ystart>yslut THEN swap(ystart,yslut)
1140      reset_scan
1150      infoline
```

```
1160     WHEN "z"
1170       IF NOT scanning THEN zoom
1180       reset_scan
1190       infoline
1200     OTHERWISE
1210     ENDCASE
1220   ENDLOOP
1230 ENDPROC main
1240
1250 PROC ray
1260   selectwindow(2)
1270   IF NOT fast THEN putshape(inq(19),inq(21),shape$)
1280   x0:=inq(23); y0:=y; v:=0
1290   moveto(x0,y0)
1300   REPEAT
1310     m:=0; tmin:=1000; sv:=SIN(v); cv:=COS(v)
1320     FOR n:=1 TO ncyl DO
1330       a(n):=(cy(n)-y0)*cv-(cx(n)-x0)*sv
1340       IF ABS(a(n))<=r(n) THEN
1350         b(n):=SQR(r(n)^2-a(n)^2)
1360         t:=cv*(cx(n)-x0)+sv*(cy(n)-y0)-b(n)
1370         IF (t>=0) AND (t<tmin) THEN tmin:=t; m:=n
1380       ENDIF
1390     ENDFOR n
1400     n:=m; t:=tmin
1410     IF n>0 THEN
1420       x0:+t*cv; y0:+t*sv; i:=ATN(a(n)/b(n)); v1:=v+PI+2*i
1430       drawto(x0,y0)
1440       WHILE (v1<0) DO v1:+2*PI
1450       WHILE (v1>2*PI) DO v1:-2*PI
1460       v:=v1
1470       IF lyd THEN play_tone(400/r(n)^1.5,0.2*ABS(COS(i)))
1480     ENDIF
1490   UNTIL n=0
1500   drawto(x0+8*COS(v),y0+8*SIN(v))
1510 ENDPROC ray
1520
1530
1540 PROC selectwindow(n) // skift mellem graf og billede
1550   CASE n OF
1560   WHEN 1 // grafvindue
1570     viewport(0,0.25*xpixels-1,1/25*ypixels+1,ypixels)
1580     window(0,2*PI,ystart,yslut)
1590   WHEN 2 // billede
1600     viewport(0.25*xpixels,xpixels,1/25*ypixels+1,ypixels)
1610     ratio:=aspect*((inq(20)-inq(19))/(inq(22)-inq(21)))
1620     IF ratio>1 THEN
1630       window(-2,2,ratio*(-2),ratio*2)
1640     ELSE
1650       window(-2/ratio,2/ratio,-2,2)
1660     ENDIF
1670   WHEN 3 // textvindue
1680     textwindow(25,25,1,79)
1690   OTHERWISE
1700   ENDCASE
1710 ENDPROC selectwindow
1720
1730 PROC cylindre
1740   selectwindow(3)
1750   getnumber("Antal cylindre = ",ncyl)
1760   getnumber("Middel-radius = ",mr)
1770   getnumber("Spredning på radius = ",sr)
```

```
1780   ncyl:=minmax(0,ncyl,ncylmax)
1790   mr:=minmax(0.1,mr,2)
1800   sr:=minmax(0,sr,2)
1810   FOR n:=1 TO ncyl DO
1820     r(n):=minmax(0.1,SQR(3)*(RND+RND+RND+RND-2)*sr+mr,2)
1830     trials:=0
1840     REPEAT
1850       cxx:=(RND-0.5)*(4-2*r(n)); cyy:=(RND-0.5)*(4-2*r(n))
1860       ok:=TRUE; m:=1
1870       WHILE ok AND m<n DO
1880         ok:=(cxx-cx(m))^2+(cyy-cy(m))^2>(r(m)+r(n))^2
1890         m:+1
1900       ENDWHILE
1910       trials:+1
1920     UNTIL ok OR (trials>=1000)
1930     cx(n):=cxx; cy(n):=cyy
1940   ENDFOR n
1950   drawcylindre
1960 ENDPROC cylindre
1970
1980 PROC infoline
1990   selectwindow(3)
2000   PRINT AT 1,1: USING f$: ystart;
2010   PRINT AT 1,20: USING f$: y;
2020   PRINT AT 1,40: USING f$: yslut;
2030   IF lyd THEN
2040     infline$(4:6):="LYD"
2050   ELSE
2060     infline$(4:6):="   "
2070   ENDIF
2080   IF scanning THEN
2090     infline$(10:17):="SCAN    "
2100   ELIF zooming THEN
2110     infline$(10:17):="ZOOM    "
2120   ELSE
2130     infline$(10:17):="        "
2140   ENDIF
2150   PRINT AT 1,60: infline$;
2160 ENDPROC infoline
2170
2180 FUNC max(x,y)
2190   IF x<y THEN
2200     RETURN y
2210   ELSE
2220     RETURN x
2230   ENDIF
2240 ENDFUNC max
2250
2260 FUNC min(x,y)
2270   IF x<y THEN
2280     RETURN x
2290   ELSE
2300     RETURN y
2310   ENDIF
2320 ENDFUNC min
2330
2340 FUNC minmax(xmin,x,xmax)
2350   RETURN min(xmax,max(xmin,x))
2360 ENDFUNC minmax
2370
2380 PROC drawcylindre
2390   selectwindow(2)
2400   clearwindow
2410   FOR n:=1 TO ncyl DO
```

```
2420     circle(cx(n),cy(n),r(n))
2430     fill(cx(n),cy(n))
2440   ENDFOR n
2450   getshape(inq(19),inq(20),inq(21),inq(22),shape$)
2460 ENDPROC drawcylindre
2470
2480 PROC getnumber(prompt$,REF number)
2490   TRAP
2500     PRINT AT 1,1: ""0" "+prompt$,number;
2510     INPUT AT 1,LEN(prompt$)+1,20: "": number;
2520   HANDLER
2530     PRINT ""7"";
2540     RETRY
2550   ENDTRAP
2560 ENDPROC getnumber
2570 PROC swap(REF x,REF y) CLOSED
2580   temp:=x; x:=y; y:=temp
2590 ENDPROC swap
2600
2610 PROC reset_scan
2620   scanning:=FALSE
2630   ystep:=(yslut-ystart)/nstep
2640   y:=ystart; ynext:=ystart
2650   selectwindow(1)
2660   clearwindow
2670 ENDPROC reset_scan
2680 PROC diagram
2690   selectwindow(1)
2700   moveto(0,y)
2710   drawto(v,y)
2720 ENDPROC diagram
2730 PROC clearwindow
2740   clear
2750   moveto(inq(23),inq(25))
2760   drawto(inq(24),inq(25))
2770   drawto(inq(24),inq(26))
2780   drawto(inq(23),inq(26))
2790   drawto(inq(23),inq(25))
2800 ENDPROC clearwindow
2810 PROC zoom
2820
2830   PROC level(y)
2840     selectwindow(1)
2850     moveto(0,y)
2860     drawto(2*PI,y)
2870     selectwindow(2)
2880     moveto(inq(25),y)
2890     drawto(inq(25)+0.05,y)
2900   ENDPROC level
2910
2920   pencolor(3) // XOR-White
2930   bottom:=TRUE
2940   zooming:=TRUE
2950   infoline
2960   selectwindow(1)
2970   y:=ystart; yst:=ystart+ystep; ysl:=yslut-ystep
2980   level(yst)
2990   level(ysl)
3000   REPEAT
3010     c$:=KEY$
3020     level(y) // sluk
3030     CASE c$ OF
3040     WHEN ""9"",""27"",""13""
3050       level(y) // tænd
```

```
3060       IF bottom THEN
3070         yst:=y
3080         y:=ysl
3090       ELSE
3100         ysl:=y
3110         y:=yst
3120       ENDIF
3130       level(y) // sluk
3140       bottom:=NOT bottom
3150     WHEN " "
3160       fast:=FALSE
3170       pencolor(1)
3180       ray
3190       pencolor(3)
3200       infoline
3210     WHEN "1"
3220       lyd:=NOT lyd
3230       infoline
3240     WHEN ""0"H" // op
3250       y:=min(ymax,y+ystep)
3260     WHEN ""0"P" // ned
3270       y:=max(ymin,y-ystep)
3280     WHEN ""0"I" // PgUp
3290       y:=min(ymax,y+10*ystep)
3300     WHEN ""0"Q" // PgDn
3310       y:=max(ymin,y-10*ystep)
3320     WHEN ""0"G" // Home
3330       y:=yslut-ystep
3340     WHEN ""0"O" // End
3350       y:=ystart+ystep
3360     OTHERWISE
3370     ENDCASE
3380     level(y) // tænd
3390   UNTIL c$=""27""
3400   level(yst) // sluk
3410   level(ysl) // sluk
3420   IF ysl<yst THEN swap(yst,ysl)
3430   IF ysl=yst THEN
3440     ysl:+ystep
3450     yst:-ystep
3460   ENDIF
3470   pencolor(1)
3480   ystart:=yst; yslut:=ysl
3490   zooming:=FALSE
3500 ENDPROC zoom
```

Appendix B :

Programliste, bold i grøft .

```
0010 // Bold på skråplaner 30-11-88  Heine Larsen
0020 USE graphics
0030 USE sound
0040 // graphicscreen(0)       // kan forcere anden mode end default
0050 www // amstrad koordinater
0060 scrfil$:="d:bold.scr" // angiv et drev, som er hurtigt.
0070 // helst et RAM-drev eller en harddisk.
0080 cirk:=FALSE
0090 singlestep:=FALSE
0100 slut:=FALSE
0110 alfa:=1.0863
0120 lyd:=TRUE
0130 delaycount:=80
0140 DIM xg(0:639)
0150 REPEAT
0160   CURSOR 1,1
0170   PRINT "BOLD I GRØFT: C:Clear A:Alfa P:Poincare-map
         S:simulering";
0180   c$:=INKEY$
0190   CURSOR 1,1
0200   PRINT "                                                              ";
0210   CASE c$ OF
0220   WHEN "a"
0230     CURSOR 2,1
0240     PRINT "alfa = ",alfa;
0250     INPUT ",  ny værdi: alfa = ": alfa
0260   WHEN "c"
0270     cirk:=FALSE
0280   WHEN "s"
0290     simulering
0300     cirk:=FALSE
0310   WHEN "p"
0320     poincare_map
0330   WHEN CHR$(27)
0340     textscreen
0350     DELETE scrfil$
0360     END
0370   OTHERWISE
0380   ENDCASE
0390 UNTIL FALSE
0400
0410 PROC poincare_map
0420   IF cirk THEN
0430     loadscreen(scrfil$)
0440   ELSE
0450     clearscreen
0460     moveto(20,64)
0470     drawto(620,64)
0480     cx:=320
0490     cy:=64
0500     rx:=300
0510     ry:=300
0520     FOR t:=0 TO PI STEP PI/180 DO
           drawto(cx+rx*COS(t),cy+ry*SIN(t))
```

```
0530     savescreen(scrfil$) // hvis der opstår fejl her,
0540     // så check værdien af scrfil$, om det er et lovligt
            filnavn.
0550     // Scrfil$ defineres i starten af programmet.
0560     cirk:=TRUE
0570   ENDIF
0580   CURSOR 25,1
0590   INPUT "ksi = alfa*x0/ym (mellem -1 og 1) ": ksi;
0600   xm:=45000*ksi/alfa
0610   loadscreen(scrfil$)
0620   PRINT AT 3,1: "ksi = ",ksi
0630   sm:=SGN(xm)
0640   IF sm=0 THEN sm:=1
0650   eta:=SQR(1-ksi)
0660   ca:=1/SQR(1+alfa^2)
0670   sa:=alfa*ca
0680   vtm:=-300*sa*sm*eta
0690   vnm:=300*ca*eta
0700   vp:=ATN(ABS(alfa))
0710   am:=1-alfa^2
0720   ap:=1+alfa^2
0730   WHILE KEY$="" DO
0740     plot(320+vtm,64+vnm)
0750     vxm:=vtm-alfa*sm*vnm
0760     xmpl:=xm+2*vnm*vxm
0770     IF SGN(xmpl)=sm THEN
0780       xm:=xmpl
0790       vtm:=vtm-2*alfa*sm*vnm
0800     ELSE
0810       wm:=SQR(180000-2*vnm^2+am*(am*vnm^2-2*vtm^2+
            4*sm*alfa*vtm*vnm)/ap)
0820       xm:=xm+ca*vxm*(ca*(2*alfa*sm*vtm+am*vnm)+wm)
0830       vtm:=vtm-alfa*sm*vnm+sa*sm*wm
0840       vnm:=ca*wm
0850       sm:=-sm
0860     ENDIF
0870   ENDWHILE
0880   savescreen(scrfil$)
0890 ENDPROC poincare_map
0900
0910 FUNC min(x1,x2)
0920   IF x1>x2 THEN
0930     RETURN x2
0940   ELSE
0950     RETURN x1
0960   ENDIF
0970 ENDFUNC min
0980
0990 PROC simulering
1000   clearscreen
1010   vp:=ATN(ABS(alfa))
1020   www
1030   REPEAT
1040     CURSOR 1,1
1050     INPUT "max. højde, 0 < ym < 200, ym = ": ym
1060     CURSOR 1,1
1070     PRINT "                                        ";
1080     CURSOR 1,1
1090     IF ym=0 THEN ym:=min(alfa*160,200)
1100     xp0:=min(ym/alfa,160)
1110   UNTIL (ym>=0) AND (ym<=200)
1120   moveto(320,0)
1130
```

```
1140  IF xp0<160 THEN xp0:=200/alfa
1150  IF xp0<160 THEN
1160    drawto(2*xp0+320,400)
1170  ELSE
1180    drawto(640,alfa*320)
1190  ENDIF
1200  moveto(320,0)
1210  IF xp0<160 THEN
1220    drawto(320-2*xp0,400)
1230  ELSE
1240    drawto(0,alfa*320)
1250  ENDIF
1260  fill(100,0)
1270  fill(400,0)
1280  IF ym<200 THEN
1290    moveto(0,2*ym)
1300    drawto(640,2*ym)
1310  ENDIF
1320  savescreen(scrfil$)
1330  CURSOR 1,1
1340  PRINT "startværdi  for x, ";-xp0;" < x0 < ";xp0
1350  REPEAT
1360    INPUT " x0 = ": x00
1370  UNTIL (x00>-xp0) AND (x00<xp0)
1380  x0:=x00
1390  xp:=320+2*x0
1400  yp:=2*ym
1410  loadscreen(scrfil$)
1420  www
1430  moveto(xp,yp)
1440  draw(0,-2)
1450  WHILE KEY$="" DO NULL
1460  // lodret fald fra højden ym
1470  moveto(xp,yp)
1480
1490  ng:=0
1500  xg(0):=x0
1510  t1:=SQR(2*(ym-alfa*ABS(x0)))
1520  t1i:=INT(t1+1)
1530  FOR t:=1 TO t1i DO drawto(xp,yp-t*t)
1540  IF lyd THEN dunk(x0)
1550  th0:=2*vp*SGN(x0)+PI/2
1560  // beregn og tegn parabel givet x0 og th0
1570  singlestep:=FALSE
1580  REPEAT
1590    ng:=ng+1
1600    IF ng=639 THEN // plot kurve for xg(t)
1610      ng:=0
1620    ENDIF
1630    // beregn næste nedslag
1640    y0:=alfa*ABS(x0)
1650    sx0:=SGN(x0)
1660    ax0:=alfa*sx0
1670    v02:=2*(ym-y0)
1680    v0:=SQR(v02)
1690    ct:=COS(th0)
1700    st:=SIN(th0)
1710    vx:=v0*ct
1720    vy:=v0*st
1730    IF th0=PI/2 THEN
1740      t1:=2*v0
1750      x1:=x0
1760    ELSE
```

```
1770       b0:=st/ct
1780       c2t:=ct*ct
1790       delx:=2*(b0-ax0)*v02*c2t
1800       x1:=x0+delx
1810       IF SGN(x1)<>sx0 THEN
1820         dba:=b0+ax0
1830         delx:=dba*v02*c2t
1840         sqt:=SQR(1+4*y0/(v02*c2t*dba^2))
1850         x1:=x0+delx*(1+sqt)
1860         IF SGN(x1)=sx0 THEN
1870           x1:=x0+delx*(1-sqt)
1880         ENDIF
1890       ENDIF
1900       t1:=(x1-x0)/vx
1910     ENDIF
1920     xg(ng):=x0
1930     t1i:=INT(t1+1)
1940     moveto(320+2*x0,2*y0)
1950     FOR t:=1 TO t1i DO
1960       drawto(320+2*(x0+vx*t),2*(y0+vy*t)-t*t)
1970       delay
1980     ENDFOR t
1990     IF lyd THEN dunk(x1)
2000     // beregn sluthastighed og ny udfaldsvinkel
2010     vy:=vy-t1
2020     // dv bliver retningen i rad af (vx,vy)
2030     IF vx=0 THEN
2040       dv:=SGN(vy)*PI/2
2050     ELIF vy=0 THEN
2060       dv:=(1-SGN(vx))*PI/2
2070     ELSE
2080       dv:=ATN(vy/vx)
2090
2100       IF dv<0 THEN
2110         dv:=dv+(vy>0)*PI
2120       ELSE
2130         dv:=dv-(vx<0)*PI
2140       ENDIF
2150     ENDIF
2160     th0:=2*vp*SGN(x1)-dv
2170     x0:=x1
2180     IF singlestep THEN
2190       PRINT AT 25,1: th0," ",x0," ";
2200       a$:=INKEY$
2210     ELSE
2220       a$:=KEY$
2230     ENDIF
2240     CASE a$ OF
2250     WHEN "s"
2260       singlestep:=NOT singlestep
2270     WHEN "c"
2280       loadscreen(scrfil$)
2290     WHEN "l"
2300       lyd:=NOT lyd
2310     WHEN " "
2320       a$:=INKEY$
2330     WHEN "k"
2340       clearscreen
2350       FOR t:=ng+1 TO 639 DO plot(t-ng,(xg(t)+160)*1.25)
2360       FOR t:=0 TO ng DO plot(t+(639-ng),(xg(t)+160)*1.25)
2370       WHILE KEY$="" DO NULL
2380       loadscreen(scrfil$)
2390     WHEN "+"
2400       delaycount:=0.9*delaycount
```

```
2410     WHEN "-"
2420       delaycount:=1.1*delaycount
2430     OTHERWISE
2440     ENDCASE
2450   UNTIL a$=CHR$(27)
2460
2470
2480 ENDPROC simulering
2490
2500 PROC www
2510   window(0,639,0,399)
2520 ENDPROC www
2530
2540 PROC dunk(x)
2550   play_tone(5*ABS(x)+160,0.1)
2560 ENDPROC dunk
2570
2580 PROC delay
2590   FOR i:=0 TO delaycount DO NULL
2600 ENDPROC delay
```

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt. Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt. Vejleder: Anders Madsen

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund. Projektrappqrt af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen Vejleder: Bernhelm Boss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik. Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. Af: Mogens Niss Nr. 4 er p.t. udgået.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". Af: Helge Kragh. Nr. 5 er p.t. udgået.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret". Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". Af: B.V. Gnedenko. Nr. 7 er udgået.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen. Af: Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariom". Projektrapport af: Lasse Rasmussen. Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET". Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen. Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER". Af: Jørgen Larsen.

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". Af: Mogens Brun Heefelt. Nr. 12 er udgået.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projektrapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of". Af: Else Høyrup. Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt". Specialeopgave af: Leif S. Striegler. Vejleder: Peder Voetmann Ckristiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN". Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen". Af: Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint. Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED". Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.

Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".

Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen

21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER". Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)". 1-port lineært response og støj i fysikken. Af: Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af realitivity". Af: Helge Kragh.

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE". 1. En analyse. 2. Interviewmateriale. Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen. Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER". En projektrapport og to artikler. Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS". Af: Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber". Projektrapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller". Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen. Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION". Af: Oluf Danielsen. Nr. 30 er udgået.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGS - SYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE". Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk. Vejleder: Stig Andur Pedersen. Nr. 31 er p.t. udgået.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLIN - GER MÖSSBAUEREFFEKTMÅLINGER". Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen. Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II". Af: Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION". ENERGY SERIES NO. I. Af: Bent Sørensen Nr. 34 er udgået.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82 Er aldrig udkommet.

46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDESE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O.Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedersen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.

56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.

63/83 "CREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.

64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Berhelm Booss og Jens Høyrup.

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.

67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af: Lone Biilmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK"
- til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK".
- en test i 1.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.

70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.

71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUT I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialerapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået

84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialerapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

90/84 "ENERGI I 1.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lilletorup.
Vejleder: Bent Sørensen.

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".
Af: Bent Sørensen.

99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.

102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jæger.

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AF THE GLASS REANSITION".
Af: Tage Christensen.

"A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.

107/85 "ÉN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, CarstenHolst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.

109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen

111/85 JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Anne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.

115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENÆSSANCEN".
Af: Mogens Niss.

116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.

117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen

118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen

119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen

121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.

124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.

125/86 "UVBY,β - systemet - en effektiv fotometrisk spektralklassifikation af B-,A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.

126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.

127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
Vejleder: Mogens Niss.

128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.
Projektrapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
Vejleder: Jeppe Dyre.

129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
Lecture Notes 1983 (1986)
Af: Bent Sørensen

130/86 "Studies in Wind Power"
Af: Bent Sørensen

131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historieprojekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.
Projektrapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.

132/86 "FYSIK OG DANNELSE"
Projektrapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.

133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA. ENERGY SERIES NO. 15.
AF: Bent Sørensen.

134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"
Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Viščör

135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
MASTEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen

136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
Projektrapport af Frank Colding Ludvigsen
Vejledere: Historie: Ib Thiersen
Fysik: Jens Højgaard Jensen

137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
Af: Jeppe Dyre
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."
Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell

140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"

By: Jens Gravesen

141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"

Projektrapport af Finn C. Physant

Vejleder: Ib Thiersen

142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski

143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"

af: Mogens Brun Heefelt

144/87 "Context and Non-Locality - A Peircan Approach
Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"

Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987

By: Mogens Niss

146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"
- en ny frekvensbaseret målemetode.

Fysikspeciale af Jan Vedde

Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Viščor

147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"
redigeret af: Mogens Brun Heefelt

148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"

af: Peter Colding-Jørgensen DLH
Albert Chr. Paulsen

149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"

by: Petr Viščor

150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"

by: Petr Viščor

151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"

Matematikprojekt af:
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal

Vejleder: Mogens Niss

152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek
Krzysztof P. Wojciechowski

153/88 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITÆRE OG CIVILE KRÆFTER"

Et eksempel på humanistisk teknologihistorie
Historiespeciale

Af: Hans Hedal

Vejleder: Ib Thiersen

154/88 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"

By: Jeppe Dyre

155/88 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"

by: Michael Pedersen

156/88 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"

by: Jeppe C. Dyre

157/88 " STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."

by: Michael Pedersen

158/88 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"

by: Jeppe Dyre

159/88 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"

by: Bent Sørensen

160/88 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"

by: Jens Gravesen

161/88 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS:
Dirichlet feedback control problems"

by: Michael Pedersen

162/88 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"

AF: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich , Mette Vedelsby

163/88 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"

Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frellesen

Vejleder: Jesper Larsen

164/88 "Vurdering af matematisk teknologi
Technology Assessment
Technikfolgenabschätzung"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med
Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen

165/88 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"

by: Jens Gravesen

166/88 "Grundbegreber i Sandsynligheds-
regningen"

Af: Jørgen Larsen

167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"

Af: Jørgen Larsen

167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte
modeller"

Af: Jørgen Larsen

168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS"
Laboratorie-simulering og MARS-analoger
undersøgt ved Mössbauerspektroskopi.

Fysikspeciale af:

Birger Lundgren

Vejleder: Jens Martin Knudsen
Fys.Lab./HCØ

169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL
TIL EN METAFYSIK."

Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist"
1891-93.

Introduktion og oversættelse:

Peder Voetmann Christéansen

170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"

Samtlige opgaver stillet i tiden
1974 - juni 1988

171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"

af: Johnny Tom Ottesen