Roskilde University

Terrænmodellering

analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terænmodeller

Frommelt, Thomas; Ravnkjær Larsen, Hans; Skimminge, Arnold

Publication date:
1998

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Citation for published version (APA):
Frommelt, T., Ravnkjær Larsen, H., & Skimminge, A. (1998). *Terrænmodellering: analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terænmodeller*. Roskilde Universitet. Tekster fra IMFUFA No. 356
http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain.
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact rucforsk@kb.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 04. Jul. 2025

TEKST NR 356 1998

Terrænmodellering

Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller

Modelprojekt af

Thomas Frommelt,
Hans Ravnkjær Larsen og
Arnold Skimminge

Vejleder: Johnny Ottesen

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, RUC, postboks 260, 4000 Roskilde, Danmark

Terrænmodellering - Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller

Af Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge

IMFUFA-tekst nr. 356/98, 77 sider, ISSN 0106-6242

Projektet omhandler konstruktion af digitale terrænmodeller i det terrænanalytiske værktøj MTA (MGE Terrain Analyst), der udgør en del af GIS-miljøet MGE (Modular GIS Environment). MTA bruger diskrete, tredimensionale målepunkter og interpolerer en flade mellem disse. Først konstrueres Delaunay-triangulationen af målepunkterne. Dernæst interpoleres højdeværdierne til et rektangulært gitter. Sidst benyttes bikubiske spline-polynomier til at konstruere en tredimensional overflade.

MTA-modellen karakteriseres som en deskriptiv, statisk, matematisk model. Anvendelsen af Delaunay-triangulationen og den bikubiske spline-interpolation, er velbegrundet og begge metoder vurderes som generelt anvendelige. Derimod opfatter vi behovet for gitterkonstruktionen som et svagt, men uundgåeligt led i interpolationsprocessen. Vi vurderer at dokumentationen for MTA-modellens opbygning og gennemsigtighed er mangelfuld og uhensigtsmæssig.

De digitale terrænmodeller analyseres med udgangspunkt i et virkeligt terræn: Bornholm. Først konkluderes at digitaliserede toppunkter forbedrer den endelige terrænmodel. Dernæst findes et begrænset antal punkter fra højdekurverne, der sammmen med toppunkterne og kystlinien gengiver Bornholms karakteristika repræsentativt. Sidst konkluderes at terrænmodellen der dannes af den fundne datamængde, er tilstrækkelig troværdig til at gengive højder, mens der om modellens evne til at gengive første- og anden afledte ikke kan konkluderes entydigt.

Terrænmodellering

Analyse af en matematisk model til
konstruktion af digitale terrænmodeller

Modelprojekt
IMFUFA
Roskilde Universitetscenter

Thomas Frommelt Hans Ravnkjær Larsen
Arnold J.M. Skimminge

Vejleder: Johnny Ottesen
September 1998

Forord

Denne projektrapport er udarbejdet som et 'modelprojekt' på IMFUFA, RUC. Vi har sat os ind i og analyseret en anvendt matematisk model i en ikke-matematisk sammenhæng.

Modellen som projektet beskæftiger sig med, bruger rumlig interpolation til at konstruere 'digitale terrænmodeller', og er indlejret i et Geografisk Informations-System. Denne form for matematisk model er både meget anvendt og eksemplarisk – hvormed vi forstår at erkendelserne i dette projekt forhåbentlig er relevante for modelanvendelser i almindelighed.

Som det er sædvanligt i praktisk arbejde med edb-implementerede modeller, og i særdeleshed indenfor GIS-anvendelser, har vi undervejs måttet bruge megen tid på selve håndteringen af modellen i GIS-miljøet. Dels tager det altid lang tid at komme til bunds i bestemte værktøjer i et GIS, og dels har det været vanskeligt at få dokumentation fra Intergraph for hvad deres værktøj egentlig gør og forudsætter af modelbrugeren.

Vi har haft et spændende og udbytterigt forløb og takker for de bidrag med tips og ideer, vi har fået forskellige steder fra, især fra vores vejleder Johnny Ottesen.

RUC, sommer 1998

Thomas Frommelt
Hans Ravnkjær Larsen
Arnold J.M. Skimminge

Indhold

Indledning **1**

1 Modelpræsentation **7**
1.1 Generering af en digital terrænmodel i MGE 7
1.1.1 Regionalisering af datapunkter 7
1.1.2 Konstruktion af rektangulært fordelte data 8
1.1.3 Interpolation i gitteret 8
1.2 Triangulering i MGE Terrain Analyst 8
1.2.1 Definition af en Thiessen-polygon 8
1.2.2 Konstruktion af Thiessen-diagram 9
1.2.3 Delaunay-triangulation 9
1.2.4 Ophøjning af Delaunay-triangulationen 10
1.2.5 Problemer ved TIN-konceptet 11
1.3 Konstruktion af et rektangulært gitter 13
1.4 Den fladedækkende interpolation 18
1.4.1 Den bivariable spline 18
1.4.2 Fastsættelse af en bikubisk spline 20
1.4.3 Afrunding 22

2 Optakt til analyser af MTA-modellen **23**
2.1 Det behandlede datamateriale 23
2.2 Testmetoder 25

3 Modelteoretisk analyse af MTA-modellen **29**
3.1 Karakterisering af MTA-modellen 29
3.2 Diskussion af submodeller 31
3.2.1 Regionalisering af datapunkter 31
3.2.2 Konstruktion af gitter 33
3.2.3 Dannelse af et 'pænt' terræn – interpolationen 34
3.3 MTA-modellen i sin helhed 35

4 Praktisk analyse af MTA-modellen **37**
4.1 Inddragelse af toppunkter i generering af terrænmodeller 37
4.2 Modellens robusthed overfor inddata 40

4.3 Valg af inddatamængde 47
4.4 Andre undersøgelser af MTA-modellens robusthed 47
4.4.1 Effekt af 10% støj i inddata 47
4.4.2 Regionale tendenser for afvigelser 48
4.5 Modellens troværdighed overfor inddata 50
4.6 Gengivelse af toppunkter 52
4.6.1 Højden i toppunkter 53
4.6.2 Placering af toppunkter 54
4.7 Konklusioner om terrænmodellen 57

5 Opsamling og konklusion **59**
5.1 MTA-modellens opbygning 59
5.2 Kvaliteten af interpolationen 60
5.3 Konklusion 61
5.4 Ideer til videre arbejde 62

Appendiks

A Scatterplot i lind strøm **65**

B Histogrammer i lind strøm **67**

Litteratur **69**

Stikord **71**

Indledning

En matematisk model kan groft set karakteriseres som en formel beskrivelse af en begrænset del af virkeligheden. I en model benyttes matematik til at redegøre for relationer mellem faktorer i det modellerede system; væsentlige træk fra systemet detaljeres mens mindre væsentlige træk forsimples hvis ikke ligefrem udelades.

En matematisk model vil altså altid være resultatet af en subjektiv behandling af virkeligheden. Brugen af den er derfor på forhånd begrænset af de rammer modellen er bygget op indenfor, og det er grundlæggende at erkende at den ikke giver bedre uddata end dens inddata.

Det er derfor vigtigt at man som bruger af en matematisk model kender til dens gyldighedsområde. For det første må man ikke anvende modellen i sammenhænge hvor forudsætningerne for modellen eller for matematikken i den ikke er opfyldt, for det andet må man ikke aftvinge modellen større detaljering af uddata end inddata tillader.

I analysen af den matematiske model og af dens gyldighedsområde er det afgørende at modellen kritiseres på både det konceptuelle og det modeltekniske plan. Kun derved får man fuldt udbytte af sine overvejelser og konklusioner angående modellens brugbarhed.

Matematiske modeller anvendes i talrige sammenhænge som værktøjer, ikke mindst 'pakket ind' i andre rammer, fx edb-software. Modelbyggerne er i disse tilfælde sjældent de samme som brugerne af de matematiske modeller. Dokumentationen af modellernes forudsætninger, konstruktionsmæssige detaljer og krav til korrekt anvendelse, er derfor vigtig for at brugen af den matematiske model er forsvarlig. Denne dokumentation er ofte mangelfuld.

For den generelle bruger af værktøjer hvori matematiske modeller er implementeret, og uden specifik matematisk baggrund, kan det være meget vanskeligt at gennemskue modellernes gyldighedsområde. Hermed banes vejen for misbrug af den matematiske model, med risiko for direkte fejlagtige konklusioner.

I dette projekt behandler vi en matematisk model der eksemplificerer nogle af disse problemer.

Digitale terrænmodeller

I stigende grad anvendes indenfor bl.a. offentlig fysisk planlægning omfattende edb-software til forskellige analyse- og planlægningsopgaver. Sådanne programpakker kal-

des Geografiske Informations-Systemer (GIS) som vi redegør for på side 4.

På Institut for Geografi og Internationale Udviklingsstudier på RUC er ét af de benyttede sådanne GIS'er programpakken 'Modular GIS Environment'(MGE)[1]. Den konkrete matematiske model behandlet i dette projekt udgøres af værktøjerne i modulet 'MGE Terrain Analyst', der konstruerer 'digitale terrænmodeller' ud fra diskrete måledata. Det er de digitale terrænmodeller vi vil arbejde med. De kaldes også DTM.

Der er flere problemer i en sådan modellering som omfatter dels karakteriseringen af overfladen af et landskab[2], dels begrænsningerne der ligger i anvendelserne af en digital terrænmodel.

Ét væsentligt problem er, at et terræn som vi ser det, ikke er en statisk størrelse. Derimod har et nutidigt landskab overalt været udsat for en hundredtusind år lang påvirkning: vind og vejr, bevægelser af undergrunden og forskellige former for erosion har bevirket en naturlig afrunding og nedslidning af overfladen. Disse formgivende processer varierer med geografien, og ethvert konkret landskab er i dag er produktet af helt specifikke processer, og som sådan unikt. Der ligger derfor visse problemer i at antage at et konkret landskab er repræsentativt for landskaber som helhed, og det kan virke urimeligt at forsøge at modellere landskaber generelt. Da det alligevel gøres er det fordi der på trods af unikheden af landskabet også findes visse fællestræk ved landskaber.

Anvendelser af digitale terrænmodeller

I MGE's brugermanualerne angiver Intergraph en gruppering af anvendelserne for de digitale terrænmodeller. Vi præsenterer den her efter stigende krav til præcision og detaljering i terrænmodellen. Vi kan se det som et skift fra anvendelser hvor et detaljeret kendskab til makrorelieffet er det primære, til kortlægninger der i højere grad modellerer mikrorelieffet.

1. Et eksempel på anvendelser af digitale terrænmodeller af rent kartografisk karakter er produktionen af nye topografiske landkort. På dem kan højdekurverne indtegnes via en præcis DTM.

2. I andre sammenhænge er det nødvendigt (og tilstrækkeligt) at opnå et præcist kendskab til selve højden i terrænet, fx ved placering af radiomaster, eller missilstyring.

3. Indenfor fysisk planlægning kræves ofte et mere kompliceret kendskab til de større linier i topografien, eksempelvis i beregningen af 'synlige oplande' i forbindelsen med anlæggelsen af mølleparker, og i forbindelse med støjbekæmpelse fra eksempelvis en motorvej ("hvor i omgivelserne af en given motorvej er støjudbredelsen værst?, hvor er støjbekæmpende foranstaltninger nødvendige?" etc.).

[1]MGE er et windows NT-baseret GIS-miljø fra Intergraph.

[2]Hvor vi fremover bruger ordet 'terræn' om overfladen af et landskab.

4. Kravene om præcision i DTM'en vokser ved anvendelser hvor viden om hældning i terrænet skal inddrages, eksempelvis ved anlæggelsen af veje hvor specifikke krav til vejens forløb (lavest mulig hældning, mindst mulige nødvendige udgravninger, etc.) skal tages i betragtning.

5. Endelig kræver visse anvendelser endnu større detail-krav til den færdige terrænmodel om mikrorelieffet i terrænet (såsom krumninger og lokale lavninger, kanaler etc.), fx ved afstrømningsmodellering eller erosionsbekæmpelse.

Undersøgelserne i dette projekt

I dette projekt afdækker og analyserer vi den matematiske model som udgøres af de værktøjer, MGE benytter i konstruktionen af digitale terrænmodeller. Det er værktøjerne i MGE-modulet MGE Terrain Analyst (MTA) og vi refererer til den som MTA-modellen. Valget af MTA som model er begrundet i at det var en model vi via Geografi havde adgang til. MTA-modellen er ikke det allernyeste på markedet, og kendere af området vil muligvis mene at nogle af de behandlede metoder er forældede. Vi mener dog at undersøgelsen har relevans, idet MTA-modellen anvendes mange steder, eksempelvis på Institut for Geografi og Internationale Udviklingstudier.

Vores behandling består i dels en redegørelse af hvordan rumlig interpolation foregår i MGE og for de begrænsninger der ligger herfor, dels en undersøgelse af gyldighedsområdet for modellen igennem praktiske test af forskellige aspekter ved MTA-modellen. Disse overvejelser ligger til grund for formuleringen af problemstillingen.

PROBLEMFORMULERING Ved at vurdere usikkerheden i og kvaliteten af digitale terrænmodeller konstrueret med værktøjerne i MGE, vil vi belyse robustheden og troværdigheden af den matematiske model som genererer dem (i MGE-modulet MTA).

Derved illustrerer vi de farer for fejl og mistolkninger der ligger i en manglende forståelse for gyldighedsområdet for en matematisk model.

Denne rapports målgruppe er flere: Dels skriver vi til den gruppe af GIS-anvendere der har arbejdet med DTM'er og fundet det vanskeligt at forstå usikkerhederne i og fundamentet for dem. Dels skriver vi til anvendere af matematiske modeller – især til dem der (hidtil) ikke har tænkt over gyldighedsområdet for de anvendte modeller.

Metode

Vi har valgt at angribe denne problemstilling ved først at udfolde og præsentere den anvendte matematiske model grundigt, således at det bliver klart hvilke metoder der anvendes i interpolationsprocessen. Ligeledes vil vi præsentere de valgmuligheder man som bruger af MGE har for at påvirke modellens resultat, og beskrive hvilken berettigelse disse har. Ved gennemgangen af denne del vil vi ikke foretage egentlige

vurderinger (kvalitative eller kvantitative) af de brugte metoder, men vi vil blot beskrive og forstå logikken i dem.

Derefter vil vi så foretage den egentlige vurdering af kvaliteten og usikkerheden af hele interpolationsprocessen. Hele denne undersøgelse vil vi foretage med et datamateriale fra et konkret landskab, nemlig højdedata for Bornholm. Valget af en virkelig referenceramme for analyserne har nogle konsekvenser for generalisationen af vores resultater.

1) Af tidshensyn føler vi os nødsagede til at vælge mellem to forskellige tilgange. Vi tager udgangspunkt i en virkelig terrænoverflade i stedet for en rent matematisk konstrueret flade. Dette giver efter vores vurdering et bedre grundlag for at drage generelle konklusioner. På den ene side ville vi med et matematisk konstrueret terræn have fuld sikkerhed for hvordan terrænoverfladen ser ud, og helt ned i detaljer kunne vi kontrollere terrænmodellernes overensstemmelse. På den anden side føler vi os ikke i stand til at dokumentere, at et matematisk konstrueret terræn ville repræsentere virkelige landskaber troværdigt. På datamaterialet for Bornholm ser vi modellen virke på et stykke virkelighed, og i denne sammenhæng har det stor betydning.

2) Det samlede areal dækket af vores arbejde er godt 587 km^2. Med et så forholdsvis stort arbejdsareal ser vi interpolationsprocesserne virke på store datamængder, der er fuldt ud sammenlignelige med hvad man arbejder med i praksis. Igennem forskellige analyser af terrænmodellernes kvalitet vurderet mod omfanget af inddata, kan vi opnå en forståelse for hvordan indsamlingen af højdedata forud for konstruktioner af terrænmodeller, bør tage højde for størrelsen af det modellerede, ud over blot topografiske forhold.

3) Ved at vælge at arbejde med en ø som Bornholm kan vi eliminere eventuelle randproblemer, såsom at interpolationen sker henover en bugt [Bower & Newton 1993]. Grunden er at vi med sikkerhed kan definere højden over havoverfladen på enhver lokalitet udenfor Bornholm til 0 m. Netop randproblemerne er ellers generelt interessante, men vi har i denne omgang valgt denne 'bekvemme' løsning, da det er andre aspekter ved konstruktionen af de digitale terrænmodeller der interesserer os.

Præsentation af et GIS-miljø

I dette afsnit introducerer vi ganske kort nogle af de væsentligste begreber ved de Geografiske Informations-Systemer. En læser bekendt med GIS-terminologien kan springe afsnittet over og gå til kapitel 1.

Et GIS er kort fortalt en programpakke af datalogisk-matematiske analyseværktøjer, der som helhed er mere eller mindre kompleks i opbygning og omfang. Til et GIS stiller man en række krav, heriblandt at det skal kunne håndtere forskellige former for geografisk data, dvs. læse, lagre, analysere og præsentere data der på den ene eller anden måde beskriver objekter i en geografisk virkelighed.

Det ligger centralt indlejret i GIS-konceptet, at man afgrænser et arbejdsområde, hvori man definerer koordinatsystem og referenceramme, så at sige rammerne for beliggenheden af de geografiske data, man vil arbejde med. I en proces der kaldes 'georeferering' placeres herefter alle data i det valgte koordinatsystem, mere eller mindre automatisk. Den rumlige samhørighed fremgår altså klart for data der hører til samme arbejdsområde.

Et GIS, og her specielt MGE, er i stand til at læse og håndtere mange forskellige terræninformationer, og relatere forskellige geografiske data til hinanden.

To reserverede navne i GIS-terminologien på dataformater er 'vektor'- og 'raster'-data. Hos [Burrough 1986] beskrives de to dataformater, der begge beskriver den rumlige sammenhæng mellem geografiske objekter [Burrough 1986, s.18ff], men på meget forskellig vis. Vektorstrukturen benytter kort fortalt linier, punkter og arealer som repræsentation af den geografiske virkelighed. Rasterdata repræsenterer derimod den geografiske virkelighed ved værdier i celler i et gitter. Vi henviser desuden til fx [Brask 1995] eller [Jones 1997] for en dybere introduktion af forskellene af de to dataformater.

I denne sammenhæng vil vi nøjes med at konstatere at dataformaterne supplerer hinanden frem for erstatter hinanden. Der er stor forskel på hvordan forskellige GIS-analyser bruger det ene eller andet format. Groft set kan vektorformatet nøjere gengive arealer og former korrekt og kaldes i litteraturen en 'object based' datamodel, mens raster i højere grad fokuserer på positionen af et objekt i forhold til gitteret, og derfor kaldes 'location based' [Jones 1997, s.28f].

Afslutningsvis er det værd at bemærke at en DTM gemt i rasterformat, ikke er det samme som selve den interpolerede terrænmodel. Filen som rasterformat består blot af celleværdierne. Men indlæst i MTA er der interpoleret mellem de diskrete celleværdier.

Kapitel 1

Modelpræsentation

Vi vil i dette kapitel præsentere og gøre rede for den matematiske model som modulet MTA benytter til at konstruere digitale terrænmodeller. Indledningsvis vil vi kort beskrive metoden for derefter i de følgende afsnit at gå i dybden med at beskrive detaljerne i de enkelte trin i interpolationsprocessen.

1.1 Generering af en digital terrænmodel i MGE

Vi beskriver i dette afsnit processen for den rumlige interpolation i MTA forud for den grundigere udredning i de følgende afsnit. Kort opridset består processen af tre delprocesser: De vilkårligt fordelte datapunkter regionaliseres, og ud fra højdeværdierne i den regionaliserede struktur konstrueres datapunkter i et rektangulært gitter. Gitterstrukturen er nødvendig for at MTA-modellens bivariable interpolationsværktøjer kan bruges. Disse interpolerer derefter en højdeværdi i ethvert punkt på terrænoverfladen, i den skala som MTA-brugeren definerer.

1.1.1 Regionalisering af datapunkter

En rumlig interpolation af højdedata vil i reglen bygge på antagelsen om, at landskabet overvejende kan beskrives ved en kontinuert funktion. Ud over disse kontinuerte hovedtendenser ved et landskab forventes regionale og endog lokale afvigelser og tendenser. For at beskrive disse er det nødvendigt at regionalisere inddata, eller definere områder hørende til hver datapunkt. Dette kaldes generelt for en tesselation[1].

I MTA består tesselationen i at foretage en triangulation af målepunkterne. De inddeles således at de forbindes med deres 'naturlige' naboer. Definitionen af naturlige naboer varierer imellem forskellige informationssystemer, men er indenfor hvert GIS éntydig.

Resultatet er en struktur af forbindelseslinier mellem nabopunkter, et såkaldt 'Triangular Irregular Network', herefter kaldet TIN.

[1] Efter engelsk 'tesselation', der betyder mosaik.

MTA tillader at diverse informationer om særlige lokale terrænforhold bliver inddraget i triangulationen, et eksempel på sådanne er forekomsten af bratte fald ved dæmninger. TIN-modellen kan således raffineres ved at manipulere med den ellers entydige tesselation. Formålet er at forbedre beskrivelsen af terrænoverfladen og dette kan gøres ved brug af tre parametre, som kan slås til eller fra. Disse vil blive gennemgået i afsnit 1.2.

1.1.2 Konstruktion af rektangulært fordelte data

I de tilfælde hvor målepunkterne ikke er fordelt i et rektangulært gitter, er en tilpasning nødvendig for at kunne benytte de interpolationsværktøjer, MTA stiller til rådighed [Lam 1983, s.135].

I MTA sker dette ved at interpolere højdeværdien i et nyt sæt af datapunkter fordelt i et gitter i planet. Denne konstruktion af gitterpunkter kaldes i MTA for 'Grid Generalization Method'.

Der tilbydes fire forskellige metoder: 'Planar', 'Surface Trend', 'Convergent' og 'Moving Weighted Average'. Vi introducerer til dem i afsnit 1.3.

1.1.3 Interpolation i gitteret

Sidste trin i den samlede proces er selve den fladedækkende interpolation mellem de nu rektangulært fordelte højdedata. MTA opererer med to forskellige metoder, dels bivariable spline-polynomier (bilineære eller bikubiske), dels 'nearest neighbor'-metoden, der er beregnet til situationer hvor højdedata ikke kan siges at repræsentere en kontinuert funktion. Detaljerne i metoderne beskrives i afsnit 1.4.

1.2 Triangulering i MGE Terrain Analyst

Det første trin i MTA's interpolationsproces består i at danne en struktur af plane trekanter, dannet ud fra målepunkternes (x, y)-værdier, dvs. i planet. At triangulationen er plan skyldes risikoen for at to målepunkter ellers fejlagtigt kan defineres som hinandens nærmeste naboer: eksempelvis kan afstanden mellem to toppunkter være mindre end punkternes respektive afstand til et mellemliggende dalpunkt.

1.2.1 Definition af en Thiessen-polygon

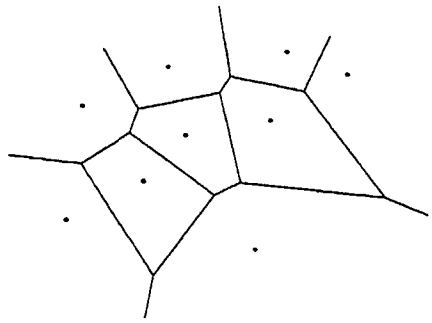
Til alle målepunkter konstrueres de tilhørende Thiessen-polygoner i planet ud fra målepunkternes (x, y)-værdi, se definition 1.1. Den formelle definition af en Thiessen-polygon er:

Definition 1.1 (Thiessen-polygon)
Betragt en mængde, $\mathcal{S} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, bestående af n nummererede punkter $p_i, i = 1, \ldots, n$ i et plan. Til ethvert punkt p_i defineres en mængde $\mathcal{P}_i$ som:

$$\mathcal{P}_i = \{q \in \mathbb{R}^2 | dist(q, p_i) \leq dist(q, p_j); p_j \in \mathcal{S}\}$$

Det vil sige at $\mathcal{P}_i$ består af punkter $q \in \mathbb{R}^2$ i planet, der ligger tættere på p_i end på alle andre punkter $p_j \in \mathcal{S}$, eller i samme afstand fra p_i som fra p_j.

Mængden $\mathcal{P}_i$ kaldes for den til punktet p_i hørende Thiessen-polygon, som altid vil være konveks men ikke nødvendigvis begrænset [Boots 1988, s.1f], se figur 1.1. Konsekvenserne af denne eventuelle ubegrænsethed er at der kan opstå problemer ved randen. For punkter beliggende meget langt fra p_i men stadig i $\mathcal{P}_i$, kan man diskutere om relationen til p_i er stærkere end til p_i's nabopunkt. Specielt vil usikkerheden være tydelig hvis det fjerne punkt ligger tæt på skillelinien mellem $\mathcal{P}_i$ og $\mathcal{P}_j$. I et GIS er problemet dog automatisk omgået ved at arbejdsområdet naturligt er fysisk afgrænset, og derfor er de konstruerede polygoner i MTA altid begrænsede.



Figur 1.1 Thiessen-polygoner for et sæt tænkte datapunkter i planet. Thiessen-diagrammet består af Thiessen-polygonerne for alle datapunkter.

1.2.2 Konstruktion af Thiessen-diagram

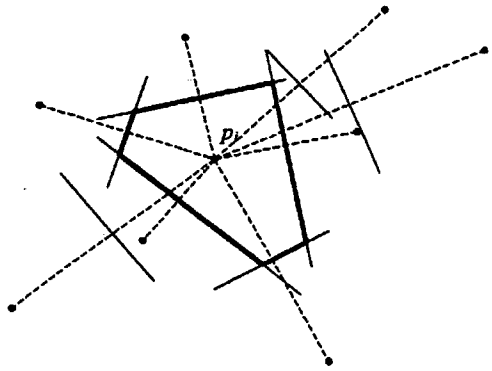
Konstruerer vi for alle punkter $p_i \in \mathcal{S}$ deres tilhørende Thiessen-polygon $\mathcal{P}_i$, fremkommer en éntydig mængde af polygoner, det såkaldte Thiessen-diagram, $T(\mathcal{S})$ [Boots 1988, s.1ff], se figur 1.1. Således vil ethvert punkt beligende på en polygonside være i samme afstand fra netop to punkter fra $\mathcal{S}$, og et punkt beliggende i et polygonhjørne være i samme afstand fra tre eller flere punkter i $\mathcal{S}$.

På denne måde er de naturlige naboer til punktet p_i altså defineret som de punkter, p_j, hvis tilhørende Thiessen-polygoner $\mathcal{P}_j$, deler flere end ét randpunkt med $\mathcal{P}_i$.

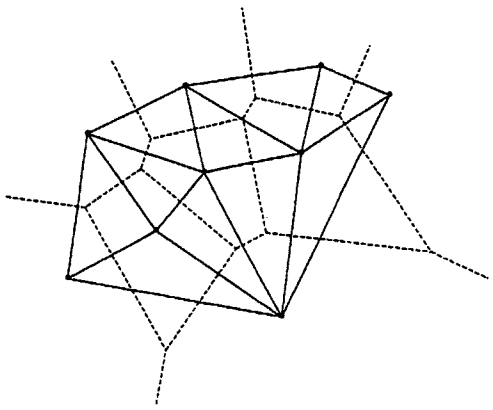
En konkret metode til at finde Thiessen-polygonen til et punkt p_i består i at man for alle punkter $p_j \in \mathcal{S}, j \neq i$ tegner en linie vinkelret på forbindelseslinien mellem p_i og p_j således, at linien deler afstanden mellem p_i og p_j i to lige store dele. Thiessen-polygonen $\mathcal{P}_i$ vil da være det mindste areal, der indkredses af alle de tegnede linier og som indeholder punktet p_i, se figur 1.2.

1.2.3 Delaunay-triangulation

Hvis vi efter at have konstrueret Thiessen-diagrammet $T(\mathcal{S})$ tegner en linie mellem alle par af målepunkter p_i og p_j, hvis Thiessen-polygoner $\mathcal{P}_i$ og $\mathcal{P}_j$ deler en polygon-



Figur 1.2 Punktet p_i's Thiessen-polygon $\mathcal{P}_i$ vil være det mindste areal som indeholder p_i (datapunkterne er de samme som i figur 1.1).



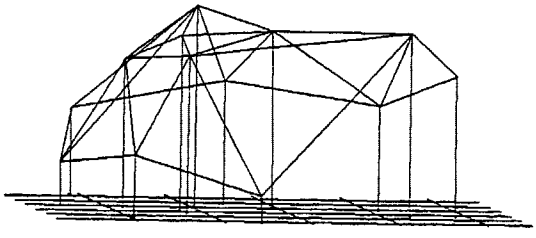
Figur 1.3 Delaunay-triangulation af samme mængde af datapunkter som i figur 1.1. Vi ser at $T(\mathcal{S})$ og $D(\mathcal{S})$ kan siges at være to sider af samme sag.

side, fremkommer en ny tesselation af planet, som kaldes Delaunay-triangulationen af mængden $\mathcal{S}$, $D(\mathcal{S})$, se figur 1.3.

Hvis alle hjørnepunkter i det oprindelige Thiessen-diagram $T(\mathcal{S})$ deles af højst tre Thiessen-polygoner, vil den nye tesselation af planet bestå udelukkende af trekanter. I afsnit 3.2.1 behandles tilfælde hvor dette ikke er opfyldt. I kraft af sin relation til $T(\mathcal{S})$ minimerer $D(\mathcal{S})$ kantlængden af trekanterne. Punkter som er forbundet, ligger altså så tæt på hinanden i planet som muligt.

1.2.4 Ophøjning af Delaunay-triangulationen

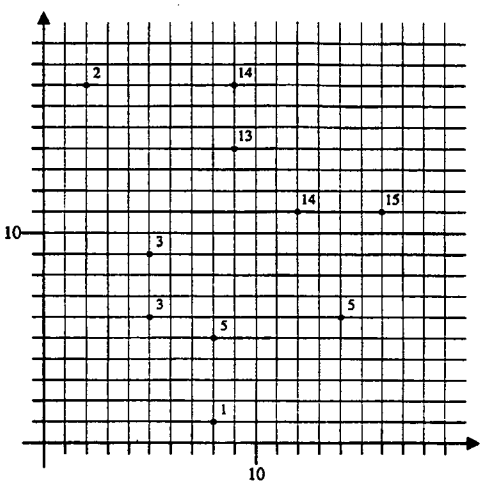
Hvert (x, y)-punkt tildeles nu dets tilhørende målte højdeværdi, ved så at sige at hæve Delaunay-trekanternes hjørner op i z-retningen i koordinatsystemet. Derved opnås visuelt en tredimensional flade, bestående af trekantede facetter, se figur 1.4. Det er denne flade der kaldes for en TIN. Trekanterne er endnu ikke 'fyldt' ud,



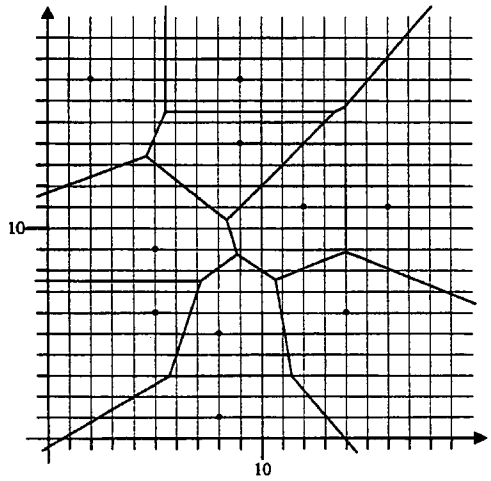
Figur 1.4 Hver punkt har fået tildelt sin oprindeligt målte værdi, hvorved der visuelt fremkommer en tredimentional struktur. Hver facet er dog ikke en flade, idet kun punkterne har en kendt højdeværdi. Gitteret illustrerer et koordinatsystem i planet hvori målepunkterne er fordelt.

dvs. højdeværdierne for alle mellemliggende punkter i trekanterne er ikke estimeret. Men ved en forespørgsel (til MTA) om højdeværdien i et givet punkt sker en lineær interpolation øjeblikkeligt.

Eksempel 1.1 (Et gennemgående eksempel)
For at illustrere metoderne der anvendes i interpolationsprocessen har vi konstrueret et eksempel, som vi vil bygge op igennem de kommende afsnit. Vores eksempel tager udgangspunkt i en mængde af målepunkter som er tilfældigt indsamlet fra en konstrueret flade, se figur 1.5.



Figur 1.5 Mængden af punkter som benyttes i det gennemgående eksempel – talværdierne i gitteret angiver hvert punkts højdeværdi.



Figur 1.6 Thiessen-diagrammet for vores mængde.

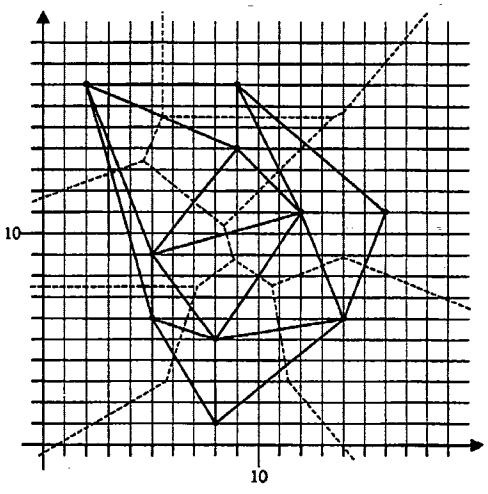
Første trin i interpolationsprocessen består kun af rent geometriske mængdedannelser. Med udgangspunkt i ovenstående mængde kan hver Thiessen-polygon konstrueres i (x, y)-planet ved den beskrevne metode, og dermed danne det samlede Thiessen-diagram (se figur 1.6).

Når vi har konstrueret Thiessen-diagrammet kan punkterne trianguleres, og dermed dannes Delaunay-triangulationen. Punkterne er hermed forbundet til deres naturlige naboer, og punkterne kan nu tildeles deres oprindelige z-værdi. (Se figur 1.7 og 1.8.)

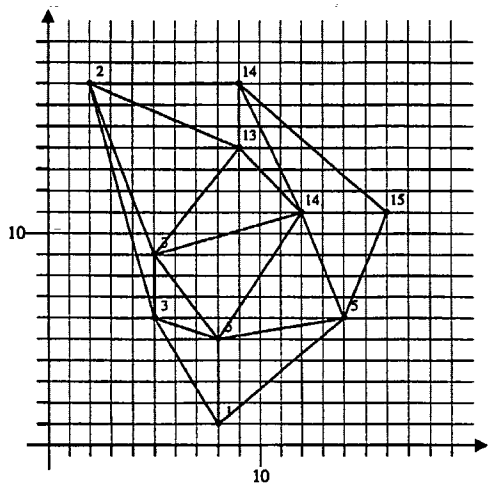
Visse aspekter ved TIN-konceptet er dog problematiske. Dem præsenterer vi kort her og kommer tilbage til dem i vores analyse af MTA-modellen i kapitel 3.

1.2.5 Problemer ved TIN-konceptet

Et kritikpunkt er at Delaunay-triangulationen ikke i alle tilfælde kan forventes at repræsentere det modellerede terræn acceptabelt. I tilfælde hvor TIN-modellen rummer områder med meget store og meget små trekanter, og hvor overgangen mellem



Figur 1.7 Delaunay-triangulationen foretaget på datamængden.



Figur 1.8 Den 'ophøjede' Delaunay-triangulation – talværdierne repræsenterer igen højden over (x, y)-planet for et givet punkt.

disse forskellige områder sker brat, konstrueres ved Delaunay-triangulationen nogle meget lange og smalle trekanter. Disse trekanter repræsenterer ikke den virkelige overflade pålideligt [Douglas 1986, s.31]. Problemet søges i MTA elimineret ved at brugeren kan slå parameteren 'Triangle Edge Maximum Length' til. Derved sætter brugeren selv den maksimale længde af trekanternes sider. Brugen af parameteren og valg af en passende maksimal længde er ikke helt entydig, men beror på brugerens kendskab til inddata.

I tilfælde af at datapunkterne er underrepræsenteret langs kanten af området, kan man vælge funktionen 'Densify TIN fence'[2]. Derved sættes MTA til at placere 'pseudopunkter' langs randen af arbejdsområdet[3], der på den måde bliver mere detaljeret og pålidelig langs kanten [MGE-manualer]. Det er en måde at afgrænse det område som MTA skal triangulere på. Fra at triangulere i det konvekse hylster skal MTA-modellen med 'Densify TIN Fence' sat til, mere skarpt respektere den brugerbestemte grænse af arbejdsområdet. I dette projekt hvor vi om Bornholm ved, at alle højdeværdier omkring øen sættes til 0, betyder det ikke andet end at triangulationen ikke trækker linier henover bugter og krumninger langs kysten, og det har kun rent visuel betydning.

Den sidste mulighed brugeren har for at påvirke den ellers entydige triangulation er med parameteren 'Infer Breaklines'. Dette er med til at sikre at vendelinier[4] og lignende bliver indtegnet under triangulationen, og kan kun bruges når inddata er højdekurver (i andre tilfælde vil mulighederne for at indtegne vendelinier være

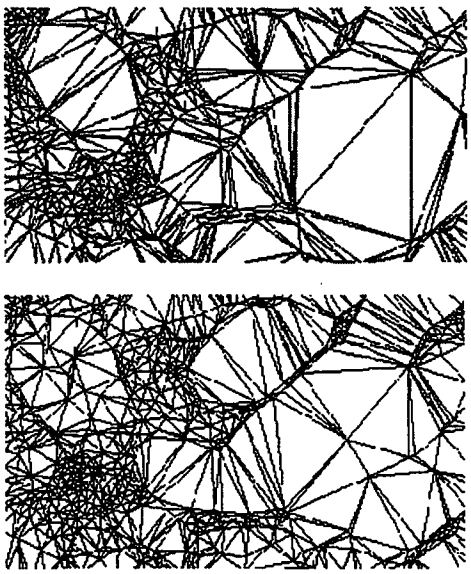
[2]Denne funktion kan kun vælges hvis inddata er højdekurver.

[3]Det vil sige langs en højdekurve og dermed med samme højdeværdi som denne.

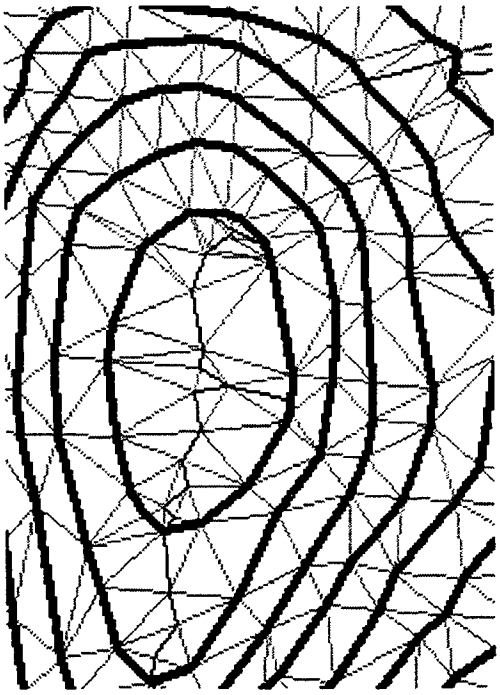
[4]En vendelinie eller breakline er en linie i terrænet langs hvilken hældningen skifter fortegn.

flertydige).

Både hos Intergraph og i litteraturen argumenterer man for så vidt muligt altid at medtage vendelinier i terrænet undervejs i triangulationen. Det betyder at trekanter i TIN-modellen med hældningen 0 opdeles i mindre trekanter der hver især får en hældning forskellig fra 0. I figurerne 1.9 og 1.10 viser vi to eksempler på betydningen af breaklines. I 1.9 er et udsnit af TIN-modellen (for et mindre område nordvest for Dueodde) indtegnet, nederst hvor 'Infer Breaklines' er sat til, øverst uden. Vi bemærker at trekanterne generelt er mindre i modellen med vendelinierne (og at der er flere af dem). I figur 1.10 er vist et eksempel på hvordan de indtegnede vendelinier lægges over en bakkekam. Med grå streger er kanterne i Delaunay-triangulationen tegnet, fede sorte streger er højdekurverne i modellen og med fine streger er vendelinierne vist.



Figur 1.9 Illustration af hvordan indtegnede 'breaklines' forandrer triangulationen. For et mindre område er to forskellige triangulationer vist, øverst uden breaklines, nederst med.



Figur 1.10 Et lokalt eksempel på hvordan de indtegnede vendelinier ser ud. Højdekurverne er angivet med tykke streger, triangulationens kantlinier med gråt og vendelinier med fine, sorte streger.

1.3 Konstruktion af et rektangulært gitter

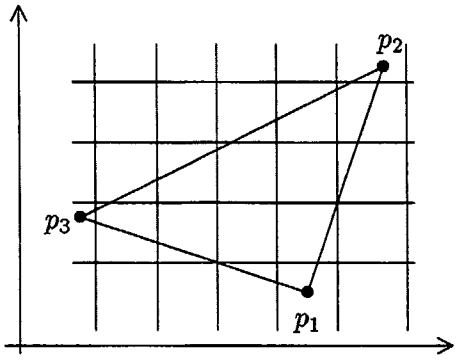
Vi har i afsnit 1.1 nævnt at en beregning af højdeværdier af rektangulært fordelte punkter er nødvendig for at kunne anvende de bivariable splines. Forberedelsen sker

ved først at konstruere et rektangulært gitter og derefter interpolere en højdeværdi til hver gitterpunkt.

Vi kan vælge imellem fire forskellige interpolationer af gitterpunkterne, og der er stor forskel på de beregnede værdier i gitterpunkterne, alt afhængig af den valgte metode. Det er altså afgørende at man som bruger kender forskellen og træffer det rigtige valg. Metoderne er følsomme overfor antallet af datapunkter i TIN-modellen. Flere af dem er direkte udviklet til at interpolere gitterpunkter imellem meget spredte datapunkter, mens kun én håndterer tætte datapunkter i større antal. Denne ene (planar) er ifølge [MGE-manualer] specielt beregnet til højdedata.

Planar

Metoden beregner en højdeværdi for ethvert gitterpunkt ud fra målepunkternes værdier. Da ethvert gitterpunkt befinder sig i en Delaunay-trekant, benyttes dennes tre hjørner $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$; $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$; $p_3 = (x_3, y_3, z_3)$ til at bestemme de tre koefficienter i ligningen for planet gennem punkterne. Altså en ligning af formen $z = Ax + By + C$. Se figur 1.11.



Figur 1.11 De tre punkter p_1, p_2 og p_3 benyttes til bestemmelse af koefficienterne til planet igennem dem. Dette benyttes til udregning af højdeværdier til de i trekanten liggende gitterpunkter.

Disse koefficienter bestemmes ud fra udtrykket

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

forudsat at matricen er regulær og derved invertibel. Dette vil dog altid være tilfældet, idet enhver Delaunay-trekant vil have et areal større end 0. Ud fra den fastsatte ligning for planet udregnes derpå de ønskede gitterpunktsværdier. Befinder gitterpunktet sig på randen af to Delaunay-trekanter foretages en lineær interpolation mellem de to fælles datapunkter, og er gitterpunktet sammenfaldende med et målepunkt benyttes den målte værdi som gitterværdi.

Surface trend

Denne metode anvender et globalt polynomium af forholdsvis lav grad til at fange tendensen af højdedata indenfor et område. Metoden er beregnet til den situation hvor inddata er væsentlig mere spredt fordelt (end for metoden planar's vedkommende) og man ønsker et billede af storskala-afvigelser i det modellerede terræn. Ved at trække 'tendens-polynomiet' fra den konkrete terrænmodel træder regionale afvigelser og tendenser tydeligere frem [Burrough 1986, s.150].

Tendens-polynomiets koefficienter fastsættes ud fra det kriterium at summen af kvadratet på afvigelserne mellem polynomiumsværdien og den målte værdi i et hvert punkt skal minimeres, altså at udtrykket

$$\sum_{i=1}^{n}(z(p_i) - f(p_i))^2 \tag{1.1}$$

minimeres, hvor $z(p_i)$ er den målte højdeværdi i punktet p_i, mens $f(p_i)$ er polynomiumsværdien i det samme punkt [Jones 1997, s.203], [Burrough 1995, s.10]. Når tendens-polynomiet er fastsat, genereres de ønskede gitterpunktsværdier direkte ud fra polynomiumsudtrykket.

Eksempel 1.2
Betragt en mængde af N datapunkter. Antag at tendens-polynomiet er et førstegrads-polynomium af formen $z = Ax + By + C$. A, B og C skal bestemmes således at ligning 1.1 har minimum, dvs. følgende skal være opfyldt:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_i \frac{\partial}{\partial A}(z_i - (Ax_i + By_i + C))^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
2\textstyle\sum_i x_i(z_i - (Ax_i + By_i + C)) &= 0 \Leftrightarrow \\
\textstyle\sum_i z_i x_i &= A\textstyle\sum_i x_i^2 + B\textstyle\sum_i x_i y_i + C\textstyle\sum_i x_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_i \frac{\partial}{\partial B}(z_i - (Ax_i + By_i + C))^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
2\textstyle\sum_i y_i(z_i - (Ax_i + By_i + C)) &= 0 \Leftrightarrow \\
\textstyle\sum_i z_i y_i &= A\textstyle\sum_i x_i y_i + B\textstyle\sum_i y_i^2 + C\textstyle\sum_i y_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_i \frac{\partial}{\partial C}(z_i - (Ax_i + By_i + C))^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
2\textstyle\sum_i(z_i - (Ax_i + By_i + C)) &= 0 \Leftrightarrow \\
\textstyle\sum_i z_i &= A\textstyle\sum_i x_i + B\textstyle\sum_i y_i + CN
\end{aligned}$$

Med andre ord kan de tre koefficienter til tendens-polynomiet af første grad bestemmes ud fra

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum z &= A\textstyle\sum x &&+B\textstyle\sum y &&+CN \\
\textstyle\sum zx &= A\textstyle\sum x^2 &&+B\textstyle\sum yx &&+C\textstyle\sum x \\
\textstyle\sum zy &= A\textstyle\sum xy &&+B\textstyle\sum y^2 &&+C\textstyle\sum y
\end{aligned}$$

ifølge [Lam 1983, s.148]. Dette kan direkte udvides når et tendens-polynomium af højere orden skal bestemmes.

Power trend/Convergent Gridding

Denne metode kaldes også Shepard's metode [Woodbury 1998] og er en udbredt metode. Højdeværdien i et gitterpunkt beregnes ved følgende, efter [Lancaster & Šalkauskas 1990]:

$$z(x_i, y_j) = \frac{\sum_{k=1}^{n} dist((x_i, y_j), p_k)^{-P} \cdot z(p_k)}{\sum_{k=1}^{n} dist((x_i, y_j), p_k)^{-P}} \tag{1.2}$$

I udtrykket er $z(x_i, y_j)$ den beregnede højdeværdi for et givet gitterpunkt, $dist((x_i, y_j), p_k)^{-P}$ er afstanden mellem det k'te punkt og gitterpunktet opløftet i potensen $-P$, og $z(p_k)$ er højdeværdien i det k'te datapunkt.

Læseren skal være opmærksom på at p_k svarer til de målte datapunkter, som vi i afsnit 1.2 omtalte som p_j.

P sættes af brugeren til en værdi større end 0. MTA foreslår som standard værdien 1. Når P er større end 1, bliver den fremkomne flade mindst én gang differentiabel [Lancaster & Šalkauskas 1990].

MGE benytter denne metode iterativt til først at beregne en højdeværdi for hvert 16. gitterpunkt (som standard), for derefter at halvere afstanden mellem de gitterpunkter som inddrages i en ny beregning (dvs. til hver 8.). I den nye beregning bruges også de i første trin beregnede værdier for $z(x_i, y_j)$. Processen gentages indtil der er beregnet en højdeværdi i alle gitterpunkter [MGE-manualer].

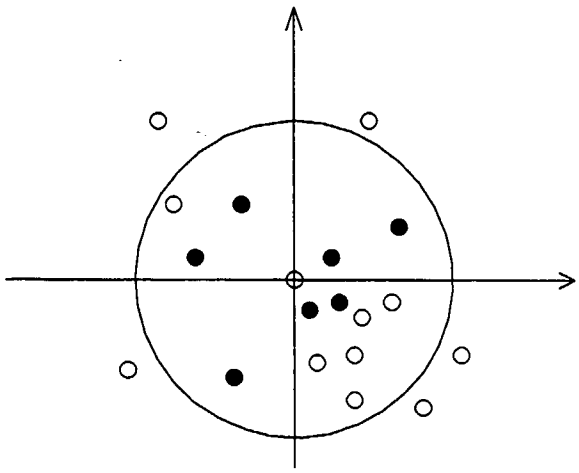
Moving weighted average

Denne sidste metode adskiller sig ikke fra 'Convergent'-konstruktionen, ud over at den ikke forløber iterativt[5].

Metoden er ofte anvendt for spredt fordelte data, se fx [Burrough 1986, s.153f]. Den beregner højdeværdierne til gitterpunkterne ét ad gangen ved for ethvert gitterpunkt at beregne afstanden til de målepunkter der ligger indenfor en given afstand. Højdeværdien i dette punkt vægtes med den reciprokke til afstanden mellem punktet og gitterpunktet i en given potens, og en foreløbig højdeværdi tillægges gitterpunktet via naboens nu vægtede højdeværdi. Sådan gøres nu for alle punkter indenfor den givne afstand af gitterpunktet. Den interpolerede højdeværdi kan beskrives ved ligning (1.2) og er reelt blot den vægtede middelværdi af de punkter som indgår i udregningen.

Spørgsmålet er nu hvordan udvælgelsen af de punkter som skal indgå i denne vurdering, sker. I [Jones 1997] nævnes en metode der går ud på, at maksimalt to punkter fra hver kvadrant indenfor en given afstand af gitterpunktet, må indgå i bestemmelsen, se figur 1.12. På denne måde er der større sandsynlighed for, at variationen af terrænet i alle retninger medtages i bestemmelsen.

[5] [MGE-manualer] er yderst tilbageholdende med information omkring disse værktøjer.



Figur 1.12 Illustration af en mulig udvælgelse af datapunkter der skal indgå i bestemmelsen af en højdeværdi for et gitterpunkt. De fyldte cirkler er de punkter der indgår, og de andre er punkter der ikke indgår i udregningen. Efter [Jones 1997].

Eksempel 1.3 (Det gennemgående eksempel)
I eksempel 1.1 på side 11 blev triangulationen af datapunkterne gennemført. Vi vil nu lægge et gitter over det triangulerede område, og beregne gitterpunkternes højdeværdi ved den plane metode (se figur 1.13). Gitteret som lægges over det triangulerede område er kvadratisk, og afstanden mellem gitterpunkterne er 3 enheder på akserne. Dette gitter passer nogenlunde indenfor det triangulerede område.

For gitterpunktet $(x, y) = (4, 16)$ beregnes dennes højdeværdi. Først bestemmes ligningen for den tilhørende trekants plan:

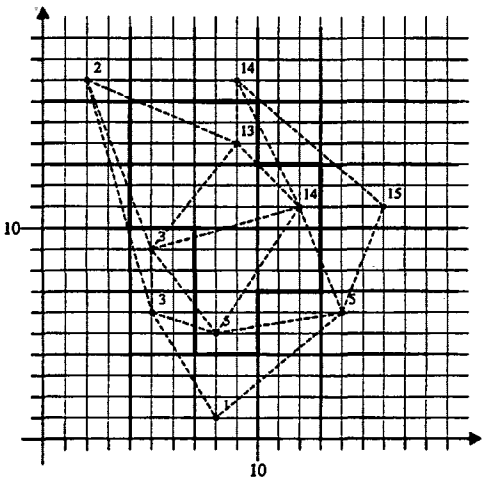
$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 17 & 1 \\ 5 & 9 & 1 \\ 9 & 14 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,809 \\ 0,553 \\ -11,021 \end{pmatrix}$$

Ud fra disse beregnede koefficienter kan højden i det ukendte punkt beregnes:

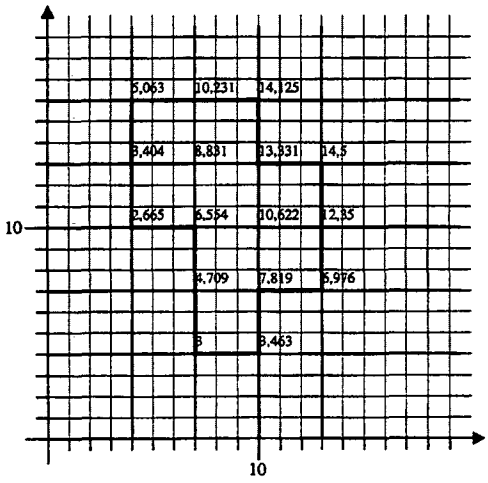
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1,809 \\ 0,553 \\ -11,021 \end{pmatrix} = 5,063$$

Beregningerne for de resterende punkter foregår på samme vis, og gøres det for alle gitterpunkter der ligger indenfor triangulationens konvekse hylster, fremkommer et gitter med interpolerede højdeværdier (se figur 1.14).

Interpolationsmetoden skal ud over højdeværdien også bruge hældningen i begge retninger i alle gitterpunkter. Hældningen i x- og y-retningen i et punkt findes som



Figur 1.13 Et gitter lagt over det triangulerede område – bemærk de to forskellige gitre.



Figur 1.14 De interpolerede højdeværdier i gitterpunkterne.

den afledte i henholdsvis x-og y-retningen af ligningen der beskriver det plan som gitterpunkter befinder sig i. Det vil sige at for det omtalte punkt er hældningen i x-retningen $A = 1,809$, y-retningen $B = 0,553$. Dette gitter føres videre til næste afsnit hvor vi konstruerer en bikubisk spline der dækker det.

1.4 Den fladedækkende interpolation

Ved dette punkt i processen fra diskrete målepunkter til en færdig interpoleret flade, er målepunkterne blevet brugt til at estimere et sæt af rektangulært fordelte datapunkter ordnet i et gitter.

Opgaven består derpå i at approksimere en funktion $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der har den egenskab at den i ethvert gitterpunkt (x_i, y_j) har samme funktionsværdi som den 'målte' højdeværdi i det enkelte punkt[6]. Det vil sige at $s(x_i, y_j) = s_{ij}$ $\forall i, j$. Denne opgave løses i MTA af de bivariable spline-polynomier.

1.4.1 Den bivariable spline

Ifølge [Dierckx 1993, s.23] kaldes den form for fladedækkende spline-interpolator som MTA benytter, for en tensorprodukt-spline. Denne er bundet til et rektangulært domæne i modsætning til andre generelle splines, der kan defineres på arbitrære triangulationer. Sådanne metoder er dog ifølge [Dierckx 1993] væsentlig mere komplekse og derfor mindre operationelle og ikke så velvalgte til et computerprogram.

[6]Der jo altså ikke er en fysisk målt værdi, men en genereret gitterværdi.

Den bivariable spline er en stykkevis sammensat polynomiumsfunktion, der afhænger af to variable. Den formelle definition er ifølge [Dierckx 1993][7]:

Definition 1.2
Lad to strengt voksende taltupler være givet ved:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_g < x_{g+1} = b$$

og

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_h < y_{h+1} = d$$

Funktionen $s(x, y)$ kaldes en bivariabel tensorprodukt-spline på $R = [a, b] \times [c, d]$, af grad $k > 0$ i x og $l > 0$ i y, med knudepunkterne x_i, $i = 0, 1, \ldots, g + 1$ i x-retningen og y_j, $j = 0, 1, \ldots, h + 1$ i y-retningen, hvis følgende to betingelser er opfyldt:

1. *På hver subrektangel $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ er $s(x, y)$ givet ved et polynomium af grad k i x-retningen og l i y-retningen:*

$$s_{|R_{ij}} \in \mathcal{P}_k \otimes \mathcal{P}_l \ , \ i = 0, 1, \ldots, g; \ j = 0, 1, \ldots, h$$

2. *Funktionen $s(x, y)$ og alle dens partielt afledte $\frac{\partial^{m+n} s(x,y)}{\partial x^m \partial y^n}$, $0 \leq m < k; 0 \leq n < l$ er kontinuerte på R*

$$\frac{\partial^{m+n} s(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \in C(R) \ , \ m = 0, \ldots, k - 1; \ n = 0, \ldots, l - 1$$

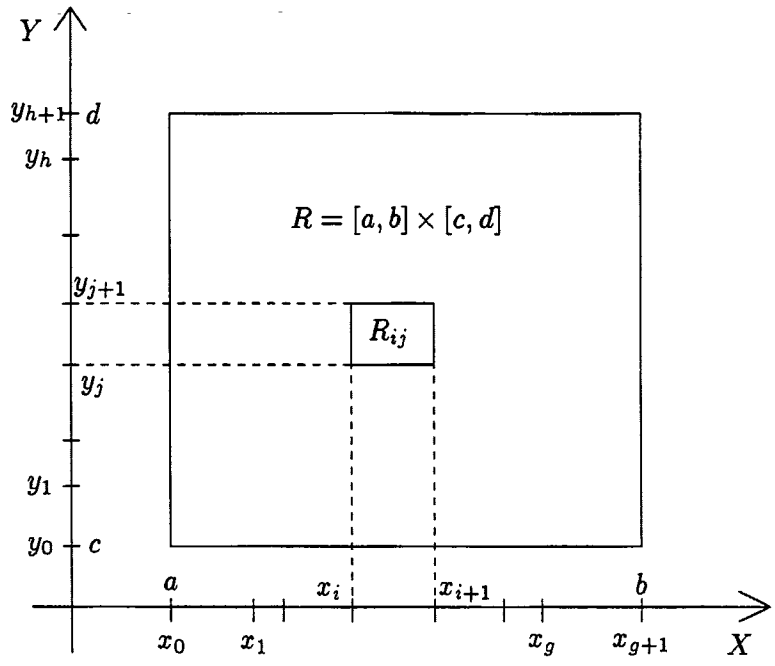
I det generelle tilfælde vil en spline være givet ved forskellige polynomier i hvert subrektangel. Dette bevirker at den k'te partielt afledte af s mht. x og/eller den l'te partielt afledte af s mht. y kan være diskontinuert.

I MTA kan der vælges mellem to typer af bivariable splines, den bilineære spline, hvor $k = l = 1$ og så den bikubiske, hvor $k = l = 3$. Af disse giver den bikubiske det bedste (og pæneste) resultat, idet den bilineære svarer til en lineær interpolation i det todimensionale tilfælde. Det er en for grov approksimation, hvis den modellerede terrænoverflade afviger blot en anelse fra det lineære.

[Lancaster & Šalkauskas 1990, s.87] nævner at den bikubiske spline-interpolation i de senere år har vist sig at være den mest brugbare metode. [Dierckx 1993, s.138] skriver at den bikubiske spline er et godt kompromis mellem effektivitet og kvalitet, og samtidig nævner også [Lam 1983] den bikubiske metode som værende den der giver det bedste resultat. Dette godtgør til en vis grad valget af interpolationsmetode foretaget af Intergraph.

Derudover tilbydes i MTA interpolationsmetoden 'nearest neighbor' som dog i de situationer vi beskæftiger os med er uanvendelig, idet den er beregnet til ikke-

[7] Se også figur 1.15 for en illustration.



Figur 1.15 Illustration af domæne, gitterpunkter og subrektangel.

kontinuerte data. I 'nearest neighbor'-interpolationen gives hver celle den samme højdeværdi som den nærmeste nabocelle, hvilket altså oplagt ikke er kontinuert. Vi vil derfor i det efterfølgende ikke beskæftige os mere med denne metode.

1.4.2 Fastsættelse af en bikubisk spline

Situationen er altså den at der skal fastsættes et bukubisk polynomium på hver af de $g \cdot h$ subrektangler. Vi vil her kun gengive fastsættelsen af koefficienterne til polynomiet i én subrektangel defineret ud fra gitterpunkterne $((x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_{j+1}))$. Polynomiet der skal bestemmes, er af formen:

$$s_{ij}(x, y) = \sum_{k=1}^{4} \sum_{l=1}^{4} a_{ijkl}(x - x_i)^{k-1}(y - y_j)^{l-1} \tag{1.3}$$

Som det kan ses skal der bestemmes $4 \cdot 4$ koefficienter. Det er derfor nødvendigt med 16 ligninger til bestemmelse af disse 16 koefficienter. Disse skaffes ved i hvert af de fire gitterpunkter at kende funktionsværdien, den partielt afledte mht. x, den partielt afledte mht. y og den partielt afledte efter både x og y. Kendes disse[8] kan de bruges til bestemmelsen af koefficienterne ud fra

$$a_{ij} = [G(x_i)]^{-1}[S_{ij}][G(y_j)^T]^{-1} \tag{1.4}$$

[8]Hvis disse ikke kendes kan de estimeres, evt. ved en lineær approksimation.

hvor matricerne $G(x_i)$ og $G(y_j)$ og deres inverse er givet ved følgende:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/h^2 & -2/h & 3/h^2 & -1/h \\ 2/h^3 & 1/h^2 & -2/h^3 & 1/h^2 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

I dette udtryk er $h = (x_{i+1} - x_i)$ eller $h = (y_{j+1} - y_j)$ alt efter om der er tale om matricen $G(x_i)$ eller $G(y_j)$. Matricen S_{ij} er givet ved følgende:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} z_{ij} & v_{ij} & z_{i,j+1} & v_{i,j+1} \\ u_{ij} & w_{ij} & u_{i,j+1} & w_{i_j+1} \\ z_{i+1,j} & v_{i+1,j} & z_{i+1,j+1} & v_{i+1,j+1} \\ u_{i+1,j} & w_{i+1,j} & u_{i+1,j+1} & w_{i+1,j+1} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Her er z_{ij} er funktionsværdien i gitterpunktet (x_i, y_j); u_{ij}, v_{ij} og w_{ij} er de partielt afledte efter x, y og både x og y [Lam 1983, s.146f]. Ligning 1.4 fremkommer ved at Taylor-udvikle S_{ij}'s elementer i punktet (x_i, y_j) til en orden hvor den tredie afledte af z_{ij} indgår, og så derefter rokere om på det fremkomne matrixsystem. Detaljerne omkring udregningen af matricerne vil vi ikke komme ind på her.

I eksempel 1.4 vil fortsætte vores eksempel fra afsnit 1.3, hvor vi nu er nået til fastsættelsen af den bikubiske spline.

Eksempel 1.4 (Det gennemgående eksempel)
I det gennemgående eksempel konstruerer vi det bikubiske polynomium der dækker kvadranten med nederste venstre hjørne i $(7, 4)$. *Først bestemmes koefficienterne til polynomiet. Dette gøres ved matricerne* $G(x)$, $G(y)$ *og* S. *Matricerne* $G(x)$ *og* $G(y)$ *er ens da gitteret er kvadratisk, det vil sige:*

$$G(x) = G(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 1 & 6 & 27 \end{pmatrix}$$

Matricen S *består af de værdier som blev interpoleret i eksempel 1.3, og den har følgende udseende (afrundet):*

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3,463 & -0,167 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4,709 & 1,412 & 7,819 & -0,281 \\ 0,559 & 0 & 1,688 & 0 \end{pmatrix}$$

De tre matricer giver tilsammen koefficienterne i det søgte bikubiske spline-polynomium:

$$G(x)^{-1} \cdot S \cdot (G(y)^{-1})^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -0,457 & 0,0580 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,283 & 0,137 & 0,0900 & -0,0260 \\ 0,0470 & -0,0310 & -0,00601 & 0,00278 \end{pmatrix}$$

Polynomiet fremkommer nu ved at multiplicere vektorerne $(1, y-4, (y-4)^2, (y-4)^3)$ *og* $(1, x-7, (x-7)^2, (x-7)^3)^T$ *på fra henholdsvis venstre og højre*

$$s(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y-4 \\ (y-4)^2 \\ (y-4)^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -0,457 & 0,0580 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,283 & 0,137 & 0,0900 & -0,0260 \\ 0,0470 & -0,0310 & -0,00601 & 0,00278 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x-7 \\ (x-7)^2 \\ (x-7)^3 \end{pmatrix}$$

og polynomiet får følgende udseende når det ekspanderes:

$$\begin{aligned} s(x,y) = 208 - 93,7x + 12,8x^2 - 0,543x^3 \\ -144y + 62,2xy - 8,25x^2y + 0,345x^3y \\ +24,1y^2 - 10,6xy^2 + 1,42x^2y^2 - 0,0598x^3y^2 \\ -0,988y^3 + 0,462xy^3 - 0,0644x^2y^3 + 0,00278x^3y^3 \end{aligned}$$

1.4.3 Afrunding

Således når vi til vejs ende i redegørelsen for det matematiske fundament i genereringen af de digitale terrænmodeller i MGE. Som vi har set er der visse overvejelser at gøre sig om generaliserbarhed, følsomhed og anvendelser af modellen. Og det er vigtigt at foretage undersøgelser af det indsamlede datamateriale samt kende til specielle forhold ved det modellerede terræn igennem dataindsamling.

I de følgende kapitler vil vi undersøge MTA-modellen, dels i sin helhed med fokus på forholdet mellem ind- og uddata, og dels hver submodel med fokus på de anvendte antagelser og nødvendige forudsætninger.

Kapitel 2

Optakt til analyser af MTA-modellen

I de følgende tre kapitler underkaster vi MTA-modellen og dens uddata, de digitale terrænmodeller, undersøgelser både af teoretisk og af mere praktisk art.

Her i kapitlet lægger vi op til og begrunder de praktiske analyser som vi foretager i kapitel 4. Det vil ske i lyset af de inddata vi har haft i brug under arbejdet og af en praktisk GIS-anvendelse af terrænmodellen.

I kapitel 3 karakteriserer vi MTA-modellen som matematisk model, ser på dens status og egenskaber med en modelteoretisk tilgang, for at kunne tage passende forbehold for modellens uddata.

Udgangspunktet for analyserne i kapitel 4 er en udvælgelse af inddata, således at den konstruerede terrænmodel gengiver så megen information som muligt ud fra så begrænsede inddata som muligt.

2.1 Det behandlede datamateriale

Arbejdsområdet er som omtalt de 587 km^2 som Bornholm dækker. I det følgende antager vi at Bornholm er et velegnet testlandskab, ud fra betragtninger om at Bornholm rummer et bredt spektrum af landskabstyper – flade markarealer, kuperede bakkezoner, højderygge, kystzoner etc. Derudover har vi som tidligere omtalt mulighed for at arbejde med datasæt der er af en størrelse der ligner dem en digital terrænmodel tænkes at skulle virke på.

Det primære datagrundlag for projektet er digitaliserede højdekurver fra [Kampsax Geoplan 1996], fra 5 m til 155 m, med en ækvidistance overalt på 5 m. Disse ca. 500 højdekurver er digitaliseret som sammenhængende kæder af rette liniestykker, med i alt 53.880 knækpunkter. Usikkerheden i kortlægningsen af disse er med moderne hjælpemidler meget lav, dvs. under 1 m. Fra disse højdekurver har vi udtrukket koordinatsættene for udvalg af knækpunkterne (se nedenfor).

Derudover har vi selv digitaliseret de toppunkter på øen, som er gengivet på topografiske kort fra Kort- og Matrikelstyrelsen (1:100.000-serien),

[Kort- og Matrikelstyrelsen 1992]. Fra det topografiske kort har vi desuden digitaliseret kystlinien (højdekurven med højdeværdien nul) og derved afgrænset terrænmodellen.

Information i datapunkter

Det er oplagt at der ligger mange overvejelser forud for indsamlingen og siden hen digitalisering af målepunkters beliggenhed i forhold til både hinanden og terrænet. Metoderne kan groft set sammenfattes til indsamling af:
1) Punkter fordelt usystematisk i terrænet.
2) Systematisk fordelte punkter, langs enten højdekurver (kurver i terrænet i samme højde) eller punkter i et foruddefineret gitter.
3) En informationsbaseret lokalisering og udvælgelse af målepunkter. I lokaliseringen af målepunkter bruger man den information der kan hentes om det omkringliggende terræn ud fra selve målepunktet. Man vil lægge målepunkter tættere på hinanden de steder hvor terrænet skifter karakter end på homogene arealer.

Vi kunne umiddelbart argumentere for at alle tre strategier er brugbare i givne situationer. Alligevel vil vi fremhæve strategi nr. 3). Vi kan med den lægge mere viden ind i interpolationen fordi data fra visse punkter indirekte giver information om deres omegn. Vi kalder dem for 'informationsrige' lokaliteter, og de tæller bl.a. lokale top- og dalpunkter, saddelpunkter, kamme og diskontinuitetslinier. Således vil man om fx en bakketop vide at alle nabopunkter ligger lavere end punktet selv, og så fremdeles.

I forbindelse med undersøgelser af følsomheden i MTA-modellen overfor mængden af inddata, genererer vi en række forskellige udtræk af den samlede mængde datapunkter (kaldet 'samplinger').

Med udgangspunkt i mængden af knækpunkterne fra alle højdekurverne har vi degenereret vores datasæt ved en algoritme der udvælger hver andet datapunkt og derved danner en ny datamængde indeholdende halvt så mange datapunkter. Herefter gentages processen. I alt konstrueres samplingerne:[1]

Sampling-navn	Størrelse
Sampling A	26.940 ($\frac{1}{2}$)
Sampling B	13.470 ($\frac{1}{4}$)
Sampling C	6736 ($\frac{1}{8}$)
Sampling D	3368 ($\frac{1}{16}$)
Sampling E	1684 ($\frac{1}{32}$)
Sampling F	842 ($\frac{1}{64}$)
Sampling G	421 ($\frac{1}{128}$)
Sampling H	211 ($\frac{1}{256}$)
Sampling I	106 ($\frac{1}{512}$)

[1]Sampling A benyttes af tekniske årsager ikke i vores test.

Denne samplingstrategi medfører at relationen mellem punkterne på en højdekurve forsvinder, idet datapunkter ikke lagres som kurver i terrrænet men som enkelte punkter.

Der er forskellige tilgange til sampling-strategier, hvor én af forskellene er graden af tilfældighed i udvælgelsen af datapunkter. Herom skriver [Maling 1989, s.132f] at systematisk sampling i visse anvendelser er den bedste sammenlignet med fuldstændigt tilfældige samplinger, afhængig af bla. samplingstørrelse.

Med den her beskrevne sampling-strategi opnår vi ikke statistisk uafhængige samplinger, men det bidrager ikke til fejl. Vi får nemlig ikke senere brug for at holde to samplinger op imod hinanden som uafhængige.

Et forhold som snarere er kritisk, er at langt de fleste inddata er trukket ud af højdekurver. Kun de digitaliserede toppunkter kan gå ind under betegnelsen informationsrige data.

Når vi i visse af undersøgelserne i de følgende kapitler antager at samplingerne som inddata udgør repræsentative datasæt for vilkårlige lokaliteter i terrænet (dvs. alle tænkelige højdeværdier), er det et problem at højdekurvepunkter udelukkende ligger på skråninger, og endda udelukkende er registreret for værdier på multipla af 5 m. Det er altså en meget ensidig information.

Dette kan generelt udgøre et problem for en modelbruger, da de nemmest tilgængelige terrændata oftest er netop højdekurver.

Terrænmodellernes cellestørrelse

Som beskrevet i indledningen (side 5) arbejder vi med de digitale terrænmodeller med begge dataformater: TIN-modeller kan betragtes som vektordata og terrænmodellerne som rasterdata. I den forbindelse defineres en cellestørrelse, som samtidig udgør den rumlige skala (så længe vi arbejder med terrænmodeller i MTA, bruger MGE dog en kontinuert skala).

Det optimale valg af størrelsen af cellerne i den konstruerede terrænmodel afhænger meget af den konkrete anvendelse. Ofte har man fra starten veldefinerede krav til den rumlige opløsning for de øvrige data der skal behandles.

I dette projekt kortlægger vi hele Bornholm, hvilket betyder at en for lille cellestørrelse skaber uhåndterbart mange celler (og kæmpestore datafiler). På samme tid er vi interesserede i at undersøge om lokale træk fra topografien afbildes pålideligt. Ved visse områder på Bornholm sker voldsomme ændringer indenfor små afstande, og hvis vi vælger for store celler, forringes repræsentationen af terrænet.

I undersøgelserne i den resterende del af rapporten har vi valgt at bruge cellestørrelsen 50 $m \times 50$ m som udgangspunkt. Dette valg er er et kompromis mellem tilstrækkelig detaljerigdom og håndterbar datamængde.

2.2 Testmetoder

Vores modeltest er delt op i to grupper med hver sit formål. For det første undersøger vi hvilken indflydelse mængden af inddata har på den genererede terrænmodel. Vores

test og undersøgelser er her grundlag for at vurdere robustheden af den matematiske model i MTA. Med baggrund i disse test udvælger vi en inddatamængde der kan siges at være optimal for genereringen af en terrænmodel til et nærmere bestemt formål. For det andet består modeltestene i en analyse af kvaliteten af den genererede terrænmodel, dvs. en test af den matematiske models troværdighed.

Idet vi senere vurderer troværdigheden af en terrænmodel, er det nødvendigt at vi har nogle kontrolpunkter hvori vi har kendskab til en målt værdi, uden at disse samtidig er blevet brugt som inddata til terrænmodellen. Da vi som sådanne kontroldata kun er i besiddelse af højdekurvepunkter og toppunkter, kan vores kontrolpunkter kun vælges mellem disse.

Vi er ikke interesseret i et benytte toppunkterne som kontrolpunkter, idet vi (senere) argumenterer for at toppunkterne er vigtige at benytte som inddata. For at foretage vurderinger af både terrænmodellens robusthed og troværdighed, har vi fra det oprindelige sæt af målepunkter udtaget et sæt på 26.939 kontrolpunkter. Disse punkter er de datapunkter der i første halvering af det oprindelige datasæt ikke blev udvalgt i den nye sampling. Kontrolpunkterne har to formål, dels i forbindelse med undersøgelserne for robustheden at lokalisere punkter i terrænmodellerne, hvis værdier således kan sammenholdes indbyrdes, dels i forbindelse med undersøgelserne for troværdigheden at kontrollere en terrænmodels værdier i kontrolpunkterne i forhold til deres målte værdi.

Da vi vil vurdere uddata kvantitativt vil vi foretage forskellige statistiske test, og i kraft af at vi benytter et stort antal kontrolpunkter, vil estimater af de statistiske parametre ifølge 'de store tals lov' være ekstremt tæt på deres sande værdi. Dette betyder at selv afvigelser på tredje eller fjerde decimal betyder signifikante forskelle på de beregnede værdier.

Den benyttede udvælgelse af kontrolpunkter udelukker, at vi kan foretage troværdighedstest på terrænmodellen genereret ud fra højdekurver, idet vi dermed både har data som inddata og kontroldata. Løsningen bliver at udvælge en sampling af højdekurvepunkter og lave en terrænmodel på denne sampling, og så benytte de udvalgte kontrolpunkter i troværdighedstestene. Derfor vil vi først undersøge hvor robust MTA-modellens uddata er overfor ændringer i inddatamængden, så vi sikrer os at den valgte terrænmodel er repræsentativ for andre større samplinger og højdekurverne selv.

Ved hjælp af kontrolpunkterne lokaliserer vi en mængde punkter i terrænmodellerne, for hvilke vi antager at højdeværdien er ens, og vi sammenligner dem ved hjælp af scatterplot. I et sådant plottes de to datasæts værdier parvis mod hinanden i et kartesisk koordinatsystem. Ved fuld overensstemmelse mellem de to datasæt vil de plottede punkter fordele sig på den rette linie $y = x$, mens de ved en dårligere overensstemmelse vil fordele sig som en spredt punktsky omkring linien. Af scatterplottene er det også muligt rent visuelt at konstatere systematiske afvigelser, fx hvis data fordeler sig ujævnt.

For at teste hvor godt scatterplottet lægger sig omkring en linie benyttes korre-

lationskoefficienten.

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(x)\cdot\mathrm{Var}(y)}} \\ &= \frac{\sum(x_i-<x>)(y_i-<y>)}{\sqrt{\sum(x_i-<x>)^2}\cdot\sqrt{\sum(y_i-<y>)^2}} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Er de to datasæt korrelerede, vil korrelationskoefficienten være tæt på 1 eller -1. Er korrelationskoefficienten tæt på 0, siges datasættene at være ukorrelerede. Vi vil vurdere om to korrelationskoefficienter kan siges at være ens, altså om to datasæt kan siges at være lige så godt korrelerede som to andre datasæt. Vi opstiller derfor en hypotese om at $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, og for at teste denne hypotese benyttes teststørrelsen

$$u = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}} \tag{2.2}$$

hvor n_1 og n_2 er antallet af observationer i det to datasæt, $n_1 - 3$ og $n_2 - 3$ er antallet af frihedsgrader for de to korrelationskoefficienters estimater og ζ_1 og ζ_2 er transformerede korrelationskoefficienter givet ved:

$$\zeta = \mathrm{artanh}(\rho)$$

Teststørrelsen i ligning 2.2 er normeret normaltfordelt og hvis $|u|$ er større end 1,96, den dobbeltsidede 95%-fraktil, kan hypotesen om at de to korrelationskoefficienter er ens ikke accepteres, og de er derfor signifikant forskellige [Hald 1948, s.484f].

Fra scatterplottet har vi n par af observationer, som vi tillader os at sige er uafhængige. Vi kan for disse par af observationer statistisk teste om de fordeler sig om linien $y = x$, ved at teste en hypotese om at middelværdien af differensen er 0. Hypotesen testes ved teststørrelsen t som er givet ved

$$t = \frac{< x > - < y >}{\sqrt{s^2/n}} \tag{2.3}$$

hvor s^2 betegner estimatet på variansen af afvigelserne mellem de to terrænmodellers højdeværdier, og store værdier af $|t|$ er signifikante. Signifikansniveauet for $|t|$ ved en testsandsynlighed på 95% er i vores tilfælde 1,96. Det vil sige at værdier større end 1,96 medfører at vi kan forkaste hypotesen om at scatterplottet fordeler sig om linien $y = x$.

I vores undersøgelser af MTA-modellens troværdighed undersøger vi, hvor god modellen er til at gengive toppunkternes placering. Når modeltoppunkterne er lokaliseret, undersøger vi om deres placering i forhold til de digitaliserede toppunkter er fordelt tilfældigt eller om der er tale om en retningsorienteret forskydning. Dette kan gøres vha. af Rayleighs test for om gennemsnitsvektoren (forskydningen af modeltoppunkterne i forhold til de digitaliserede toppunkter) er signifikant forskellig fra 0-vektoren. Teststørrelsen er defineret som

$$\xi = nr^2 \tag{2.4}$$

hvor n er samplingstørrelsen og r er længden af gennemsnitsvektoren:

$$r = \sqrt{< x >^2 + < y >^2} \tag{2.5}$$

For n mellem 100 og 200 og for 95%-fraktilen er den kritiske værdi $\xi = 2,99$. For ξ-værdier over 2,99 er der signifikans og hypotesen om tilfældig fordeling kan forkastes, og observationerne taler altså for en tendens i forskydningen af toppunkterne [Batschelet 1981].

Ved siden af de ovenfor nævnte kvantitative metoder har vi brug for metoder, der mere kvalitativt danner et billede af den genererede terrænmodel, i visse tilfælde ligefrem en kortlægning af bestemte træk ved terrænmodellerne. Til dette formål vil vi benytte:

- Histogrammer over højdeværdierne for at få overblik over højdeværdiernes fordeling. Histogrammerne giver os mulighed for at konstatere en eventuel overrepræsentation af bestemte højdeværdier.

- Histogrammer over afvigelserne mellem to terrænmodeller, for at få overblik over forskellen på de to modeller. Et sådan histogram giver os mulighed for at bestemme afvigelsernes fordeling og spredning.

- Modelplot over differensen mellem to modeller for at få et billede af evt. stedsbestemte afvigelser. Vi udregner afvigelserne mellem to terrænmodeller for alle celler i terrænmodellerne, og kan på denne måde konstatere evt. stedsbestemte afvigelser.

Resultaterne af disse test vurderes rent kvalitativt i de enkelte tilfælde. Derudover kan vi vurdere de enkelte terrænmodeller rent visuelt. Sådan er det muligt at konstatere om den fremkomne terrænmodel er direkte 'ufysisk' eller i modstrid med hvad vi ved om topografien på Bornholm.

Vi har erfaret at de her anvendte metoder ikke altid er tilstrækkelige til at beskrive tendenser i vores data. Til dette forestiller vi os at de såkaldte 'geostatistiske' metoder og værktøjer som er specielt udviklet til at tage hensyn til rumlige data, med fordel kan inddrages. Det er dog værktøjer som vi ikke har nået at benytte os af i denne omgang. Se dog fx [Wood 1996] eller [Bailey & Gatrell 1995].

I stedet har vi holdt os til de simplere statistiske metoder som er anført her, og har brugt dem som ledetråd – selve vores vurderinger hviler derfor lige så meget på kvalitative undersøgelser.

Kapitel 3

Modelteoretisk analyse af MTA-modellen

I dette kapitel vil vi først give en karakteristik af MTA-modellen. Gennem en placering af modellen i en modelteoretisk ramme bliver vi bedre i stand til at forholde os til MTA-modellens uddata. Vi vil derefter diskutere aspekter i MTA-modellens submodeller, dels modelteknisk, dels mere overordnet med fokus på deres rolle som terrænanalytiske værktøjer.

Igennem diskussionen af modellen belyser vi de antagelser der foretages i hver submodel. Det er dels antagelser om det modellerede terræn og dels antagelser om naturen af de inddata som terrænmodellen behandler.

I diskussionerne tillader vi os at bruge udvalgte begreber og termer som bruges indenfor modelteorien mere generelt. Vi gør os ingen forestilling om at være fuldstændige i vores karakterisering af MTA-modellen, men vil blot indlede en sådan øvelse.

3.1 Karakterisering af MTA-modellen

MTA-modellen søger at gengive eksisterende forhold ved det givne terræn. Derfor bør den resulterende terrænmodel ikke indeholde 'ufysiske' fænomener, fx gengive terrænet som rillet eller skarpt knækket, modellen skal heller ikke 'pynte' på det modellerede terræn (dvs. udglatte alle lokale tendenser i terrænet). Tværtimod skal terrænmodellen respektere inddata. Mange anvendelser af en DTM, her fx modellering af erosion, kræver dog også viden om terrænoverfladens første afledte. Og det stiller altså yderligere krav til MTA-modellen om at konstruere en terrænoverflade der er kontinuert og differentiabel.

Det er almindeligt at referere til modeller der som MTA-modellen udelukkende søger at gengive et systems nuværende form og adfærd, som 'deskriptive' [Morgan 1995], [Lowry 1968, s.55]. En deskriptiv model hænger ikke direkte sammen med en teoribygning for processerne i det modellerede system, og er ikke nødvendigvis gyldig såfremt forudsætningerne i det modellerede system ændres.

Hverken ind- eller uddata i MTA-modellen forventes at indeholde nogen tidslig dimension, og vi kalder derfor MTA-modellen 'statisk' (ifølge [Chorley & Haggett 1967]). At modellens uddata derimod sagtens kan anvendes i egentlig dynamiske modelleringer (for eksempel til fremskrivning af scenarier for et landskab), rokker ikke ved det statiske.

Man inddeler ifølge [Chorley & Haggett 1967] (matematiske) modeller efter deres opbygning og formelle træk (formler, relationer, forudsætninger, etc.). Således er bestemte modeller tæt knyttede til de fysiske relationer i systemet som modellen behandler, mens matematikken i andre modeller er løsere bundet til selve det modellerede system.

MTA-modellen er bygget op af forskellige submodeller og værktøjer. Nogle af værktøjerne er indlejret i modellen pga. specielle krav fra Intergraphs større kunder [Woodbury 1998], mens andre af Intergraph begrundes med almen, matematisk stærk brugbarhed.

Intergraphs valg af værktøjer ligger ikke naturligt begrundet i forståelsen af processerne i et terræn, og vi vil derfor ikke kalde MTA-modellen for direkte 'fysisk baseret' (som også benævnes 'procesorienteret'). Med sådanne modeller forstås de modeller hvor alle fysiske relationer i det modellerede system kan aflæses præcist (matematisk) i modellens formalside [Morgan 1995, s.63f].

Derimod kan MTA-modellen til en vis grænse kaldes 'analog' (som beskrevet hos [Chorley 1968, s.43]), eller 'konceptuel', med hvilket vi forstår at MTA-modellen i stedet for konkret procesorienterede relationer, benytter rutiner i sine tre submodeller, som bygger på 'common sense'-betragtninger og -antagelser om det modellerede system [Chorley & Haggett 1967].

En alternativ måde at inddele (matematiske) modeller på, tager udgangspunkt i hvor stor indsigt modelbrugeren får i modellens formalside ved anvendelse af den. Idet MTA-brugeren selv træffer valg igennem hele modelprocessen og så at sige tvinges til indsigt, mener vi at MTA-modellen kan kaldes en 'grå boks-model'[1], uanset at dette begreb ofte knyttes til 'empiriske' modeller [Morgan 1995, s.63] (hvor grundlaget i konstruktionen af empiriske modeller er netop empiriske data).

Betegnelsen 'grå boks-' betegner modeller som giver brugeren indsigt i visse af modellens relationer og processer, men som ikke forklarer alle enkeltheder i beregningerne [Chorley & Haggett 1967].

Det gælder generelt for modeller, at graden af brugerindsigt i en model kan fungere som en slags sikring af modellen. Således kan en model af f.eks. kommercielle hensyn pakkes så meget ind, at særlige (hemmelige) submodeller (formler el.lign.) ikke kan læses endsige kopieres uden videre. På den måde kommer modellen som brugeren møder den, til at fremstå mere eller mindre gennemskuelig, alt efter modelbyggernes hensyn og behov.

Med denne foreløbige karakterisering føler vi at MTA-modellen er placeret i en ramme, så vi fremover kan forholde modellen til den klasse af modeller den 'hører til i'

[1]Mens 'sort boks'-modeller fungerer uden dialog med brugeren udover ind- og uddata, og en 'hvid boks'-model forklarer alle enkeltheder i modellen.

og kende til de naturlige forbehold der ligger i fortolkningen af uddata.

3.2 Diskussion af submodeller

Vi argumenterede i forrige afsnit for at MTA-modellen ikke er fysisk baseret – ingen af modellens værktøjer skal derfor reelt 'forestille' noget fysisk, men tjener det formål at gøre data mere håndterbare. Det betyder at kvaliteten af hvert værktøj ikke kan søges begrundet i forholdet til det fysiske landskab, men derimod skal vurderes i forhold til den opgave der forsøges løst med det konkrete værktøj.

Vi gjorde i kapitel 1 rede for forløbet af MTA-modellen, og kom i den forbindelse ind på visse problemer i submodellerne. Vi vil i de følgende afsnit vende tilbage til de væsentligste af dem, nu med det formål også at se på alternativer.

3.2.1 Regionalisering af datapunkter

Triangulation som den anvendes i MTA-modellen, udspringer af en central antagelse i Geografien (kaldet Geografiens 1. lov, efter W. Tobler)[2]: 'alting er relateret til hinanden, men objekter tæt på hinanden er stærkere relateret end fjerne' [Maling 1989, s.139].

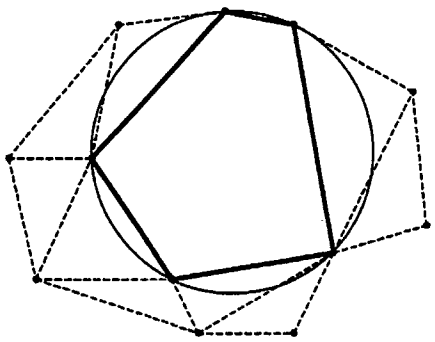
Der findes andre triangulationer end Delaunay-triangulationen som også er éntydige, skriver [Bailey & Gatrell 1995, s.157]. Som nævnt side 8ff er en væsentlig fordel ved Delaunay-triangulationen dog, at den minimerer kantlængden af trekanterne. Ideen er at man derved får den bedste mulighed for at beskrive regionale tendenser. Hvis området i stedet inddeltes i større trekanter vil regionale tendenser i terrænet placeres indenfor én stor trekant, dermed er muligheden for at beskrive dem ikke længere tilstede.

Et kritisk punkt ved Delaunay-triangulationen er det tilfælde hvor flere end tre Thiessen-polygoner deler et hjørnepunkt. Delaunay-triangulationen for mængden af datapunkter vil i disse tilfælde generere en polygon af højere orden end tre. Hjørnepunkter i Thiessen-diagrammet der deles af flere end tre polygoner, forekommer i tilfælde af at flere end tre målepunkter ligger på randen af en cirkel, hvis indre ikke indeholder andre datapunkter. Se figur 3.1.

Der er i praksis flere metoder til at eliminere fejl som denne i TIN-modeller. Man kan gribe sagen an ved enten at rykke et af datapunkterne eller indtegne en eller flere vilkårlige diagonaler i den pågældende polygon. Det sidstnævnte er den fortrukne metode da det ikke ændrer på de øvrige Thiessen-polygoner.

Den algoritme i MTA som beregner triangulationen, indregner ét målepunkt ad gangen. Det løser problemet idet triangulationen forløber problemfrit, når ikke alle datapunkter optræder. På figuren kan vi forestille os at MTA kun har indlæst de tre punkter til venstre på cirklen, og imellem dem trækkes uden videre en linie. Derpå

[2]Det er oplagt at hvor denne grundtese i nogle henseender er rimelig, er der andre hvor et så simpelt princip ikke holder. Hvad angår digitale terrænmodeller er det spørgsmålet om Toblers princip kan forsvares. At belyse dette nærmere indebærer undersøgelser af andre modeller end MTA-modellen, og det gør vi ikke i denne omgang.



Figur 3.1 Eksempel på et problem ved TIN-konceptet. Fem målepunkter ligger lige langt fra samme punkt (cirklens centrum), og triangulationen danner en pentagon.

indlæses endnu et punkt og det afstedkommer en ny linie, uden at de forrige ændres. Sådan fortsætter triangulationen til alle datapunkter er medtaget i TIN-modellen.

Baggrunden for brugen af Delaunay-triangulationen er en antagelse om at der ikke sker store udsving mellem to målepunkter. Hvis dette er opfyldt, sker der heller ikke store udsving i højden indenfor hver trekant. Dette stiller krav til inddata om at ligge tæt på hinanden i områder med stor variation, mens inddata i områder med mindre terrænvariation ikke nødvendigvis skal være nær så tæt fordelte. Dette er et spørgsmål om sampling og et forhold en modelbruger skal være opmærksom på, når inddataene ikke ligger tæt. I så fald er der mulighed for store terrænforskelle mellem målepunkterne. Benyttes i stedet digitaliserede højdekurver kan afstanden mellem to datapunkter siges at være en funktion af ændringer af højden i terrænet. Der er jo den samme højdeforskel mellem to kurver (her 5 m) uanset afstanden mellem dem. Dermed opnås automatisk en tæt datarepræsentation når der sker store ændringer i terrænet, mens der ved fladere områder er længere mellem højdekurverne – datarepræsentationen er mindre tæt i dette område.

Spørgsmålet er om Delaunay-triangulationen er den optimale metode til regionalisering af inddata, altså om metoden sikrer en proces hvori risikoen for uheldige resultater minimeres. Som bud på en metode der i større grad 'forholder' sig til det landskab der modelleres, forestiller vi os en metode der vurderer højdeforskellen mellem to 'nabopunkter'. Hvis denne er over en vis grænse, indsættes et interpoleret punkt halvvejs. Dermed vil der automatisk blive en tæt data-repræsentation i egne med stor højdevariation, og vi kan sige at metoden i højere grad knytter sig til det aktuelle landskab.

Dette eksempel skal ikke forstås som et forsøg på at udstikke en kurs for en bedre regionalisering. Vi illustrerer snarere faren ved at MTA-modellen er konceptuel model og ikke fysisk baseret. Det er indlysende at det er svært at modellere noget så komplekst som topografien og topologien i et landskab ved brug af blot 'common sense'-betragtninger. På den anden side er det også vanskeligt at forestille sig en procesorienteret model for terrænmodellering, netop fordi processerne er så komplekse. For at få en metode der om ikke er mere procesorienteret så ihvert fald tættere

knyttet til det modellerede landskab, har Intergraph indlagt nogle parametre i MTA så brugeren har mulighed for at manipulere regionaliseringen og dermed indarbejde viden om det konkret behandlede landskab. Effekten af disse parametre var noget vi gerne ville have undersøgt, men som vi af tidsmæssige årsager ikke kunne nå.

3.2.2 Konstruktion af gitter

MTA-modellen kræver omlægning af inddatapunkterne, ved brug af en af de fire gittergenereringsmetoder beskrevet i afsnit 1.3. Som bruger bliver man ikke i tilstrækkelig grad gjort opmærksom på i hvilke situationer de enkelte metoder er velegnede, og man er tvunget til at prøve sig frem (med mindre man har så stort et mængde inddata at MTA-modellen kun virker med den plane gitterkonstruktion). Et sådant nærmest frit valg er ikke hensigtsmæssigt på et niveau hvor et uheldigt valg har betydning for resten af interpolationsprocessen.

Gitterkonstruktionen er følsom overfor størrelsen af inddata. Man mødes af en grænse for hvor mange inddatapunkter nogle af metoderne kan håndtere (omkring 1000), før processen går i stå. Det lægger ganske enkelt visse bånd på hvordan man overhovedet kan lade MTA-modellen håndtere sine inddata, hvis man ikke selv formår at begrænse eller strukturere dem.

For at undersøge om dette udgør et problem har vi ud fra samme (lille) datasæt (**sampling G** og **toppunkter**) ved brug af de fire forskellige gitterkonstruktioner (og efterfølgende med bilineær interpolation) genereret fire terrænmodeller. På denne måde skabes et indblik i, hvor stor betydning de forskellige metoder har for den endelige terrænflade. Resultatet ses i figurerne 3.2 - 3.5.

Vi vil ikke gå nærmere ind i analysen af de enkelte modeller i figurerne, men kun slå fast at der unægtelig er stor forskel.

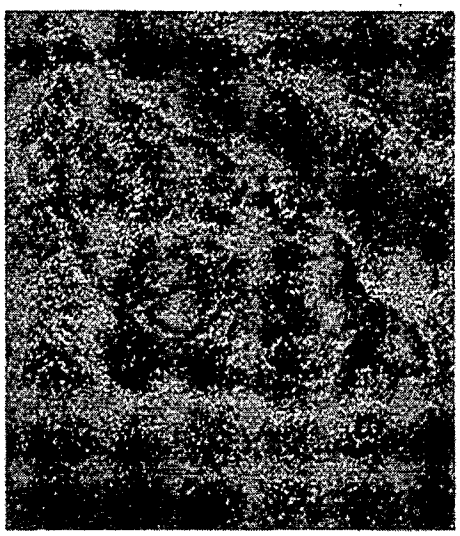
Det er meget forskelligt hvor meget af Bornholms omrids og konturer der genkendes på terrænfladerne. Kun den plane gitterkonstruktion afgrænses af TIN-modellen (det vil sige mere eller mindre følgende selve øens omrids), de tre andre genererer en rastermodel som udfylder hele arbejdsområdet (også havområderne udenom Bornholm, hvilket selvsagt ser temmelig mærkværdigt ud).

I en videre undersøgelse ville vi eftersøge bestemte træk ved de fire flader for at se hvilken af dem der i sidste ende kan siges at være den mest pålidelige. Indtil videre er det, i lyset af vores kendskab til udseendet af højdekurverne for Bornholm, besnærende at vælge den plane gitterkonstruktion som den mest troværdige. Dette valg er dog ikke helt uproblematisk, eftersom vi begrunder valget med at den plane gitterkonstruktion bedst efterligner den struktur vi havde i forvejen. Og reelt kan vi ikke være sikre på at det er optimalt.

En konklusion må i stedet være at vi ikke har tilstrækkeligt grundlag til at vælge, på grundlag af denne, første sammenligning.

Af figurerne ser vi dog en indikation af at valget af gitterkonstruktionen kræver (sikker) viden om det modellerede terræn, om karakteren af inddata og af den proces der har genereret højdeværdien.

Figur 3.2 DTM for Bornholm interpoleret via den plane gitterkonstruktion (fra sampling G og toppunkter).



Figur 3.3 DTM for Bornholm interpoleret via 'surface trend'-gitterkonstruktion (fra sampling G og toppunkter).

3.2.3 Dannelse af et 'pænt' terræn – interpolationen

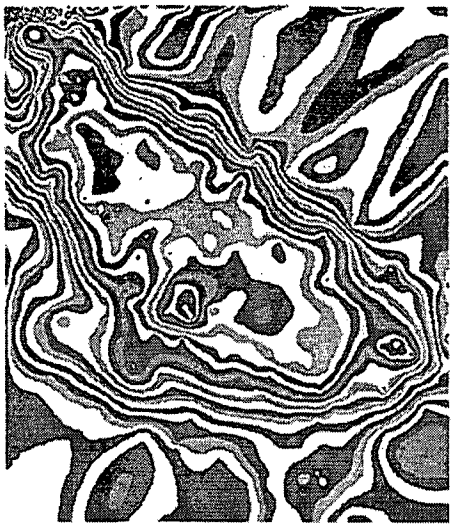
Vi fortalte i afsnit 1.4.1 at de bivarible interpolationsværktøjer er et kompromis mellem operationalitet og præcision. Spørgsmålet er om fordelene ved en spline-interpolation, at terrænoverfladen er kontinuert og differentiabel, er større end ulemperne, at MTA-modellen reelt interpolerer højdedata to gange.

Vi har hos [Dierckx 1993] mødt andre spline-metoder som virker direkte på punkter vilkårligt fordelt (som vi altså kan Delaunay-triangulere). Derved undgås gitterkonstruktionen og et interpolationsled udelades. Dette virker som en god ide, men er ifølge [Dierckx 1993] væsentlig mindre operationelt.

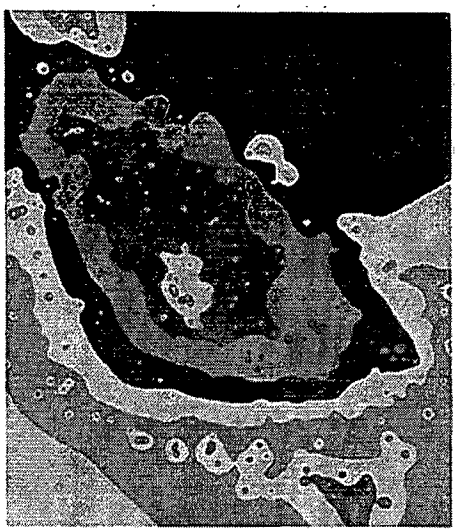
Intergraph har altså vægtet operationaliteten højere end kvaliteten. Det er i høj grad forståeligt, da vi selv har haft problemer med modellens operationalitet, grundet de forholdvis store datasæt der arbejdes med.

Som kort nævnt i forrige kapitel findes efterhånden en vifte af såkaldte geostatistiske værktøjer, hvor blandt andet korrelationen mellem de forskellige inddata bliver inddraget i en interpolation. Dem kender vi desværre ikke grundigt nok til at inddrage i en egentlig sammenligning. Det er dog tankevækkende at MTA-modellen slet ikke indeholder værktøjer, der automatisk forholder sig til usikkerheden på de genererede uddata. Man er altså som bruger nødt til selv at vurdere kvaliteten af den genererede terrænmodel, og får ingen hjælp af MTA-modellen.

Som afsluttende kommentar til dette må vi pointere at modellen med de bikubiske splines møder krav om kontinuitet og differentiabilitet (pæne, glatte former i terrænet) som stilles til en digital terrænmodel.



Figur 3.4 DTM for Bornholm interpoleret via 'convergent gridding'-gitterkonstruktion (fra sampling G og toppunkter).



Figur 3.5 DTM for Bornholm interpoleret via 'moving weighted average'-gitterkonstruktionen (fra sampling G og toppunkter).

3.3 MTA-modellen i sin helhed

MTA-modellen har generelt den begrænsning at vi ikke kan 'stå af' undervejs. Man har ikke mulighed for at få en eksakt interpolation (tro mod de oprindelige inddata), selv om sådanne metoder faktisk findes. Ret beset er gitterkonstruktionsmetoderne i modellen faktisk sådanne eksakte interpolationer, forudsat at vi benytter dem til at interpolere hele fladen. Vi kan godt forestille os at en eksakt interpolation er ønskelig i situationer med stor sikkerhed på inddata. Hvis usikkerheden af inddata derimod er markante er det ikke så vigtigt med en eksakt metode. Som vi ser det ligger problemet i at Intergraph har foretaget valget for modelbrugeren.

Derimod vurderer vi det som en styrke ved MTA-modellen, at brugeren har gode muligheder for at lægge forhåndsinformation om det modellerede terræn ind i form af bestemte bånd på inddata.

At MTA-modellen ikke er en procesorienteret model, får to konsekvenser for vores vurdering.

For det første kan vi ikke nemt afgøre om princippet i Geografiens 1. lov er fornuftigt når det drejer sig om kontinuiteten af diskrete højdedata i et konkret terræn. Selv om argumenterne for princippet i første omgang virker fornuftige, er det langt fra alle modeller der benytter princippet. Måske er det udtryk for at MTA-modellen er en anelse primitiv (eller endda forældet) i sin tilgang til regionalisering af inddata. Det har vi dog ikke mulighed for at afgøre her.

For det andet kan vi ikke umiddelbart kontrollere at modelleringen af det konkrete terræn følger spillereglerne for en naturlig landskabsdannelse, og egentlige test af den

matematiske baggrund for de enkelte detaljer i terrænmodellerne er ikke mulige. Som deskriptiv model kan MTA-modellen derimod testes via visuelle fortolkninger af uddata, de såkaldte 'eyeball tests' [Chorley 1968, s.50], hvor modelbrugeren (eller andre 'eksperter') visuelt vurderer uddata ud fra en faglig viden. Ekspertudsagn af denne art som begrundelse for accepten af en model er nok mere oplagt for MTA-modellen end for så mange andre modeller. Ekspertens vurdering af om terrænmodellen ligner overfladen af et rigtigt landskab bringer analysen langt.

Vores vurdering af MTA som model er besværet af at modellen er for uigennemskuelig til at vi kan undersøge helt klart hvordan modellen fungerer.

En grundigere vurdering måtte tage stilling til fundamentet for og indholdet i andre modeller til konstruktion af DTM'er, men det er en viden vi ikke har. I denne omgang må vi derfor fortsætte med andre former for test som knytter sig til modeller som MTA-modellen.

Test af deskriptive modeller skal som nævnt hos [Lowry 1968, s.55] vurdere:

1) Forholdet mellem mængden af ind- og uddata.

2) Præcisionen og kvaliteten af uddata.

3) Generaliserbarhed af modellen – en vurdering af hvor stort et spænd af terræntyper som MTA-modellen producerer brugbare uddata for.

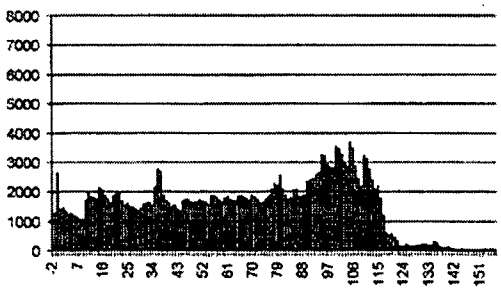
Kapitel 4

Praktisk analyse af MTA-modellen

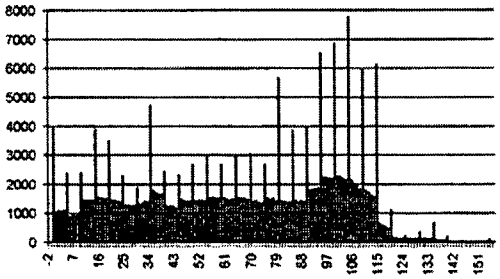
Som nævnt er MTA-modellen ikke procesorienteret og vores undersøgelser vil derfor primært være af praktisk art. I dette kapitel vil vi behandle de forskellige modeltest som vi har foretaget. I første omgang vil vi behandle indragelsen af toppunkternes betydning for de genererede terrænmodeller, dernæst modellens robusthed overfor inddata. I anden omgang vil vi omhandle troværdigheden af den fremkomne terrænmodel.

4.1 Inddragelse af toppunkter i generering af terrænmodeller

For at undersøge betydningen af inddragelsen af de 177 toppunkterne i konstruktionen af terrænmodeller har vi plottet histogrammer over højderne i kontrolpunkterne i terrænmodeller genereret med og uden toppunkter.

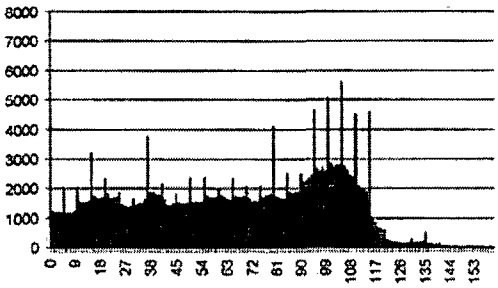


Figur 4.1 Histogram over modelhøjder fra DTM **højdekurver** og **toppunkter**.

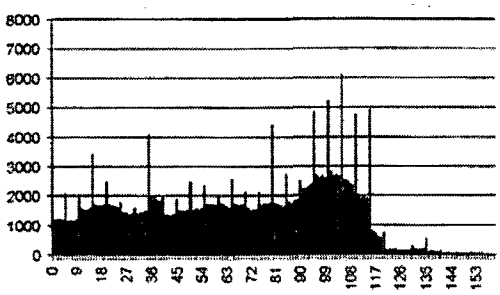


Figur 4.2 Histogram over modelhøjder fra kun DTM **højdekurver**.

Figur 4.1 og 4.2 viser histogrammer fra DTM **højdekurver** mens figur 4.3 og 4.4 viser histogrammerne fra DTM C. Vi gør læsere opmærksomme på at **sampling** C er det udvalgte antal punkter, mens DTM C er den konkrete terrænmodel genereret ud fra punkterne i **sampling** C.



Figur 4.3 Histogram over modelhøjder fra DTM C og toppunkter.



Figur 4.4 Histogram over modelhøjder fra kun DTM C.

De store toppe på figur 4.2, 4.3 og 4.4 svarer til en stor repræsentation af højdeværdier i multipla af 5. Umiddelbart er dette ikke en stuktur vi finder er særlig karakteristisk for Bornholm og en nærmere undersøgelse af den er relevant.

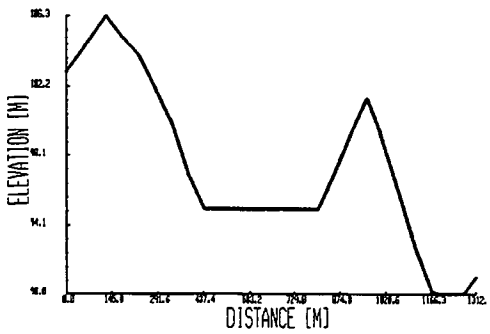
Det er vores indtryk at der er tale om to forskellige fænomener:

Det første fænomen er en slags plateaustruktur i DTM **højdekurver**, hvor den højeste del af en bakke får tildelt samme højde, idet der bliver trianguleret mellem punkter beliggende på samme højest beliggende højdekurve. Denne struktur formindskes kraftigt, for ikke at sige forsvinder helt, når toppunkterne inddrages som inddata, se figur 4.1 og 4.2.

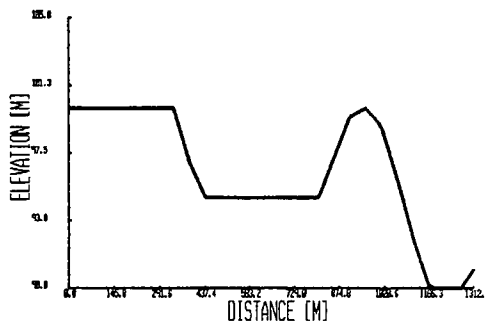
Det andet fænomen er en slags terrassestruktur i DTM **samplinger**. Denne fremkommer idet inddata nu ikke længere er knyttet sammen ved højdekurver. MTA kan nu frit triangulere mellem alle punkter og der vil derfor også fremkomme trekanter hvor de tre hjørnepunkter har samme højdeværdi (dette kan ikke ske med højdekurver som inddata, idet der ikke trianguleres mellem punkter på samme højdekurve, med mindre der ikke er andre muligheder, som beskrevet ovenfor). Disse trekanter vil så efter den plane gitterkonstruktion være vandrette, og alle gitterpunkter indenfor hver af disse trekanter vil antage den samme værdi. Da højdeværdien af inddata falder i multipla af 5 vil højdeværdien af disse vandrette facetter også falde i multipla af 5. Resultatet bliver en overrepræsentation af disse højder, en slags terrassestruktur. I modsætning til det første fænomen vil dette ikke afhjælpes nævneværdigt ved at inddrage toppunkterne, som det ses af figur 4.3 og 4.4. Tendensen aftager derimod for de mindre samplinger.

For at få et mere ilustrativt billede af inddragelsen af toppunkter som inddata, har vi i figur 4.5 - 4.8 plottet profilerne af et udsnit af modelterrænet, fra henholdsvis DTM **højdekurver** og DTM C, samt med og uden toppunkter.

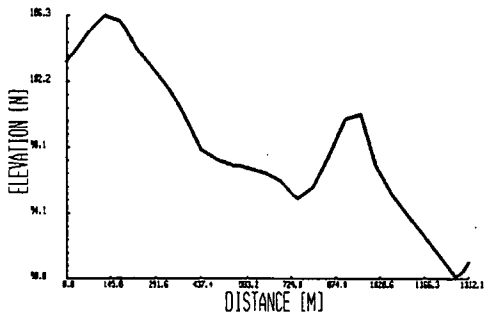
I terrænmodellerne uden toppunkter, figur 4.6 og 4.8, ses en fladere struktur end i terrænmodellerne med toppunkterne figur 4.5 og 4.7. Samtidig ses det at modellerne uden toppunkterne konsekvent underskyder området omkring toppunkterne. Dette er naturligvis ikke så mærkeligt idet alle inddata fra højdekurverne (eller en sampling deraf) består af målinger på skråninger, i højder med bestemte intervaller. MTA har derfor ikke mulighed for at forudsige beliggenheden af toppunkterne, og betragter derfor arealer indenfor de lokalt højest liggende højdekurver som pla-



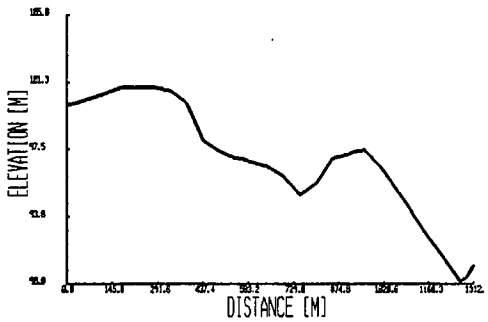
Figur 4.5 Profil af terrænet fra DTM højdekurver og toppunkter.



Figur 4.6 Profil af terrænet fra kun DTM højdekurver.



Figur 4.7 Profil af terrænet fra DTM C og toppunkter.



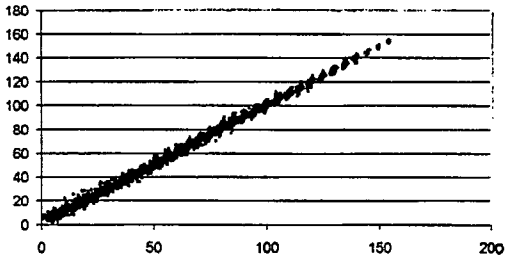
Figur 4.8 Profil af terrænet fra kun DTM C.

teauer med samme højdeværdi. Disse flade toppe bliver derimod til 'rigtige' bakker når toppunkterne er inddraget, se specielt figur 4.5. Tilsvarende er det nærliggende at tro at den lave, flade struktur på figur 4.5 og 4.6 er en 'udfyldt' dalstruktur, der er blevet flad da det lavest beliggende dalpunkt ikke er med som inddata. Det kan altså se ud som MTA 'trykker' terrænet sammen når disse informationsrige punkter ikke er medtaget som inddata. Det kan derfor ud fra disse undersøgelser siges at det gennemgående er en god ide at medtage informationsrige punkter som inddata, idet de er med til at fjerne uønskede plateaustruktur i terrænmodellen. Specielt har vi fundet at inddragelsen af toppunkterne er med til at danne pænere bakketoppe. I de følgende undersøgelser har vi derfor medtaget toppunkterne i alle terrænmodellerne.

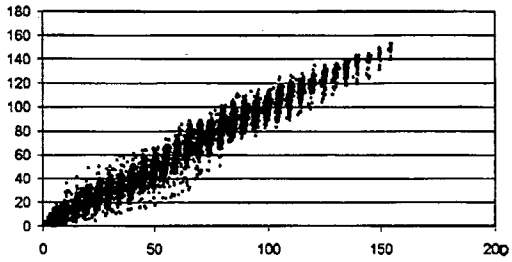
Figurene 4.5 - 4.8 rejser dog et andet problem. Det ser nemlig ud til at figurene 4.7 og 4.8 er mere detaljeret end figurene 4.5 og 4.6. Dette virker umiddelbart underligt, idet DTM **højdekurver** grundet sine bedre inddata burde være mere detaljeret end DTM C. Vi tror forklaringen er at der i DTM **højdekurver** er mange flere inddata, der dermed er langt tættere repræsenteret og råderummet for 'vilde' udsving er derfor stærkt begrænset. Derfor mener vi at hvad der umiddelbart kan se ud som en mindre detaljeringsgrad faktisk er en mere tro gengivelse af terrænet.

4.2 Modellens robusthed overfor inddata

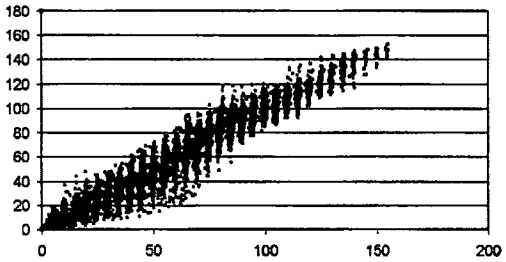
Vi vil nu sammenligne højdeværdier i kontrolpunkterne fra modeller genereret ud fra de forskellige samplinger. Som nævnt i afsnit 2.2 side 26 starter vi med at holde højdeværdier i forskellige terrænmodeller op imod hinanden i et scatterplot. Udvalgte resultater ses i figurerne 4.9 - 4.12.



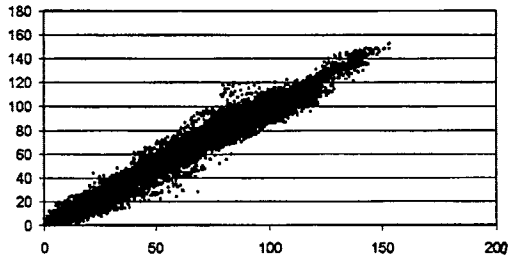
Figur 4.9 Scatterplot over højdeværdier fra DTM højdekurver og DTM B.



Figur 4.10 Scatterplot over højdeværdier fra DTM højdekurver og DTM D.



Figur 4.11 Scatterplot over højdeværdier fra DTM højdekurver og DTM F.



Figur 4.12 Scatterplot over højdeværdier fra DTM E og DTM F.

Flere scatterplot er placeret i appendiks A. Umiddelbart ses en 'rillet' tendens i de scatterplot der har højdekurve-terrænmodellen som x-akse, se figur 4.9, 4.10 og 4.11. Det skyldes at alle kontrolpunkterne oprindeligt er punkter fra højdekurverne, og derfor bliver rimelig godt gengivet i DTM **højdekurver**. Af den grund 'klumper' kontrolværdierne i denne terrænmodel sig sammen omkring multipla af 5. I DTM **samplinger** er værdierne mere 'udtværede', og da disse er placeret ud af y-aksen bliver resultatet denne 'rillede' struktur.

Ellers ser alle scatterplottene forholdsvis 'pæne' ud, dvs. det ser umiddelbart ud til at højdeværdierne fra de forskellige terrænmodeller er korrelerede. Vi har udregnet korrelationskoefficienterne mellem terrænmodellernes højdeværdier, ud fra ligning 2.1 på side 27 og forventningen er altså en størrelse i nærheden af 1, da dette betyder at højdeværdierne terrænmodellerne imellem kan siges at være korrelerede. Resultatet ses i tabel 4.1.

Vi ser langt hen i rækken af halveringer (af antallet af datapunkter i samplingerne) at korrelationen mellem de to terrænmodeller i testen er meget høj. Der er

Tabel 4.1 Korrelationskoefficienten mellem de forskellige terrænmodeller.

DTM	Højde	B	C	D	E	F	G	H	I
Højde	1,0000								
B	0,9995	1,0000							
C	0,9983	0,9990	1,0000						
D	0,9957	0,9968	0,9977	1,0000					
E	0,9909	0,9922	0,9934	0,9952	1,0000				
F	0,9835	0,9852	0,9866	0,9884	0,9902	1,0000			
G	0,9711	0,9730	0,9753	0,9776	0,9820	0,9829	1,0000		
H	0,9553	0,9576	0,9596	0,9635	0,9650	0,9741	0,9742	1,0000	
I	0,9546	0,9568	0,9591	0,9619	0,9665	0,9678	0,9835	0,9706	1,0000

en tydelig faldende tendens, men selv mellem DTM **højdekurver** og DTM F ses dog en korrelation på tæt på 1. Det er derfor interessant med en test for om de forskellige korrelationskoefficienter mellem DTM **højdekurver** og DTM **samplinger** kan siges at være de samme. u-teststørrelsen fra ligning 2.2 side 27 er udregnet for disse og resultatet er gengivet i tabel 4.2.

Tabel 4.2 u-teststørrelser af korrelationskoefficienterne mellem DTM **højdekurver** og DTM **samplinger**.

korr	Højde-B	Højde-C	Højde-D	Højde-E	Højde-F	Højde-G	Højde-H
Højde-C	70.12691						
Højde-D		54.53875					
Højde-E			44.02408				
Højde-F				35.07527			
Højde-G					32.81848		
Højde-H						25.76948	
Højde-I							0.880513

Som det ses af tabel 4.2 er de fleste teststørrelseren klart over det kritiske niveau på 1,96, dermed er der signifikant forskel mellem de udregnede korrelationskoefficienter. Undtagelsen er testen af koefficienterne for DTM **højdekurver** og DTM H, og DTM **højdekurver** og DTM I. Det sidste kan fortolkes som at DTM H og DTM I korrelerer lige dårligt med DTM **højdekurver**.

Derudover kan vi, måske ikke overraskende, sige at DTM **højdekurver** og DTM B korrelerer bedre end DTM **højdekurver** og DTM C osv., idet deres korrelationskoefficienter er signifikant forskellige, samtidig med at korrelationskoefficienten mellem DTM **højdekurver** og DTM B er større end DTM **højdekurver** og DTM C. Vi kan derfor ikke benytte **sampling** E til at generere en terrænmodel, og så samtidig sige at modellen bliver lige så god som ved brug af **sampling** B, idet der ifølge tabel 4.2 er signifikant forskel mellem deres korrelation til DTM **højdekurver**.

Vi minder om at selv terrænmodeller fra relativt små inddatamængde har en høj korrelation med terrænmodellen fra højdekurverne. Samtidig minder vi om at

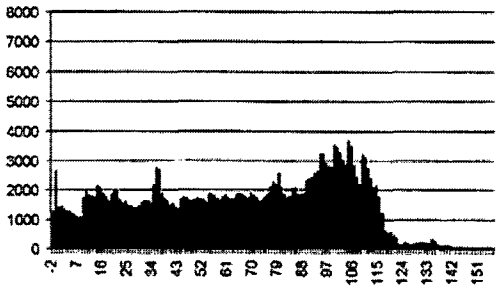
scatterplottene, figur 4.9, 4.10 og 4.11, fordeler sig meget pænt omkring den rette linie $y = x$, dog pænere for samplinger med flere punkter. Der er derfor god grund til at fortsætte med at udregne den t-teststørrelse som vi introducede i ligning 2.3 side 27, for at se om vi med garanti kan sige at de fordeler sig omkring $y = x$. Disse udregninger har vi foretaget for alle terrænmodellerne og vi gengiver dem i tabel 4.3.

Tabel 4.3 t-teststørrelsen udregnet for alle kombinationer af modeller.

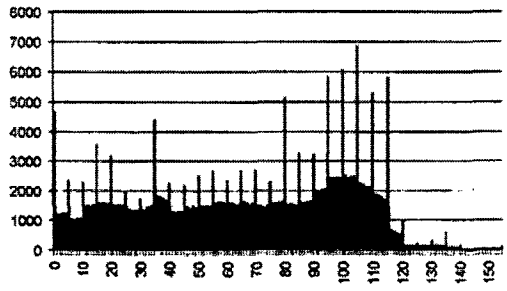
DTM	Højde	B	C	D	E	F	G	H	I
Højde	0,000								
B	2,728	0,000							
C	1,289	3,456	0,000						
D	4,875	6,558	5,478	0,000					
E	0,027	0,729	0,569	4,452	0,000				
F	23,12	24,95	25,23	24,71	29,97	0,000			
G	12,86	12,81	14,00	16,00	16,34	37,99	0,000		
H	66,97	68,99	71,36	75,45	71,36	69,59	99,94	0,000	
I	15,87	15,85	18,41	18,07	18,41	32,87	10,43	94,89	0,000

Som det ses af tabel 4.3 er næsten alle t-teststørrelserne større end de kritiske 1,96 som nævnt i afsnit 2.2 side 27. Derfor kan vi ud fra denne test kun acceptere hypotesen om at punkterne fordeler sig omkring $y = x$ for DTM C og DTM **højdekurver**, samt for DTM E og DTM **højdekurver**, DTM B og DTM C. Det er altså kun disse der kan siges at stamme fra samme observation.

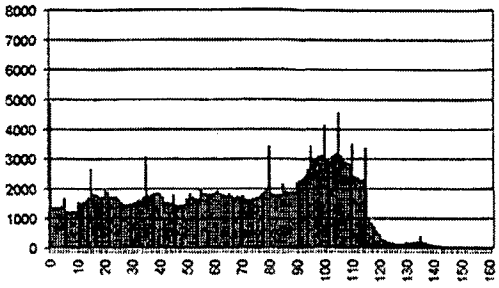
Dette resultat er i nogen grad overraskende, idet korrelationskoefficienterne i tabel 4.1, viste at mindre samplinger gav en faldende korrelation til DTM **højdekurver**. En del af forklaringen er at korrelationskoefficienterne kun siger om punkterne fordeler sig omkring én eller anden linie og ikke nødvendigvis $y = x$. Derudover kan det tænkes at forklaringen på at t-teststørrelsen for DTM E og DTM **højdekurver** er så lav, er at DTM E skyder lige så meget over som under i forhold til DTM **højdekurver**. De andre DTM **sampling** har åbenbart en tendens til systematisk at skyde forbi, så punkterne i scatterplottet af dem og DTM **højdekurver** ikke kan siges at fordele sig omkring $y = x$, men om en anden linie.



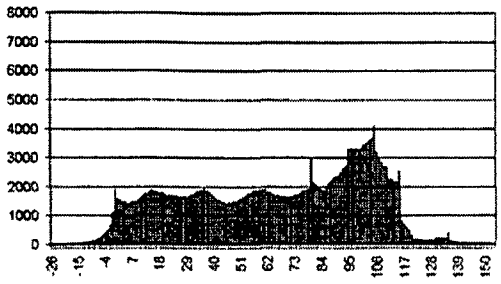
Figur 4.13 Histogram af modelhøjder fra DTM **højdekurver**.



Figur 4.14 Histogram af modelhøjder fra DTM B.



Figur 4.15 Histogram af modelhøjder fra DTM D.



Figur 4.16 Histogram over modelhøjder fra DTM F.

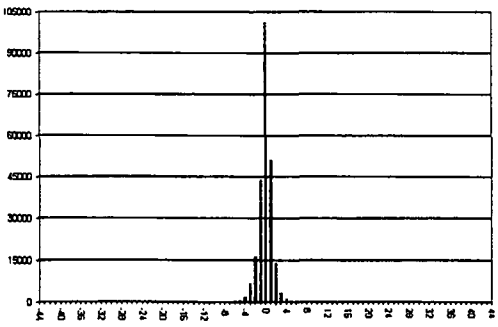
For at få et mere visuelt indblik i hvordan højdeværdierne fordeler sig i de enkelte terrænmodeller, har vi plottet histogrammer for modelhøjderne. Et repræsentativt udvalg ses i figurerne 4.13 - 4.16. Resten kan ses i appendiks B.

Tendensen er at der i modellerne for de store samplinger, se fx figur 4.14, er tydeligere toppe i værdier i multipla af 5 end for modeller fra mindre samplinger, se figur 4.15. Denne terrassestruktur er altså mest udtalt i de større samplinger og strukturen bliver mindre udtalt når samplingerne bliver mindre, se også figur 4.16.

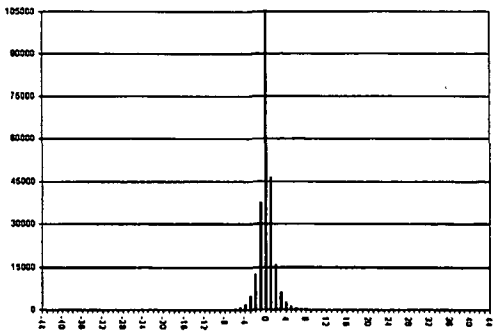
Terrænmodeller der er lavet ud fra højdekurver har ikke samme tendens. MTA kompenserer altså for en overrepræsentation når inddata er knyttet sammen ved højdekurver, se figur 4.13.

Konklusionen er at hvis vi ønsker at arbejde med en sampling af inddata, skal der udvælges en mindre sampling. Derved undgås en stor overrepræsentation af højde i multipla af 5 og den terrasselignende struktur undgås.

Vi har produceret histogrammer over højdedifferensen mellem to modeller for at se hvor stor forskel der er i kontrolhøjderne i de forskellige terrænmodeller. Hvis de to terrænmodeller gav de samme kontrolhøjder, skulle histogrammet udelukkende bestå af værdier i 0. Vi har plottet fire eksempler på sådanne histogrammer i figur 4.17-4.20.

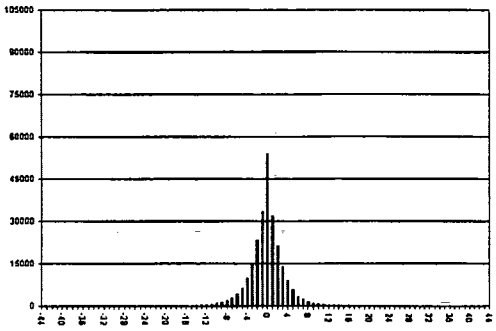


Figur 4.17 Histogram for højdeforskellen mellem DTM højdekurver og DTM B.

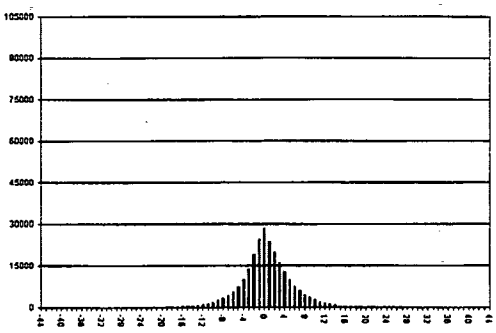


Figur 4.18 Histogram for højdeforskellen mellem DTM højdekurver og DTM C.

Som det ses bliver histogrammerne 'bredere' når der benyttes mindre samplinger.



Figur 4.19 Histogram for højdeforskellen mellem DTM højdekurver og DTM E.



Figur 4.20 Histogram for højdeforskellen mellem DTM højdekurver og DTM F.

Dette svarer til at modellerne ud fra mindre samplinger producerer værdier i kontrolpunkterne med større differens til værdierne fra modellen ud fra højdekurverne.

Det er derfor en ide at udregne standardafvigelsen for at få et indblik i hvor store afvigelser der er fra 0. Dermed fås et mål for hvor stor usikkerhed uddata fra DTM **sampling** har i forhold til DTM **højdekurver**. Standardafvigelserne er gengivet i tabel 4.4.

Tabel 4.4 Standardafvigelser for forskellen mellem par af terrænmodeller.

Std.afv.	Højde	B	C	D	E	F	G	H	I
Højde	0								
B	1,0679	0							
C	1,9545	1,5467	0						
D	3,1340	2,7471	2,3129	0					
E	4,5988	4,2702	3,9243	3,3465	0				
F	6,2318	5,9108	5,6342	5,2407	4,8211	0			
G	8,6473	8,3859	8,0574	7,6745	6,9030	6,7099	0		
H	10,515	10,2615	10,0247	9,6683	9,3427	8,0539	8,1584	0	
I	11,720	11,494	11,2339	10,8712	10,2485	10,0281	7,1627	9,3804	0

Tabel 4.4 giver altså et overblik over hvor stor en usikkerhed på uddata der introduceres ved at vælge en sampling i stedet for højdekurverne, til at generere en terrænmodel ud fra. Denne usikkerhed har vi i baghovedet under troværdighedsundersøgelserne i afsnit 4.5. Og de skal ses i lyset af at usikkerheden på de digitaliserede højdekurver som nævnt i afsnit 2.1, er meget lille.

Da en terrænmodel som nævnt mange gange skal bruges til formål hvor den første afledte skal kendes, er det også nødvendigt med lignende undersøgelser for de første afledte. I MTA er denne størrelse splittet op i to: hældningen der er et tal, og strygningen der er en retning på hældningen, tilsammen giver disse to størrelser gradienten.

Vi har direkte beregnet korrelationen mellem hældningene i kontrolpunkterne i de forskellige terrænmodeller, resultatet ses i tabel 4.5.

Tabel 4.5 Korrelationskoefficienterne mellem hældningerne i kontrolpunkterne i de forskellige terrænmodeller.

DTM	Højde	B	C	D	E	F	G	H	I
Højde	1,0000								
B	0,9511	1,0000							
C	0,9152	0,9435	1,0000						
D	0,8600	0,8889	0,9157	1,0000					
E	0,7944	0,8240	0,8476	0,8848	1,0000				
F	0,7384	0,7738	0,7879	0,8104	0,8628	1,0000			
G	0,6798	0,7156	0,7330	0,7568	0,8049	0,8149	1,0000		
H	0,5904	0,6226	0,6346	0,6500	0,6908	0,7490	0,7706	1,0000	
I	0,6423	0,6714	0,6882	0,6998	0,7313	0,7237	0,8340	0,7529	1,0000

Her ses langt lavere korrelationskkoefficienter end for højderne i tabel 4.1, og de falder hurtigere. Der kan derfor i lyset af undersøgelserne med højderne næsten direkte konkluderes, at disse ikke fordeler sig omkring linien $y = x$. Som en garanti har vi udregnet t-teststørelserne, se i tabel 4.6. Som forventet giver disse teststørrelser

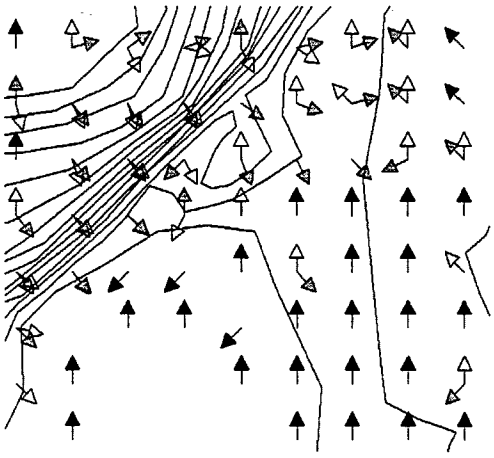
Tabel 4.6 t-teststørrelser for de afledte.

t-test	Højde	B	C	D	E	F	G	H	I
A	0								
B	69,1602	0							
C	69,7593	22,5228	0						
D	73,8233	39,0282	27,7984	0					
E	77,1695	49,4559	41,6058	25,7477	0				
F	93,9720	72,2850	66,9652	56,5938	46,7124	0			
G	80,5962	58,7730	52,9757	41,8870	28,9901	12,2287	0		
H	103,0604	85,6931	82,6992	76,4467	71,4344	47,2196	64,5360	0	
I	86,3856	65,8185	61,0499	51,0630	40,1049	5,90201	21,8138	46,7907	0

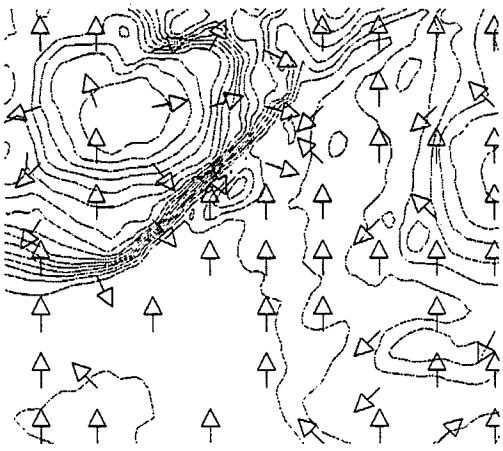
klart belæg for at sige, at hypoteserne om at punkterne er fordelt omkring $y = x$, er forkert. Alle teststørrelserne er klart over den kritiske værdi på 1,96. Dermed kan vi konkludere, at når vi arbejder med en sampling af højdekurvedata i en troværdighedstest, skal konklusionerne vedrørende hældninger tages med tilstrækkelige forbehold, idet alle hældningsværdierne i DTM **samplinger** er signifikant forskellige fra værdierne fra DTM **højdekurver**.

Anden del af hældningsundersøgelserne er en undersøgelse af strygningpilenes placering i forhold til hinanden. Vi har i figur 4.21 lagt et udpluk af strygningspilene fra terrænmodellerne DTM B og DTM E over hinanden og plottet dem ovenpå de højdekurver som DTM **højdekurver** genererer. Det er strygningen i pilens halepunkt der indikeres.

Vi bemærker at for hovedparten af pilene er de to terrænmodeller i nogenlunde god overensstemmelse (de peger næsten i den samme retning), selv om afvigelser hvor hældningspilene er nærmest modsat rettede, også forekommer. Vi får ikke tilstrækkeligt præcise mål for enigheden i terrænmodellerne af denne figur til egentlige



Figur 4.21 Strygningspile fra DTM B og DTM E indtegnet for et lille område omkring Rytterknægten-Ekkodalen ovenpå højdekurverne genereret i DTM B (Rytterknægten ligger i øverste venstre hjørne, nord er opad). Sorte, udfyldte pile angiver celler hvor de to terrænmodeller er identiske, de grå, udfyldte er strygningspilene for DTM E og de sorte, ikke-fyldte er for DTM B.



Figur 4.22 Strygningspile fra DTM E fra samme område, tegnet ovenpå de digitaliserede højdekurver.

konklusioner om robustheden af MTA-modellen, men hældningspilene indikerer at beregningen af den første afledte i terrænmodellerne i grove træk er stabil. I figur 4.22 er et udpluk af strygningspilene for DTM E plottet ovenpå de oprindelige, digitaliserede højdekurver. Vi ser tydelige forskelle mellem model og forlæg, nogle pile peger sågar op ad bakke. Der skal dog huskes på at ved områder uden den store variation i terrænet, kan en ganske lille forskel på model og forlæg få strygningspilen til at pege i den forkerte retning. Hovedparten af strygningspilene er dog i nogenlunde overensstemmelse med det digitaliserede forlæg – igen har vi ikke belæg for at drage skarpe konklusioner ud fra figuren, men det kan dog siges at før en terrænmodels første afledte skal kunne bruges til noget i praksis, skal den være rimelig præcis. Selv ganske små afvigleser i hældning og strygning kan få store konsekvenser for eksempelvis en erosionsberegning. Det kunne derfor med baggrund i de stygningspile der peger op ad en forholdsvis stejl bakke (se venstre side af figur 4.22), umiddelbart se ud til at MTA-modellen ikke er specielt velegnet til at beregne hældning og strygning. Dog burde der mere detaljeret udersøgelser til for at kunne konkludere noget entydigt.

På baggrund af vores undersøgelser af den første afledte synes det ikke at give mening at fortsætte med undersøgelser af den anden afledte. Der er ingen grund til at tro at de krumningsmål der kan aftvinges DTM samplinger har nogen tæt tilknytning til krumninger fra DTM højdekurver. Sammenfattende vurderer vi at hvis der benyttes en mindre datamængde til at generere en terrænmodel, er det vigtigt at være varsom

med at benytte den til formål, hvor viden om terrænets krumning er påkrævet. – Eller omvendt, hvis der ønskes en terrænmodel som skal benyttes til formål hvor den anden afledte skal benyttes, skal inddata være af en vis præcision og tæthed.

4.3 Valg af inddatamængde

Vi har i det ovenstående primært hæftet os ved tre faktorer, der gør os i stand til at foretage et valg i mængden af inddata. Ved udregningen af korrelationskoefficienterne så vi at jo større samplingsstørrelse, jo bedre korrelerede modellerne med DTM **højdekurver**. Samtidig så vi at det kun var DTM C og DTM E, der kunne siges at stamme fra samme observation som DTM **højdekurver**. Dette taler for at det er blandt disse to samplinger vores valg skal være. Derudover så vi at der for mindre samplinger var en tendens til at undgå de uønskede terrasselignende strukturer. Derfor vil vi vælge at foretage vores troværdighedstest på en terrænmodel genereret ud fra **sampling** E og **toppunkter**, samt den for en præcis afgrænsning nødvendige kystlinie.

4.4 Andre undersøgelser af MTA-modellens robusthed

Undervejs i dette kapitel har vi gjort os overvejelser om robustheden i MTA-modellen med fokus på afvigelser mellem terrænmodeller. Ud over det formål at afgrænse en passende inddatamængde til de følgende troværdighedstest, har vi foretaget to særundersøgelser som belyser andre aspekter af følsomheden. Den ene er en undersøgelse af effekten af støj i inddata, den anden en kortlægning (lokalisering) af afvigelserne mellem to terrænmodeller.

4.4.1 Effekt af 10% støj i inddata

Det er interessant i forhold til at vurdere MTA-modellens robusthed, at undersøge hvor stor betydning usikkerhed på inddata har på den endelige terrænmodel. Vores udgangspunkt er, at hvis små forskelle mellem to samplinger giver anledning til markante forskelle på de tilhørende terrænmodeller, er der noget galt.

Vi har fremprovokeret en støj svarende til $\pm 10\%$ usikkerhed på målepunkterne i **sampling** D (3368 målepunkter). Denne usikkerhed virker umiddelbart voldsom i forhold til den reelle usikkerhed på inddata. I denne sammenhæng er vi dog interesserede i at se mere generelt på hvad en 'pertubation' af inddata betyder, og har villet have en markant ændring af inddata. Vi har forinden foretaget flere forsøg med en mildere støj, men dette uden samme effekt; vi har nærmest ikke engang kunnet registrere ændringerne i inddata. På det grundlag kunne vi have valgt at konkludere at støj kun betyder meget lidt for MTA-modellen, og have stoppet undersøgelserne dér. Med den efterfølgende, kraftigere pertubation har vi dog villet være helt sikre.

Vi foretager sammenligninger for både den egentlige højdeværdi og den første afledte, hældningen. Derimod har vi ikke brugt den anden afledte, da vi tidligere har konstateret at der i forvejen er store usikkerheder forbundet med den.

Vi har udregnet korrelationen mellem de to sammenlignede terrænmodeller DTM D og DTM D - **støj** til 0,994, som er i samme niveau som korrelationskoefficienter udregnet mellem de degenererede datasæt. Derudover har har vi udregnet en standardafvigelse på forskellene mellem de to terrænmodeller på $3,4\ m$ (afrundet). Afvigelser mellem dem forekommer i godt 85% af cellerne, men i knapt 43% af cellerne er afvigelsen dog på mindre end $\pm 3\ m$. t-teststørrelsen for de to datasæt er udregnet til 2,96 som er signifikant, dvs. de to datasæt er forskellige.

Korrelationen mellem hældningerne i DTM D og DTM D - **støj** er 0,705. Der er altså markant større forskel på de to hældningsmodeller end på højdemodellerne, svarende til den markante forskel i hældninger som en halvering af datamængden betød i et tidligere afsnit. Stadig er dog ca. 77% af cellernes hældning mindre end ± 3 procentpoint[1] fra hinanden.

Støj er som usikkerhed en faktor vi må tage i betragtning ved dataindsamlingen, men vores analyse siger ikke noget om robustheden af terrænmodellerne generelt. Dertil skulle vi gentage beregningerne for alle de forskellige terrænmodeller og sammenligne støj-effekten.

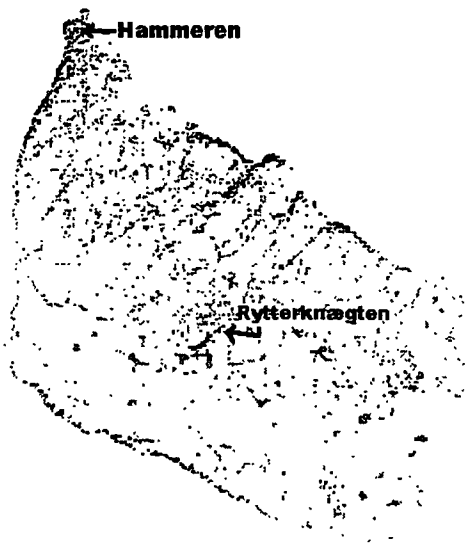
Denne indledende manøvre viser dog at på trods af en voldsom støj antager halvdelen af de 'afvigende' celler værdier (skarpt) mindre end $3\ m$. Dette skal selvfølgelig ses i forhold til de 10% støj som vi har påført. For større højdeværdier kan denne støj betyde en reel ændring på op til $15\ m$, selv om hovedparten af ændringerne er af mindre størrelsesorden. Alt i alt antyder undersøgelsen at det der ligner en voldsom støj, ser ud til at blive dæmpet en smule. Dæmpningen sker fordi MTA-modellen prioriterer det højere at terrænmodellen skal være differentiabel end at gengive inddata præcist. Udglatningen af modellen går så særlig hårdt ud over de mest voldsomme ændringer i terrænet.

4.4.2 Regionale tendenser for afvigelser

Hidtil har vi undersøgt afvigelserne mellem terrænmodellerne uafhængigt af datapunkternes georgrafiske beliggenhed. Vi har dog undervejs fået en formodning om at der måske er forskel på hvor afvigelserne mellem kontrol og terrænmodel forekommer. Det kan eksempelvis tænkes at afvigelser forekommer hyppigere ved store højder, på stejle skråninger eller bestemt af andre topografiske forhold. Med andre ord vil det sige at MTA-modellen er særligt følsom overfor inddata i stærkt varierende områder (hvilket heller ikke virker usandsynligt).

Via visuel tolkning sammenholdes afvigelserne mellem forskellige terrænmodeller i par, dvs. DTM C mod DTM B etc. Nedenfor i figurerne 4.23 og 4.24 er to af sammenligningerne gengivet.

[1] Hældningen er udregnet som stigning i procent og ikke i grader.



Figur 4.23 Forskellene mellem DTM højdekurver og DTM B, ved sort er DTM højdekurver mere end 2 m over DTM B, ved grå er det omvendt. Forskellene er markant placeret langs kysten, ved Rytterknægten og ved Hammeren.

Figur 4.24 Forskellene mellem DTM E og DTM F. Forskellene er placeret langt mere udbredt end i figur 4.23.

Dette giver anledning til følgende betragtninger:

1. Jo færre målepunkter de sammenlignede terrænmodeller er konstrueret af, jo større er afvigelserne mellem dem. Det vil sige, at reduktionen af inddata betyder mere når inddatamængden i forvejen er lille.

2. Især for afvigelserne mellem DTM **højdekurver** og DTM B ser der ud til at være en sammenhæng mellem hældningerne i terrænet og afvigelsernes størrelse. I godt 23% af cellerne er de to terrænmodeller ikke ens, i 20% af cellerne overskyder DTM **højdekurver** DTM B med 1 m og i knapt 3% underskyder den tilsvarende. Det er tydeligt at langt de største sammenhængende zoner med 'afvigende' celler forekommer langs Bornholms kyster, ved Hammeren og Hammershus-området og ved området omkring Rytterknægten.

3. I forhold til mønsteret for afvigelserne i figur 4.23 er billedet i figur 4.24 mere broget, i tråd med at antallet af inddata-punkter reduceres.

På denne baggrund slutter vi at de observerede tendenser understøtter vores formodning. De steder i terrænet hvor der sker mest, er terrænmodellerne mest følsomme.

I næste afsnit skal vi se en grundigere undersøgelse af afvigelserne for bestemte lokaliteter af en terrænmodel og kontrolpunkterne, som stemmer fint overens med de

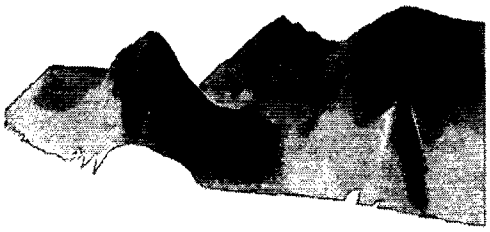
her anførte resultater.

4.5 Modellens troværdighed overfor inddata

Vi har nu fundet frem til en sampling-størrelse som vi i henhold til analyserne i forrige afsnit vurderer vil give det bedst mulige resultat i forhold til brug af højdekurverne. I figurerne 4.25 og 4.26 viser vi to billeder af terrænmodellen dannet af **sampling E**, **kystlinien** og **toppunkter**, i form af to såkaldte 'shaded reliefs'.

På figur 4.25 ser vi et perspektivbillede ind over Bornholm, set fra nordnordøst. Især ses nogle af Bornhoms karakteristiske punkter, Hammeren (mod højre) og Rytterknægten (som det absolutte toppunkt på øen). I første omgang viser figuren at terrænmodellen gengiver landskabet genkendeligt, i hvert fald i større skala. Når vi zoomer ind viser det sig at mere lokalt at terrænmodellen måske overdriver topografiske forhold. Eksempelvis vil vi kunne se at terrænmodellen tegner alle toppunkter meget spidse, og genererer skarpe kanter langs kamme og dale. Det indikerer at modellen er lavet på et minimum af data. I figur 4.26 fokuserer vi specielt på Hammeren, som illustration. Som det ses er toppunkterne spidse og kammene skarpe.

Figur 4.25 Et 'shaded relief' over Bornholm på baggrund af DTM E. Vi kigger ind over øen nordfra og har altså Hammeren yderst til højre. Alle højder er kunstigt 'overhøjet' med en faktor 2 for at forstærke det visuelle indtryk.

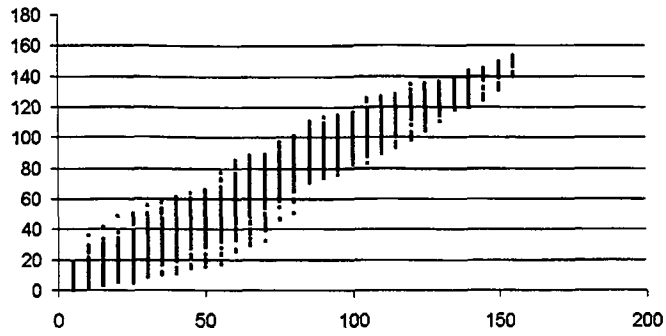


Figur 4.26 Hammeren vist i et 'shaded relief'. Hammeren ses fra nordøst og ind mod Bornholm.

For at undersøge troværdigheden af den valgte terrænmodel benytter vi i første omgang de i afsnit 2.2 udvalgte kontrolpunkter (de i alt 26.939 punkter), og sammenholder dem med højdeværdierne i DTM E. Udgangspunktet i denne analyse er som nævnt i afsnit 2.2 et scatterplot (se figur 4.27).

Fordelingen af afvigelser mellem DTM E's højdeværdier og kontrolsættet kan ses af scatterplottet, figur 4.27. Den linierede struktur i plottet skyldes som sædvanlig at alle kontrolpunkterne har en højdeværdi i et multipla af 5.

Korrelationskoefficienten for de to datasæt er 0,9901, altså en væsentlig lavere korrelation mellem DTM E og kontrolpunkter end de korrelationskoefficienter vi fandt tidligere (i afsnit 4.2) mellem forskellige terrænmodeller. Dér så vi dog at forholdet mellem korrelation og t-teststørrelse ikke er så entydig. Vi beregner nu t-teststørrelsen for hypotesen om fuld korrelation mellem DTM E og kontrolpunkterne, for at få



Figur 4.27 Scatterplot over kontrolpunkternes højdeværdier og DTM E's højdeværdier.

afklaret om der er en god overensstemmelse mellem kontrolpunkter og DTM E. t-teststørrelsen for de to datasæt er 3,271 hvilket er signifikant – kontrolpunkterne og terrænmodellen er altså markant forskellige hvad angår deres højdeværdier.

Dette peger altså umiddelbart på at **sampling** E alligevel ikke er fuldt pålidelig til at repræsentere hele Bornholm. Derfor har vi udregnet t-teststørrelsen for kontrolpunkterne og de øvrige terrænmodeller, og har konstateret at t-testværdien for den udvalgte DTM E er den laveste generelt. Den valgte terrænmodel er altså den der bedst falder omkring linien $y = x$ (se tabel 4.7 nedenfor for de beregnede t-teststørrelser).

På figur 4.27 er det imidlertid tydeligt at DTM E ikke ligger helt tæt på denne linie. I stedet forestiller vi os at forklaringen på den (forholdsvis) lave teststørrelse kan skyldes at DTM E overskyder nogenlunde lige så meget som den underskyder. Det ville formentlig vise sig ikke at være tilfældet for nogle af de andre terrænmodeller (hvis vi havde lavet de tilsvarende grafer).

I det hele taget må vi dog erkende at det ikke er forsvarligt at bruge denne statistiske test som argument for at have valgt **sampling** E; dertil er teststørrelserne alle for store. I stedet må vi se os om efter andre begrundelser og undersøgelser.

Tabel 4.7 t-teststørrelser for korrelationen mellem de forskellige terrænmodeller og kontrolsættet.

terrænmodel	t-teststørrelse
DTM højdekurver	25,0881
DTM B	9,4154
DTM C	8,1442
DTM D	9,1231
DTM E	3,2714
DTM F	24,9419
DTM G	10,7383
DTM H	67,6532
DTM I	14,3009

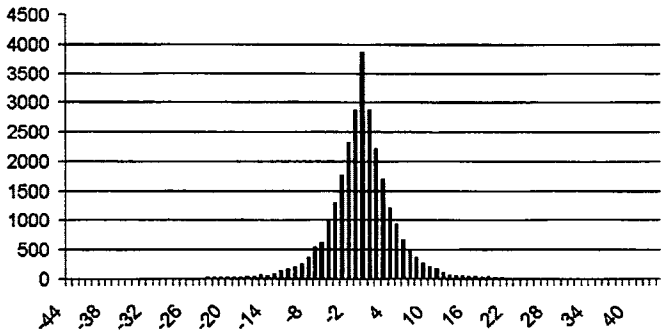
Det er bemærkelsesværdigt at teststørrelsen for DTM **højdekurver** er så stor. For

DTM **højdekurver** gælder det specielt at kontrolpunkterne allerede er brugt som inddata til terrænmodellen. Den høje teststørrelse indikerer at MTA-modellen ikke er i stand til at gengive disse inddata fornuftigt i uddata, hvilket er overraskende.

Vi kan ikke på nuværende tidspunkt give en egentlig forklaring, men ved sammenligning mellem figurerne i appendiks A ses det at DTM **højdekurver** ser ud til at være god nok. Punktskyen er meget pænt fordelt om $y = x$, i forhold til nogle af de andre terrænmodeller.

Derfor tænker vi os i stedet at andre testformer ville være at foretrække i denne undersøgelse, men har ikke nået dem i denne omgang.

Højdeafvigelserne mellem kontrolpunkterne og DTM E er plottet i figur 4.28. Afvigelserne befinder sig i intervallet $[-38, 28]$ med en standardafvigelse på $4,823\ m$. 89% af afvigelserne befinder sig indenfor $\pm 5\ m$.



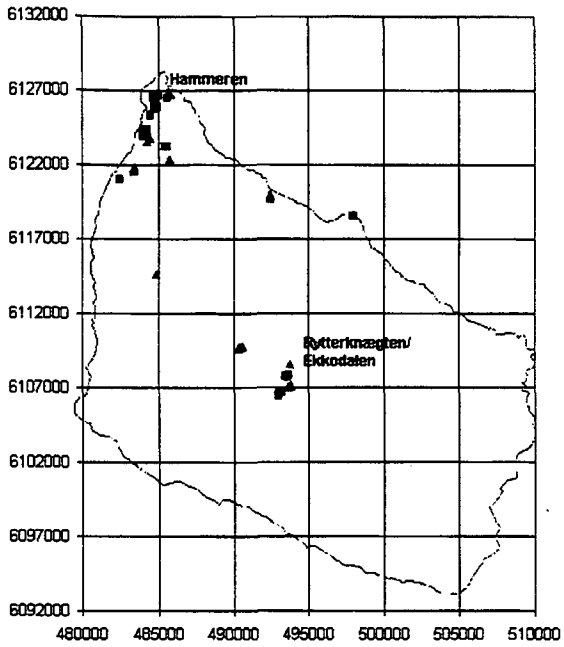
Figur 4.28 Histogram over afvigelserne mellem kontrolpunkternes og DTM E's højdeværdier.

Vi husker fra tabel 4.4 at standardafvigelsen mellem DTM **højdekurver** og DTM E var $4,59\ m$. Da vi betragter denne afvigelse som en usikkerhed vi ved at vælge en sampling har påført inddata, synes vi ikke at en samlet afvigelse på $4,82\ m$ er særlig alvorlig. Tilmed vurderer vi at en samlet standardafvigelse på under $5\ m$, i forhold til mange mulige anvendelser af DTM E, er en acceptabel usikkerhed af terrænmodellen.

Vi vil dog gerne belyse nærmere hvor de største afvigelser forekommer og inddrager den geografiske beliggenhed af kontrolpunkterne. Det viser sig at de ekstreme af afvigelserne forekommer i områder, hvor der er forholdsvis store ændringer i terrænet indenfor korte afstande, specielt ved Rytterknægten (mod Ekkodalen) og Hammeren (se figur 4.29). På figuren fremgår det også at der indenfor korte afstande er både over- og underskydninger af højdeværdien. Dette er en konsekvens af at vi har valgt så lille en sampling, idet den ikke har mulighed for at beskrive så drastiske ændringer.

4.6 Gengivelse af toppunkter

Vi har tidligere gjort rede for vigtigheden af at en terrænmodel kan gengive de informationsrige lokaliteter i terrænet. De troværdighedstest vi foretog i forrige afsnit omhandlede de mere tilfældige, generelle kontrolpunkter. I dette afsnit undersøger vi



Figur 4.29 Her ses placeringen af de kontrolpunkter hvor DTM E har beregnet en værdi der er mere end 20 m afvigende. Firkanter angiver underskydninger, trekanter overskydninger.

om DTM E korrekt lokaliserer de digitaliserede toppunkter.

Vi minder om at toppunkterne allerede er medtaget som inddata i konstruktionen af DTM E. Da MTA-modellen ikke er en eksakt interpolation, er der dog mulighed for at modeltoppunkterne afviger, både med hensyn til deres højdeværdi og (x, y)-koordinaterne for de digitaliserede toppunkter.

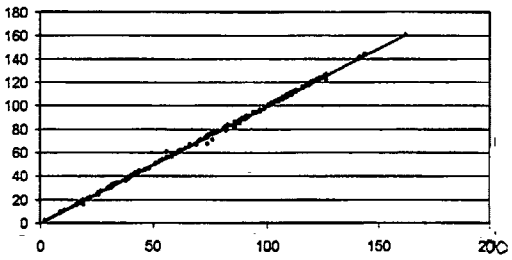
4.6.1 Højden i toppunkter

Vi udfører i første omgang de samme test som tidligere, men med de digitaliserede toppunkter som kontrolsæt. Scatterplot og histogram for afvigelser er vist i figurerne 4.30 og 4.31.

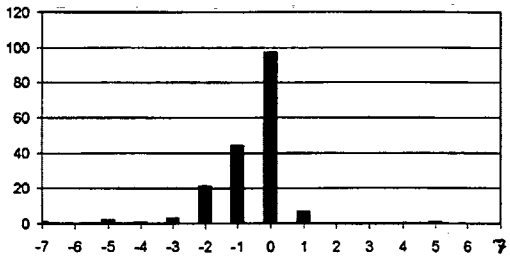
På figur 4.30 ses en pæn, lige linie for toppunkternes højdeværdier overfor DTM E's højdeværdier. Korrelationen mellem de to datasæt er 0,9991, men t-teststørrelsen er 7,701, hvilket er signifikant. Vi må altså afvise hypotesen om at de to datasæt har samme værdier.

Af histogrammet for afvigelserne, figur 4.31, fremgår det da også at DTM E har en klar tendens til underskyde toppunkterne. Der er altså belæg for at slutte at terrænmodellen DTM E tegner et 'lavere' billede af Bornholm end digitaliseringsforlægget giver anledning til.

Afvigelserne ligger alle i intervallet $[-7, 5]$ og har en standardafvigelse på $1,083\ m$. Det er en langt lavere værdi end standardafvigelsen for forskellen mellem DTM E og de generelle kontrolpunkter. Vi kan således konstatere at toppunkternes højdevær-



Figur 4.30 DTM E's højdeværdier (y-akse) plottet mod de digitaliserede højdeværdier (x-akse).



Figur 4.31 Afvigelserne mellem DTM E og toppunkterne. Modeltoppunkterne har en tendens til at blive underskudt i forhold til det digitaliserede toppunkt.

dier er mere præcise end de øvrige punkter, hvilket selvfølgelig hænger sammen med at toppunkterne er med i modellen som inddata. Selv om MTA-modellen giver en approksimerende interpolation (som vi netop konstaterede ikke er identisk med inddata), er forskellen ikke stor – uddata ligger overvejende i nærheden af inddata.

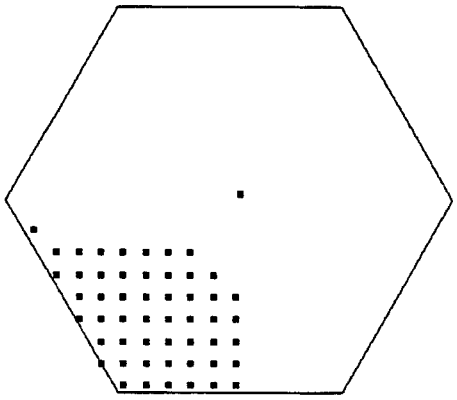
4.6.2 Placering af toppunkter

Vi har i nærheden af de digitaliserede toppunkter forsøgt at finde de lokale maksima i modellen, for derved at have mulighed for at sammenligne deres placering. Det har ikke i alle tilfælde været lige nemt, idet nogle af de digitaliserede toppunkter er små, lokale maksima som ikke indkredses af lavere omkringliggende punkter. Det vil sige at ud af de 177 digitaliserede toppunkter forventer vi ikke at alle overhovedet kan lokaliseres som modeltoppunkter.

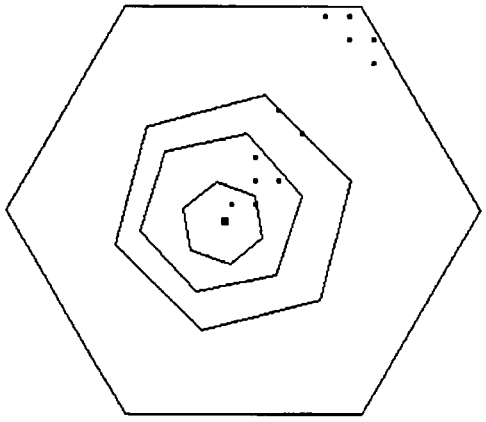
To andre problemer er opstået i forbindelse med lokaliseringen af modeltoppene. I nogle tilfælde tegnes det lokale maksimum i modellen som en flade, og der fremkommer derfor en hel skare af maksimumspunkter indenfor søgepolygonen omkring det digitaliserede toppunkt, se figur 4.32. I andre tilfælde er der tale om at modeltoppunktet er lokaliseret som punkt på en kam. Dette bevirker at når modelmaksimummet forsøges lokaliseret, bliver det placeret på randen af søgepolygonen. Hvis søgepolygonen gøres mindre, flyttes også modeltoppunktet som dog stadig tegnes på randen af polygonen, se figur 4.33.

Problemet med lokaliseringen af et modeltoppunkt til sammenligningen har vi valgt at løse ved kun at medtage de modeltoppunkter der er lokaliseret i det indre af søgepolygonerne. Derved har vi fravalgt alle de steder, hvor modellen ikke er i stand til at gengive et toppunkt. Derfor skal vores undersøgelser af kvaliteten af toppunktsgengivelsen ses i forhold til, hvor mange toppunkter modellen i det hele taget er i stand til at gengive.

På figur 4.34 ses de fundne modeltoppunkter tegnet ind omkring de digitaliserede toppunkter(som ikke fremgår af figuren). Polygonerne afgrænser en omegn af de digitaliserede toppunkter, således at vi har mulighed for at finde lokale maksima omkring disse. Vi har kun medtaget entydigt fundne modeltoppunkter, således at vi



Figur 4.32 Det lokale maksimum, angivet som prikkerne nederst til venstre, tegnes i modellen som en flade (den større prik i centrum er det digitaliserede toppunkt). Dette bevirker en gruppe af maksimumspunkter.



Figur 4.33 Det lokale maksimum er placeret på en kam. Modeltoppunktet flyttes når søgepolygonen formindskes.

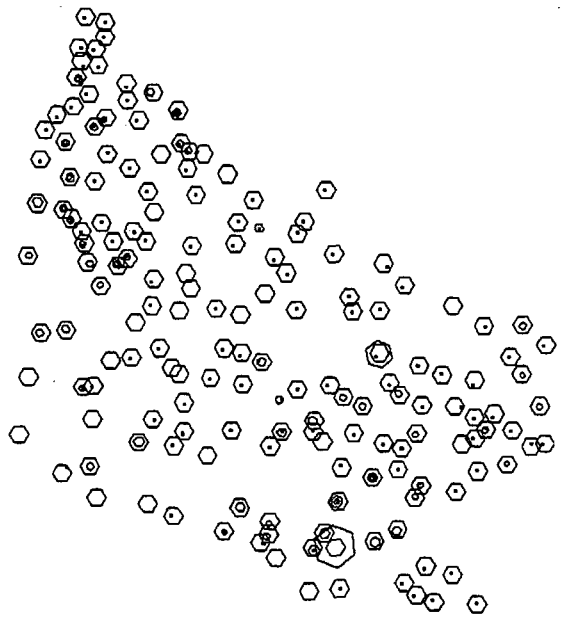
undgår de tidligere omtalte problemer.

Vi har ialt fundet 108 modeltoppunkter (ud af de 177 mulige), og den følgende statistik beregnes på dem alene. Konsekvensen af et så relativt lavt antal er, at vi må tage visse forbehold i konklusionerne. En nærmere undersøgelse af hvert enkelt digitaliseret toppunkt vist i MGE ville vise om det reelt er rimeligt at inddrage punktet som toppunkt. Vi har af tidsmæssige årsager ikke haft mulighed for at gennemføre en sådan undersøgelse, men vi skønner på baggrund af enkelte kontroller at en del af de manglende toppunkter kan forklares sådan.

For de 108's vedkommende har vi parret de fundne modeltoppunkter med deres tilhørende digitaliserede toppunkter, og beregnet forskelsvektorerne. Disse er afbildet i figur 4.35 og 4.36. Vi har undervejs i arbejdet konstateret at MTA-modellen arbejder indenfor rastermodellens rumlige opløsning. De koordinatsæt som MTA læser ud som beliggenheden af modeltoppunkterne, er alle gitterpunkter, dvs. at MTA 'flytter' på de tegnede modeltoppunkter, indtil deres koordinater er identiske med koordinatsættet for en celle (hvilket også ses i figurerne 4.32 og 4.33).

Vi er nu interesserede i at få afklaret om MTA-modellen rykker modeltoppunkterne til nærmeste gitterpunkt eller i en bestemt retning, fx opad mod venstre.

For at teste en hypotese om at forskydningen af et toppunkt indenfor en celle, dvs. forskelsvektorens (x, y)-koordinater ligger i intervallet $[-25\ m, 25\ m]$, er tilfældig, benytter vi teststørrelsen ξ, introduceret i afsnit 2.2 på side 28. Den beregnede værdi for de 62 punkter indenfor $[-25\ m, 25\ m]$ er 490, dvs. større end den kritiske værdi på 2,99; ergo forkaster vi vores hypotese om toppunkternes tilfældige forskydning. Af gennemsnitsvektoren $(x, y) = (-1,38; 2,45)$ ser vi at der tværtimod er en tendens til en lille forskydning af beliggenheden af modeltoppunktet mod øverste



Figur 4.34 Søgepolygoner omkring de digitaliserede toppunkter for Bornholm. I tilfælde af usikkerhed for afgrænsningen af modeltoppunkternes gyldighed har vi søgt indenfor mere end én polygon. De tomme polygoner angiver steder hvor vi har opgivet at lokalisere et modeltoppunkt.

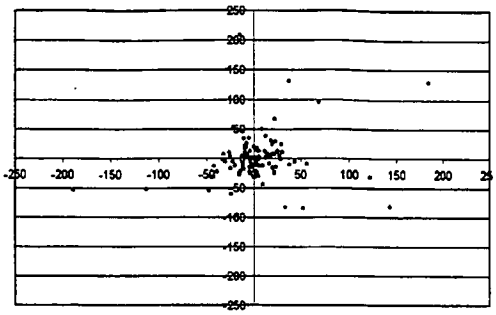
venstre hjørne[2].

De øvrige 46 toppunkter, for hvilke forskelsvektorernes (x, y)-koordinater ligger uden for intervallet $[-25\ m, 25\ m]$, kan vi ligeledes teste om de er tilfældigt forskudt. Vi beregner ξ til 2382, og gennemsnitsvektoren til $(5,52; 4,62)$, hvilket betyder at vi kan afvise hypotesen om tilfældig forskydning, og i stedet konstatere at disse toppunkter har en tendens til at forskyde sig opad mod højre (nordøst). Vi understreger dog at den ekstreme 'outlier' øverst til højre i figur 4.35 er beregnet med i denne tendens, hvilket forskyder gennemsnitsvektorens retning.

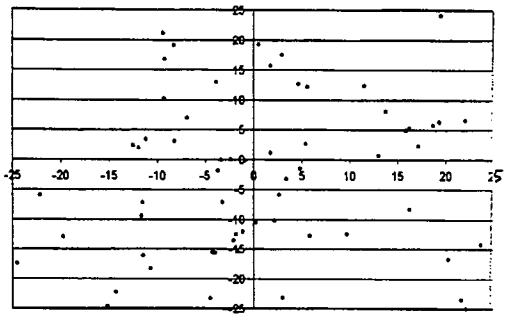
På nuværende tidspunkt føler vi ikke at vi kan forklare denne tendens velargumenteret. Der er i høj grad brug for yderligere undersøgelser af denne art, undersøgelser som vi ikke har haft tid til i denne omgang men som ville være interessant at gå videre med.

Den her beskrevne analyse er kun én af flere som skulle til for at komme med et fyldestgørende svar på hvordan MTA-modellen placerer sine informationsrige inddata, i hvor høj grad der er systematik i modellens måde at tegne terrænet på. Det ville fx være interessant at undersøge om MTA-modellen reelt trækker terrænet sammen (ved at overskyde bundpunkter og underskyde toppunkter) eller tilsvarende.

[2]En sandsynlig forklaring ligger i det forhold at koordinater for rasterceller håndteres forskelligt. I MTA-modulet angives en rastercelles koordinater ved cellens midtpunkt, mens det generelt er det øverste venstre hjørnekoordinat der identificerer en celle. I placeringen af modeltoppunkterne forestiller vi os at MTA-modellen af en eller anden grund *vil* bruge hjørnekoordinaterne.



Figur 4.35 De 108 beregnede forskelsvektorer i (x, y)-diagram.



Figur 4.36 Forstørrelse af figur 4.35 omkring de korteste vektorer.

Vi har i denne omgang undersøgt toppunkter, i næste omgang kunne vi derfor inddrage bundpunkter (dalbund, huller etc.) og andre informationsrige punkter.

I de videre undersøgelser kunne vi også fokusere på eventuelle regionale tendenser. Det er nemlig ikke utænkeligt at der er en vis systematik i retningen af afvigelserne i forhold til makrorelieffet (storskala-variationerne i terrænet). På nordsiden af Bornholm hvor terrænet generelt stiger mod syd, forventer vi fx en større hyppighed af overskydninger mod syd – og vice versa.

4.7 Konklusioner om terrænmodellen

Vi har nu undersøgt MTA-modellen og har evalueret troværdigheden af terrænmodellen (DTM E) i forskellige henseender. Vi konstaterede at terrænmodellen ikke gengiver de generelle kontrolpunkter med fuld nøjagtighed. Ligeledes fandt vi systematiske afvigelser både med hensyn til toppunkternes værdier og placering. I forhold til at standardafvigelsen på forskelle mellem DTM **højdekurver** og DTM E på $4,59\ m$, er en usikkerhed på $4,83\ m$ for DTM E mod kontrolsættet ikke voldsom stor. I anvendelser hvor en terrænmodel primært skal gengive højder troværdigt i større skala, eller kravene til præcisionen er tilstrækkelig svage, vurderer vi derfor at DTM E er brugbar. Og det vil i anden omgang sige at MTA-modellen fungerer.

I lyset af at vi i flere statistiske test har måttet afvise hypoteser om lighed mellem ind- og uddata, virker denne vurdering måske umiddelbart urimelig. Som vi dog har været inde på, har vi måttet indse at de brugte statistiske test ikke overalt har været fyldestgørende, men har måttet suppleres med mere kvalitative vurderinger af terrænmodellerne.

Tendensen til at underskyde og fejlplacere toppunkterne skyldes formentlig MTA-modellen og ikke vores inddata, idet der i den plane gitterkonstruktion ikke tages hensyn til de informationsrige punkter. Således er der mulighed for at et toppunkt bliver placeret som fx et punkt på en kam.

En yderligere kommentar er relevant angående de temmelig store afvigelser mellem DTM E og de digitaliserede toppunkter. Vi så i afsnit 4.4.2 at terrænmodellerne er særligt følsomme i områder hvor relieffet varierer voldsomt. Det understøttedes af

undersøgelsen om de ekstreme afvigelser. Det er væsentligt at bemærke at de ekstreme afvigelser sker på steder hvor en fejlplacering på et par meter i (x, y)-planet ikke betyder voldsomt meget. Det vil sige at der snarere er tale om at en skrænt tegnes forskudt, end at terrænmodellen angiver en 30 m høj bakke på et sted, hvor der i virkeligheden ingen ændringer sker.

MTA-modellens evne til at gengive terrænets hældning havde vi sværere ved at vurdere. Hældningerne for DTM E og DTM **højdekurver** havde en korrelationskoefficient på 0,7944. Vi kunne derfor ikke betragte hældningerne i DTM E som værende repræsentative for andre terrænmodeller. Vores mere kvalitative undersøgelser af hældningen viste dels at strygningspilene fra de forskellige terrænmodeller var forholdsvis ens, og dels at strygningspilene fra DTM E stemte nogenlunde overens med de oprindelige højdekurver. Vi skal dog huske på at vi arbejder med et stort område og i **sampling** E's tilfælde, en forholdsvis lille datamængde. Dette bevirker at detaljeringsgraden i inddata ikke er tilstrækkeligt til, at vi kan udtale os entydigt om modellens evne til at gengive terrænets hældning. Hvis vi skulle lave en sådan undersøgelse ville det være nødvendigt med et mindre undersøgelsesområde, så detailviden om områdets hældning kunne repræsenteres i inddata på passende vis, via langt flere målinger på en stigning.

Hvad angår MTA-modellens gengivelse af den anden afledte, argumenterde vi tidligere for at undersøgelser af krumningen i terrænet ville være frugtesløse. Dels har vi ikke haft mulighed for at verificere sådanne beregninger, dels har allerede undersøgelserne af hældninger antydet de problemer og usikkerheder der ville ligge i undersøgelser af krumningen. En konsekvens af dette fravalg er at vi ikke vil vurdere MTA-modellens anvendelighed indenfor modellering af dynamiske processer i terrænet. Udenfor enhver tvivl er dog at en sådan anvendelse under alle omstændigheder kræver særligt præcise inddata.

Kapitel 5

Opsamling og konklusion

Vi har gennem rapporten beskrevet og analyseret den matematiske model der ligger til grund for MGE's terrænanalyse-modul. Vi vil nu samle op på de delkonklusioner som vi har draget undervejs og holde dem op mod hinanden for til sidst at tage stilling til kvaliteten af MTA-modellen, set i forhold til de påstande om anvendelighed Intergraph nævner i deres manualer.

5.1 MTA-modellens opbygning

Triangulationsprocessen er som metode meget intuitivt forståelig og grundliggende fornuftig, idet den identificerer et datapunkts nærmeste naboer og derved tilgodeser den fundamentale antagelse i geografien, om en forholdsvis større relation mellem nære objekter. At gyldigheden af dette princip så generelt kan diskuteres, og at andre modeller til konstruktion af terrænmodeller benytter teknisk set mere avancerede relationer mellem inddata end MTA-modellen, er en diskussion vi desværre ikke har kunnet tage her. Den kræver et videre arbejde med at sammenligne forskellige modellers struktur og uddata. MTA-modellen set isoleret ser i denne omgang så rimelig ud på det konceptuelle plan.

Algoritmen der danner TIN-modellen tager også hensyn til hvilken type inddata den fodres med, fx udtynder den data langs højdekurver således at der ikke er en overrepræsentation langs disse, og modelbrugeren har således mulighed for at inkorporere kendskab til det modellerede terræn. Samtidig løses de få problemer der ligger i Delaunay-triangulationen af MTA's algoritme. Holdes disse fordele op imod ulemper som eksempelvis at MTA-modellen ikke er en fysisk baseret model, og at det er brugeren der skal sikre at inddata repræsenterer terrænet på passende vis, se afsnit 3.1, er det vores vurdering at denne del af MTA-modellen er ganske fornuftig.

Problemet med opbygningen af MTA-modellen ligger nok i stedet i de resterende dele af processen, eller rettere i at hele processen ikke kan skilles fra hinanden. Som vi nævnte i afsnit 3.3 tænker vi os situationer hvor det er ønskeligt med en reel valgmulighed i interpolationsmetode. Vi nævnte at i situationer med meget præcise målinger til grund for inddata, er det kritisabelt at MTA-modellen ikke giver mulig-

hed for en eksakt interpolation. Den prioriterer differentiabilitet i terrænoverfladen højere end end eksakt gengivelse af inddata.

Det er ærgerligt at MTA ikke indeholder valgmulighed for udelukkende at benytte en eksakt interpolationsmetode, idet man som bruger ekempelvis ofte står med højdekurver som eneste inddata. Som vi nævnte i afsnit 2.1 er usikkerheden på udtegning af højdekurver meget lav, og vi ønsker derfor at højdekurverne fra inddata er at finde igen i den færdige terrænmodel.

Det er som før beskrevet kravet om at konstruere et gitter forud for den bikubiske flade-interpolation, der udelukker muligheden for en eksakt interpolation. Samtidig giver Intergraph en meget mangelfuld information (i manualer og dialogen mellem værktøjerne og brugeren) om valget mellem de fire gitterkonstruktionsmetoder, og som vi så i afsnit 3.2.2 er det endelige resultatet meget afhængig af den valgte metode. Generelt vil en bruger dog ikke opleve det som et stort problem idet der reelt ikke er noget valg, når inddatamængden overstiger ca. 1000 datapunkter. I de fleste terrænmodel-anvendelser vurderer vi at det vil være tilfældet.

Vi synes dog det er et eksempel på de besværligheder der opstår når en anvendt model ikke er gjort tilstrækkelig gennemsigtig.

5.2 Kvaliteten af interpolationen

Det primære for en terrænmodel er som vi har redegjort for tidligere at gengive karakteristiske fysiske træk ved terrænet. Vi så i afsnit 4.5 at modellen ikke genererer ufysiske fænomener og i det hele taget gengiver de fleste karakteristiske træk ved Bornholm. Derimod observerede vi i afsnit 4.4.1 at MTA-modellen har en tendens til at udglatte inddata så visse karakteristiske træk bliver lidt udvasket (i den konkrete undersøgelse var det karakteristika fremprovokeret som støj). Dette udgør ikke et problem sålænge usikkerheden på inddata er stor, idet nogle af de karakteristiske træk kan være ekstreme afvigere. Mindre heldigt vil det derimod være hvis inddata er meget præcise og der er stor sikkerhed for at de afvigende træk er sande.

I vores undersøgelser af modellens robusthed overfor inddatamængden (afsnit 4.2), så vi at modellen genererede kvalitativt sammenlignelige terrænmodeller, ud fra samplinger der var reduceret til helt ned til $\frac{1}{32}$. Det ser vi som en stor styrke ved MTA idet modellen derved ikke genererer terrænmodeller af meget svingende karakter, blot inddatamængen ændres en smule. Dermed sikres brugeren en kontinuitet i kvaliteten af sine terrænmodeller.

I afsnit 4.1 afgjorde vi at kvaliteten af terrænmodellerne forøges væsentligt ved inddragelsen af informationsrige punkter. Dette er vigtig information, og et problem at man som bruger ikke får den, specielt i lyset af at terrænmodeller ofte konstrueres ud fra højdekurvedata alene.

Styrken ved den bikubiske spline er at den genererede terrænmodel er to gange differentiabel, og der derved åbnes mulighed for brug hvor viden om hældning og krumning i terrænet er nødvendig. I afsnit 4.2 så vi at specielt størrelsen på de afledte er meget følsomme over for inddata, og brugen af disse kan derfor kun ske kvalitativt.

Vi tager dog det forbehold for denne konklusion, at inddata i vores tilfælde er spredt over et forholdsvis stort areal og dermed ikke fanger hældningsvariationer tilpas nuanceret. Hvis vi ønsker en fuldstændig vurdering af modellens evne til at beregne troværdige hældninger, burde det modellerede område snævres ind. På et mindre område kunne vi indsamle data langt mere nuanceret. På trods af den manglende nuance i inddata synes MTA-modellen alligevel at producere hældninger hvis retning i mange tilfælde er en udmærket gengivelse af de retninger højdekurverne giver, se afsnit 4.2.

I afsnit 4.2 fik vi statistisk belæg for at slå fast at model- og kontrolværdierne ikke stemmer overens, på trods af en høj korrelation. De statistiske test til trods, men begrundet i de supplerende kvalitative undersøgelser af MTA-modellen, vurderer vi at den konstruerede terrænmodel (og altså implicit MTA-modellen) er anvendelig til at gengive højder, når blot vi accepterer en vis afvigelse.

Vi så i afsnit 4.6.1 at der var en systematik i denne forskel mellem model- og kontrolværdier. Det var i de områder med kraftig variation i terrænet, at de store forskelle var placeret. Dermed kan disse store numeriske højdeforskelle mellem model og kontrol skyldes en forholdsvis lille forskel i placering af eksempelvis et kraftigt fald i terrænet (kanten af Hammeren forskydes fx et par meter).

I lyset af at også de digitaliserede toppunkter lokaliseres for en stor dels vedkommende (i afsnit 4.6.1), vurderer vi opsamlende at MTA-modellen giver et resultat af acceptabel kvalitet.

5.3 Konklusion

Vi konkluderer på baggrund af vores arbejde at MTA-modellen er tilstrækkelig robust til ikke at korrumpere uddata for mindre usikkerheder og afvigelser i inddata.

Hvad angår troværdigheden af MTA-modellens uddata konkluderer vi at de er brugbare i gengivelsen af ikke alene karakteristiske træk ved det modellerede terræn, men også at generere en model med rimelig troværdige højdeværdier på mindre skala. Dermed synes vi at det er fuldt forsvarligt at benytte den genererede terrænmodel til formål hvor primært højdeværdier skal benyttes.

Derimod vil vi ikke på baggrund af disse undersøgelser konkludere noget entydigt omkring MTA-modellens evne til at gengive hældninger og krumninger i terrænet. Dog mener vi undersøgelserne indikerer at en stor præcision og stor tæthed af inddata, kombineret med stor og sikker viden om det modellerede terræn, under alle omstændigheder er nødvendigt før en sådan anvendelse er mulig.

Vi konkluderer to ting hvad angår usikkerheden i MTA-modellen og dens uddata: I selve modellen ligger forskellige forhold som akkumulerer en vis usikkerhed for den interpolerede terrænoverflade, men vi er ikke tilstrækkeligt afklarede til at kvantificere den.

I forhold til de (ikke konkrete) DTM-anvendelser som vi kan forestille os og deres forventede krav til datapræcision, er modellen i stand at producere terrænmodeller med en acceptabel usikkerhed.

Hvad angår MTA-modellen betragtet modelteoretisk konkluderer vi at dens konceptuelle grundlag og struktur virker fornuftig, selv om modellen ikke hviler på solid teori, eller helt undgår at virke lidt for forsimplet.

På trods af en konklusion der altså overvejende taler for MTA-modellens anvendelighed, konkluderer vi dog til slut at dokumentationen for modellens muligheder, forudsætninger og begrænsninger, samt en vejledning af modelbrugeren undervejs i interpolationsprocessen, er yderst mangelfuld.

Såfremt dette viser sig at være forbundet med det forhold at MTA-modellen kun er en grå boks-model, og at Intergraph måske ligefrem har spekuleret i ikke at gøre modellen alt for gennemskuelig, er det meget utilfredsstillende.

I værste fald kan dette medføre at en bruger får genereret en terrænmodel af ringere kvalitet end inddata reelt giver anledning til.

Vores afsluttende konklusion er således den at en erkendelse af og forståelse for forudsætninger og gyldighedsområde af en matematisk model er essentiel for en brugbar anvendelse af modellen.

5.4 Ideer til videre arbejde

Vi har igennem rapporten behandlet to overordnede grupper af test. Gennem undersøgelser for robustheden og troværdigheden af MTA-modellen, har vi fået en forståelse for nogle af de problemer og usikkerheder der ligger i konstruktionen af en digital terrænmodel.

Undervejs har vi dog redegjort for forskellige problemstillinger hvor vi ikke selv er nået til vejs ende, ligesom vores arbejde har givet anledning til en række ideer til videre undersøgelser af specielle aspekter af MTA-modellen. Vi vil slutte med at anføre dem her, forhåbentlig til inspiration for andre.

Pålidelighed af højdekurver Ud fra de digitale terrænmodeller har vi mulighed for at udtegne de højdekurver der implicit ligger i modellen. Der kan tænkes mange test for overensstemmelsen af sådanne højdekurver med de oprindelige inddata, afhængig af detaljering, gitterkonstruktion og ikke mindst udtegningsalgoritmen for kurverne. I tilfælde af at man i forbindelse med konstruktionen af en DTM kun kan få højdekurver som inddata der i forvejen er trukket ud af en anden terrænmodel, er en undersøgelse af denne art relevant.

Detaljerne i triangulationsprocessen Vi har i kapitel 1 argumenteret for fordelene ved at inddrage 'Infer Breaklines', 'Triangle Edge Maximum Length' og 'Densify TIN Fence' i konstruktionen af den digitale terrænmodel, så vidt det var muligt. Vi kunne ikke her undersøge betydningen af parametrene med de valgte inddata, men forestiller os en analyse af hvordan triangulationen ændres som ved brug disse.

En konstruktion af terrænmodeller for mindre arealer Det er oplagt at både andre detaljeringsgrader (den rumlige skala) og den fysiske afgrænsning

af det modellerede terræn kunne vise flere perspektiver af MTA-modellens anvendelighed i generelle tilfælde. Vi kunne fx iværksætte en detail-modellering af en enkelt lokalitet. I en eksisterende terrænmodellering foretaget på Vestamager brugtes et net af målepunkter med 1 m imellem datapunkter (ialt ca. 2500), og en usikkerhed på ca. 10 cm. Det ville være interessant at modellere i MTA-modellen og evt. sammenligne resultaterne med det oprindelige projekts terrænmodel.

Betydningen af den rumlige skala i terrænmodellerne I andre, eksisterende undersøgelser har man beskæftiget sig med betydningen af den rumlige opløsning af ind- og uddata. Vi forestiler os det kunne være interessant dels at konstruere terrænmodeller for de samme inddata med forskellig rumlig opløsning, ved varierende cellestørrelser, dels at fortsætte hvor dette projektarbejde slipper med at sammenligne terrænmodeller for inddata fra det samme område, af forskellig detaljeringsgrad. I sidste ende vil det give et billede af hvordan spline-interpolationen i MTA-modellen 'bindes op' af mere eller mindre tætte inddata.

Matematisk konstrueret referenceflade Vi har i dette projekt tidligt fravalgt en matematisk beregnet terrænoverflade som reference for MTA-modellens uddata. Ikke desto mindre kunne vi med en sådan matematisk flade foretage visse analyser med en større sikkerhed. Vi ville selvsagt vide præcist hvordan den modellerede terrænoverflade så ud som inddata, og skulle se ud som uddata.

Analyse af modelleringen af krumninger Med inddata som beskrevet i forrige punkt vil vi kunne foretage en langt bedre modellering af et terræns første og anden afledte, og vurdere værdi og usikkerhed deraf.

Brugen af andre datatyper Vi har tidligere beskrevet hvordan forhåndsviden om terrænforhold stiller krav i interpolationsprocessen om kontinuitet og differentiabilitet. For andre typer data, fx jordboringsdata ville måske helt andre krav kunne formuleres til hvordan en interpolation skulle håndtere de diskrete måledata.

Gitterkonstruktionerne i en grundigere analyse En specialundersøgelse (af ovenstående) kunne være at undersøge gitterkonstruktionen særligt nøje. Vi fik i kapitel 3 et billede af de endog store forskelle i de konstruerede gitre på samme datapunkter. Det er oplagt at afklare forudsætninger for og forskellene i disse metoder, forud for anvendelsen af en digital terrænmodel.

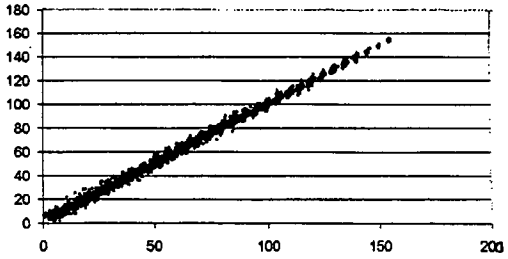
Andre interpolationsmetoder Vi har nævnt at valget af de bivariable splines ikke er naturligt forbundet i forståelsen af de fysiske processer. Det ville derfor være interessant at undersøge andre metoder. Et eksempel kunne være de geostatistiske metoder.

Behandlingen af andre typer informationsrige data Vi ville gerne teste videre og undersøge hvordan MTA-modellen behandler de forskellige typer af

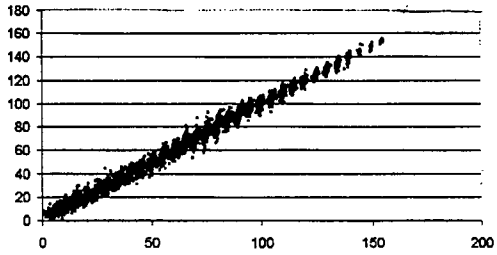
informationsrige inddata, 'planar areas', 'pits', 'breaklines', etc. Det kunne forhåbentlig give en bedre forståelse for mulighederne for at manipulere med Delaunay-triangulationen.

Appendiks A

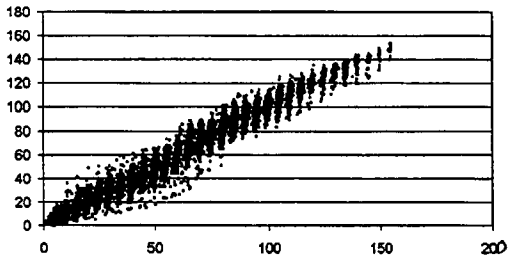
Scatterplot i lind strøm



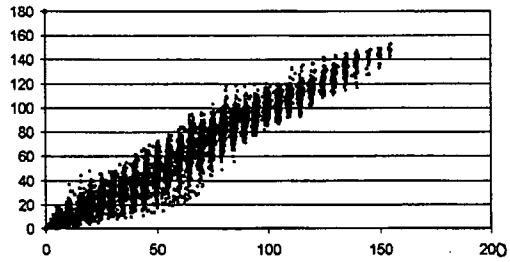
Figur A.1 DTM højdekurver plottet mod DTM B.



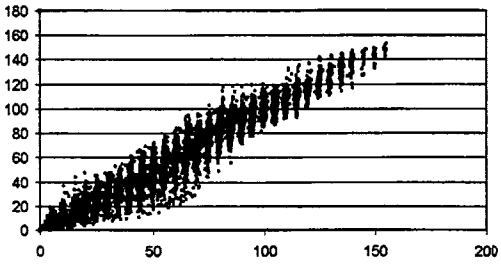
Figur A.2 DTM højdekurver plottet mod DTM C.



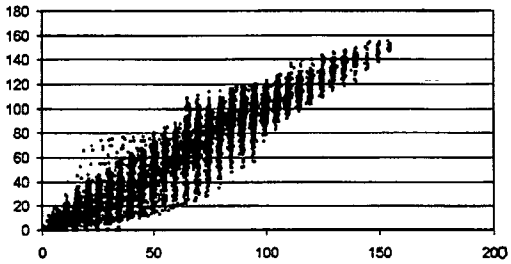
Figur A.3 DTM højdekurver plottet mod DTM D.



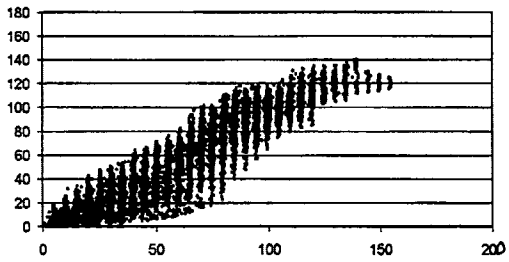
Figur A.4 DTM højdekurver plottet mod DTM E.



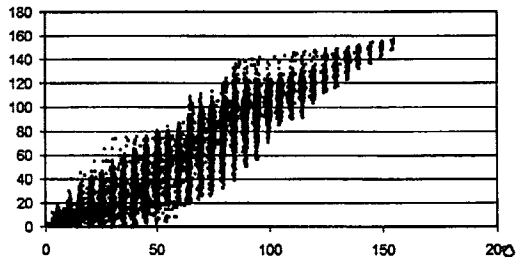
Figur A.5 DTM højdekurver plottet mod DTM F.



Figur A.6 DTM højdekurver plottet mod DTM G.



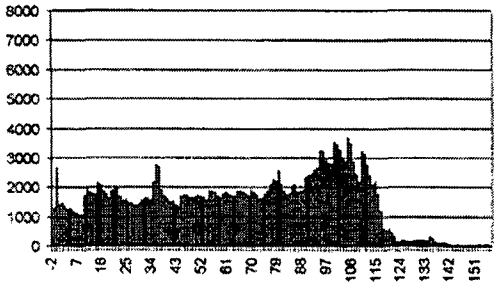
Figur A.7 DTM højdekurver plottet mod DTM H.



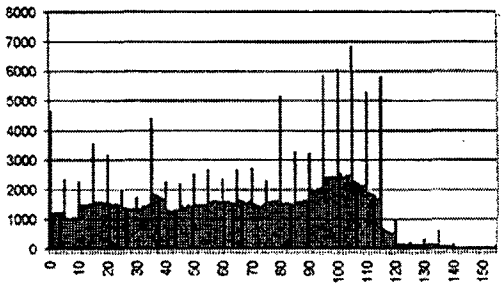
Figur A.8 DTM højdekurver plottet mod DTM I.

Appendiks B

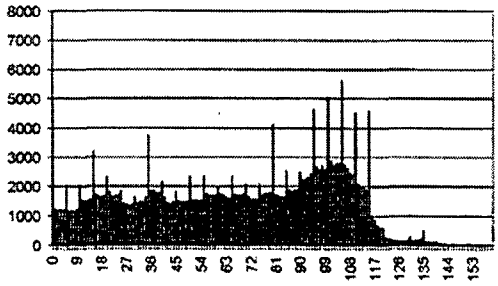
Histogrammer i lind strøm



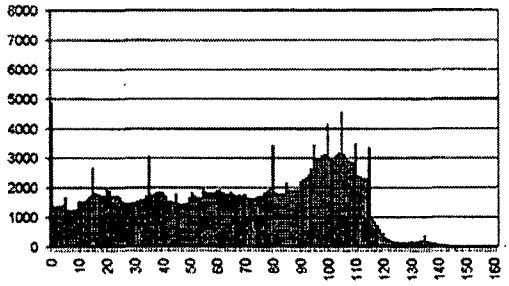
Figur B.1 DTM højdekurver.



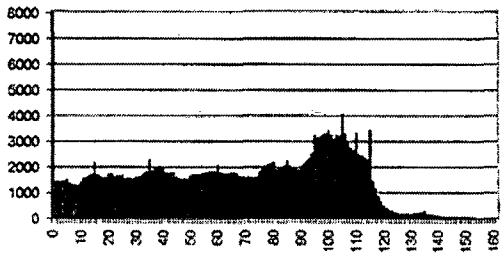
Figur B.2 DTM B.



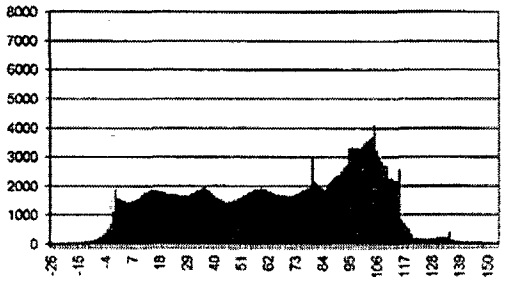
Figur B.3 DTM C.



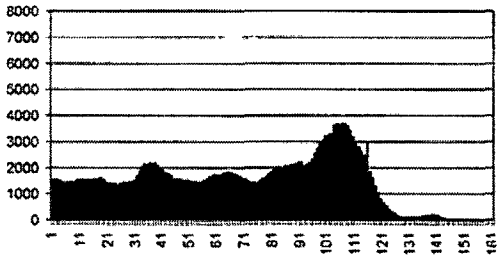
Figur B.4 DTM D.



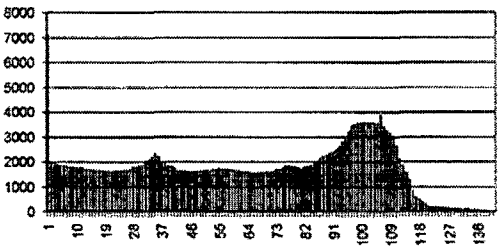
Figur B.5 DTM E.



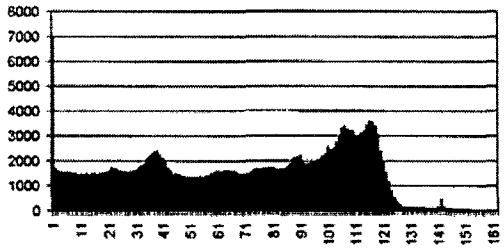
Figur B.6 DTM F.



Figur B.7 DTM G.



Figur B.8 DTM H.



Figur B.9 DTM I.

Litteratur

[Bailey & Gatrell 1995] BAILEY, TREVOR C & ANTHONY C. GATRELL
Interactive Spatial Data Analysis.
Longman Scientific & Technical, Essex, England, 1995.

[Batschelet 1981] BATSCHELET, EDWARD
Circular Statistics in Biology. Academic press, London, England, 1981.

[Berry & Marble 1968] BERRY, BRIAN J. L. & DUANE F. MARBLE (eds.)
Spatial Analysis - A Reader in Statistical Geography.
Prentice-Hall Inc., New Jersey, USA, 1968.

[Boots 1988] BOOTS, B.N.
Voronoi (Thiessen) polygons.
CATMOG 45, Geobooks, Norwich, England, 1988.

[Bower & Newton 1993] BOWER, STEVEN T. & CARLETON M. NEWTON
Boundary problem for Triangular Irregular Networks.
Cartography an geographical information systems, **20**(4), American congress on surveying and mapping, Maryland, USA, 1993.

[Brask 1995] BRASK, OLE H. (ed.)
GIS i teori og praksis - GIS-kursus efterår 1995, *Kompendium nr. 81.*
Publikationer fra Institut for Geografi og Internationale Udviklingsstudier, Roskilde Universitetscenter, Danmark, 1995.

[Burrough 1986] BURROUGH, PETER A.
Principles of Geographical Information System for Land Resources Assessment.
Monographs on Soil and Resources survey, no. 12, Clarendon Press, Oxford, England, 1986.

[Burrough 1995] BURROUGH, PETER A.
Sampling Theory and Geostatistics - for Geographical Information Systems in Radio-Ecology.
Lecture material, Universiteit Utrecht, Holland, 1995.

[Chorley & Haggett 1967] CHORLEY, R. J. & PETER HAGGETT (eds.)
Models in Geography.
Methuen cop., London, England, 1967.

[Chorley 1968] CHORLEY, R. J.
Geography and Analog Theory.
i BERRY & MARBLE 1968.

[Dierckx 1993] DIERCKX, PAUL
Curve and surface fitting with splines.
Oxford university Press, Oxford, England, 1993.

[Douglas 1986] DOUGLAS, DAVID H.
Experiments to locate Ridges and Channels to create a new type of Digital Elevation Models.
Cartographica **23**(4):39-61, Toronto, Canada, 1986.

[Hald 1948] HALD, A.
Statistiske metoder.
Akademisk forlag, København, Danmark, 1948.

[Jones 1997] JONES, CHRISTOPHER B.
Geographical Information Systems and computer cartography.
Addison Wesley Longman Limited, Harlow, England, 1997.

[Kampsax Geoplan 1996] KAMPSAX GEOPLAN
Danmarks Digitale Ortofoto, CD-ROM-præsentation, 1996
Kampsax Geoplan, Hvidovre, Danmark, 1996.

[Kort- og Matrikelstyrelsen 1992] KORT- OG MATRIKELSTYRELSEN
Det digitale topografiske Atlas over Danmark, VisitPlus vers. 2.3, ophavsret 1996, kortblad 1812, serie 1:100.000, Danmark, produktion 1992.

[Lam 1983] LAM, NINA S.- N.
Spatial Interpolation Methods: A review.
The Am. Cartographer **10**(2), American congress on surveying and mapping, Virginia, USA, 1983.

[Lancaster & Šalkauskas 1990] LANCASTER, PETER & KĘSTUTIS ŠALKAUSKAS
Curve and surface fitting – An introduction
Academic press ltd., London, England, 1990.

[Lowry 1968] LOWRY, IRA S.
A short Course in Model Design.
i BERRY & MARBLE 1968.

[Maling 1989] MALING, D. H.
Measurements from Maps: Principles & Methods of Cartometry.
Pergamon Press, Oxford, England, 1989.

[MGE-manualer] USER'S GUIDE & REFERENCE GUIDE SERIES FOR MGE
Manualer til MGE Terrain Analyst.
Intergraph, USA, 1991.

[Morgan 1995] MORGAN, R. P. C.
Soil Erosion & Conservation (2. ed.)
Longman, London, England, 1995.

[Wood 1996] WOOD, JOSEPH
The Geomorphological Characterisation of Digital Elevation Models.
pH.d Thesis, Leicester University, England, 1996.
http://www.geog.le.ac.uk/jwo/research/dem_char/thesis

[Woodbury 1998] WOODBURY, CHUCK
e-mail-korrespondance med konsulent hos Intergraph, USA.

Stikord

Dataformater
- (raster)-cellestørrelse 27
- rasterdata 5
- vektordata 5

Delaunay-triangulation 10
Digital terrænmodel 1
DTM 1, 2,
- anvendelser 2
- Dataformat 27

Flade-interpolation 18,
- 'Nearest neighbor' 20
- bivariable splines 19

GIS
- definition 2
- præsentation 4

Histogrammer 30, 39, 54

Inddata 25,
- højdekurver 25
- informationsrige datapunkter 26, 41
- regionalisering 7
- toppunkter 26
- usikkerhed 25

Konklusion 61
Konstruktion af gitter 8, 13,
- 'Convergent' 16
- 'Moving Weighted Average' 16
- 'Planar' 14
- 'Surface Trend' 15

Kontrolpunkter 28
Korrelation 28, 42

MGE 2
MTA 3
MTA-modellen
- definition 3
- karakterisering 31

Problemformulering 3

Robusthedstest 41,
- mængde af inddata 41
- støj i inddata 49

Samplinger 26
Scatterplot 28, 41, 51
Spline
- bikubisk 20
- bilineær 20
- bivariabel 19

Tendens-polynomium 15
Tesselation 7
Testmetoder 27,
- Rayleighs test 29, 57
- t-test 29, 43, 52
- u-test 29, 42

Thiessen-diagram 9
Thiessen-polygon 8,
- definition 8

TIN-model 7,
- problemer ved konceptet 33
- tredimensional model 10

Toppunkter
- anvendt som inddata 39
- lokalisering i terrænmodel 54

Triangulation 8, 33
- 'Densify TIN Fence' 12
- 'Infer Breaklines' 12

Troværdighedstest 51,
- hældninger 58
- højdeværdier 53

Vendelinier 12

Liste over tidligere udkomne tekster tilsendes gerne. Henvendelse herom kan ske til IMFUFA's sekretariat

tlf. 46 74 22 63

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen

223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson

224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre

225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor

226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"
by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ baseret på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og især deles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård
Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and
Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility
by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS
- Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse

Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1

af: Bent Sørensen

242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel

Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer

af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck

Vejleder: Jesper Larsen

243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN

Et 1.modul fysikprojekt

af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning

Projektrapport

af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen

Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen

245a+b /93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere
Specialerapport

af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade

Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen

246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK
- LÆREPROCESSER I SKOLEN

af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA

247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS

by: Jeppe C. Dyre

248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.

by: B. Booss-Bavnbek

With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist

250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV

Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

251/93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones

by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreasen and Ebbe Thue Poulsen

252/93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER

Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgaard, Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen

253/93 Kuglepakning

Teori og model

af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse

Vejleder: Mogens Niss

254/93 Regressionsanalyse

Materiale til et statistikkursus

af: Jørgen Larsen

255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED

af: Peter Harremoës

256/93 Determination of the Frequency Dependent Bulk Modulus of Liquids Using a Piezoelectric Spherical Shell (Preprint)

by: T. Christensen and N.B.Olsen

257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske keramikker

af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen, Christina Specht, Mikko Østergård

Vejleder: Tage Christensen

258/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"

af: Mogens Brun Heefelt

259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW TEMPERATURES

by: Jeppe C. Dyre

260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN DIMENSIONS 2, 3, AND 4

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

261/93 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i Fysik
Eksamensopgaver fra 1976-93

262/93 Separability and the Jones Polynomial
by: Lars Kadison

263/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" II
af: Mogens Brun Heefelt

264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2
af: Bent Sørensen

265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED SYMMETRIC SPACES
To Sigurdur Helgason on his sixtyfifth birthday
by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert and Gestur Olafsson

266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i laterale supergitre
Fysikspeciale af: Anja Boisen, Peter Bøggild, Karen Birkelund
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik Lindelof, Peder Voetmann Christiansen

267/94 Kom til kort med matematik på Eksperimentarium - Et forslag til en opstilling
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

268/94 Life is like a sewer ...
Et projekt om modellering af aorta via en model for strømning i kloakrør
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson, Lone Michelsen, Per M. Hansen
Vejleder: Jesper Larsen

269/94 Dimensionsanalyse en introduktion metaprojekt, fysik
af: Tine Guldager Christiansen, Ken Andersen, Nikolaj Hermann, Jannik Rasmussen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRESENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS
by: Jacob Jacobsen

271/94 Matematikken i Fysikken.
Opdaget eller opfundet
NAT-BAS-projekt
vejleder: Jens Højgaard Jensen

272/94 Tradition og fornyelse
Det praktiske elevarbejde i gymnasiets fysikundervisning, 1907-1988
af: Kristian Hoppe og Jeppe Guldager
Vejledning: Karin Beyer og Nils Hybel

273/94 Model for kort- og mellemdistanceløb
Verifikation af model
af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann, Bettina Sørensen
Vejleder: Mette Olufsen

274/94 MODEL 10 - en matematisk model af intravenøse anæstetikas farmakokinetik
3. modul matematik, forår 1994
af: Trine Andreasen, Bjørn Christensen, Christine Green, Anja Skjoldborg Hansen. Lisbeth Helmgaard
Vejledere: Viggo Andreasen & Jesper Larsen

275/94 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht
2nd Edition
by: Bernhelm Booss-Bavnbek

276/94 Dispersionsmodellering
Projektrapport 1. modul
af: Gitte Andersen, Rehannah Borup, Lisbeth Friis, Per Gregersen, Kristina Vejrø
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

277/94 PROJEKTARBEJDSPÆDAGOGIK - Om tre tolkninger af problemorienteret projektarbejde
af: Claus Flensted Behrens, Frederik Voetmann Christiansen, Jørn Skov Hansen, Thomas Thingstrup
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

278/94 The Models Underlying the Anaesthesia Simulator Sophus
by: Mette Olufsen(Math-Tech), Finn Nielsen (RISØ National Laboratory), Per Føge Jensen (Herlev University Hospital), Stig Andur Pedersen (Roskilde University)

279/94 Description of a method of measuring the shear modulus of supercooled liquids and a comparison of their thermal and mechanical response functions.
af: Tage Christensen

280/94 A Course in Projective Geometry
by Lars Kadison and Matthias T. Kromann

281/94 Modellering af Det Cardiovaskulære System med Neural Pulskontrol
Projektrapport udarbejdet af:
Stefan Frello, Runa Ulsøe Johansen, Michael Poul Curt Hansen, Klaus Dahl Jensen
Vejleder: Viggo Andreasen

282/94 Parallelle algoritmer
af: Erwin Dan Nielsen, Jan Danielsen, Niels Bo Johansen

283/94 Grænser for tilfældighed
(en kaotisk talgenerator)

af: Erwin Dan Nielsen og Niels Bo Johansen

284/94 Det er ikke til at se det, hvis man ikke lige ve' det!
Gymnasiematematikkens begrundelsesproblem

En specialerapport af Peter Hauge Jensen og Linda Kyndlev

Vejleder: Mogens Niss

285/94 Slow coevolution of a viral pathogen and its diploid host

by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

286/94 The energy master equation: A low-temperature approximation to Bässler's random walk model

by: Jeppe C. Dyre

287/94 A Statistical Mechanical Approximation for the Calculation of Time Auto-Correlation Functions

by: Jeppe C. Dyre

288/95 PROGRESS IN WIND ENERGY UTILIZATION

by: Bent Sørensen

289/95 Universal Time-Dependence of the Mean-Square Displacement in Extremely Rugged Energy Landscapes with Equal Minima

by: Jeppe C. Dyre and Jacob Jacobsen

290/95 Modellering af uregelmæssige bølger
Et 3.modul matematik projekt

af: Anders Marcussen, Anne Charlotte Nilsson, Lone Michelsen, Per Mørkegaard Hansen

Vejleder: Jesper Larsen

291/95 1st Annual Report from the project
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
an example of using methods developed for the OECD/IEA and the US/EU fuel cycle externality study

by: Bent Sørensen

292/95 Fotovoltaisk Statusnotat 3

af: Bent Sørensen

293/95 Geometridiskussionen - hvor blev den af?

af: Lotte Ludvigsen & Jens Frandsen

Vejleder: Anders Madsen

294/95 Universets udvidelse - et metaprojekt

Af: Jesper Duelund og Birthe Friis

Vejleder: Ib Lundgaard Rasmussen

295/95 A Review of Mathematical Modeling of the Controled Cardiovascular System

By: Johnny T. Ottesen

296/95 RETIKULER den klassiske mekanik

af: Peder Voetmann Christiansen

297/95 A fluid-dynamical model of the aorta with bifurcations

by: Mette Olufsen and Johnny Ottesen

298/95 Mordet på Schrödingers kat - et metaprojekt om to fortolkninger af kvantemekanikken

af: Maria Hermannsson, Sebastian Horst, Christina Specht

Vejledere: Jeppe Dyre og Peder Voetmann Christiansen

299/95 ADAM under figenbladet - et kig på en samfundsvidenskabelig matematisk model

Et matematisk modelprojekt

af: Claus Dræby, Michael Hansen, Tomas Højgård Jensen

Vejleder: Jørgen Larsen

300/95 Scenarios for Greenhouse Warming Mitigation

by: Bent Sørensen

301/95 TOK Modellering af træers vækst under påvirkning af ozon

af: Glenn Møller-Holst, Marina Johannessen, Birthe Nielsen og Bettina Sørensen

Vejleder: Jesper Larsen

302/95 KOMPRESSORER - Analyse af en matematisk model for aksialkompressorer

Projektrapport af: Stine Bøggild, Jakob Hilmer, Pernille Postgaard

Vejleder: Viggo Andreasen

303/95 Masterlignings-modeller af Glasovergangen
Termisk-Mekanisk Relaksation
Specialerapport udarbejdet af:

Johannes K. Nielsen, Klaus Dahl Jensen

Vejledere: Jeppe C. Dyre, Jørgen Larsen

304a/95 STATISTIKNOTER Simple binomialfordelingsmodeller

af: Jørgen Larsen

304b/95 STATISTIKNOTER Simple normalfordelingsmodeller

af: Jørgen Larsen

304c/95 STATISTIKNOTER Simple Poissonfordelingsmodeller

af: Jørgen Larsen

304d/95 STATISTIKNOTER Simple multinomialfordelingsmodeller

af: Jørgen Larsen

304e/95 STATISTIKNOTER Mindre matematisk-statistisk opslagsværk indeholdende bl.a. ordforklaringer, resuméer og tabeller

af: Jørgen Larsen

305/95 The Maslov Index:
A Functional Analytical Definition
And The Spectral Flow Formula

By: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani

306/95 Goals of mathematics teaching

Preprint of a chapter for the forthcomming International Handbook of Mathematics Education (Alan J.Bishop, ed)

By: Mogens Niss

307/95 Habit Formation and the Thirdness of Signs

Presented at the semiotic symposium

The Emergence of Codes and Intensions as a Basis of Sign Processes

By: Peder Voetmann Christiansen

308/95 Metaforer i Fysikken

af: Marianne Wilcken Bjerregaard, Frederik Voetmann Christiansen, Jørn Skov Hansen, Klaus Dahl Jensen Ole Schmidt

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og Petr Viscor

309/95 Tiden og Tanken
En undersøgelse af begrebsverdenen Matematik udført ved hjælp af en analogi med tid

af: Anita Stark og Randi Petersen

Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

310/96 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)

af: Mogens Brun Heefelt

311/96 2nd Annual Report from the project
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM

by: Hélène Connor-Lajambe, Bernd Kuemmel, Stefan Krüger Nielsen, Bent Sørensen

312/96 Grassmannian and Chiral Anomaly

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

313/96 THE IRREDUCIBILITY OF CHANCE AND THE OPENNESS OF THE FUTURE
The Logical Function of Idealism in Peirce's Philosophy of Nature

By: Helmut Pape, University of Hannover

314/96 Feedback Regulation of Mammalian Cardiovascular System

By: Johnny T. Ottesen

315/96 a + b "Rejsen til tidens indre" - Udarbejdelse af et manuskript til en fjernsynsudsendelse + manuskript

af: Gunhild Hune og Karina Goyle

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og Bruno Ingemann

316/96 Plasmaoscillation i natriumklynger

Specialerapport af: Peter Meibom, Mikko Østergård

Vejledere: Jeppe Dyre & Jørn Borggreen

317/96 Poincaré og symplektiske algoritmer

af: Ulla Rasmussen

Vejleder: Anders Madsen

318/96 Modelling the Respiratory System

by: Tine Guldager Christiansen, Claus Dræby

Supervisors: Viggo Andreasen, Michael Danielsen

319/96 Externality Estimation of Greenhouse Warming Impacts

by: Bent Sørensen

320/96 Grassmannian and Boundary Contribution to the -Determinant

by: K.P.Wojciechowski et al.

321/96 Modelkompetencer - udvikling og afprøvning af et begrebsapparat

Specialerapport af: Nina Skov Hansen, Christine Iversen, Kristin Troels-Smith

Vejleder: Morten Blomhøj

322/96 OPGAVESAMLING
Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1996

323/96 Structure and Dynamics of Symmetric Diblock Copolymers
PhD Thesis

by: Christine Maria Papadakis

324/96 Non-linearity of Baroreceptor Nerves

by: Johnny T. Ottesen

325/96 Retorik eller realitet ?
Anvendelser af matematik i det danske Gymnasiums matematikundervisning i perioden 1903 - 88

Specialerapport af Helle Pilemann

Vejleder: Mogens Niss

326/96 Bevisteori
Eksemplificeret ved Gentzens bevis for konsistensen af teorien om de naturlige tal

af: Gitte Andersen, Lise Mariane Jeppesen, Klaus Frovin Jørgensen, Ivar Peter Zeck

Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og Stig Andur Pedersen

327/96 NON-LINEAR MODELLING OF INTEGRATED ENERGY SUPPLY AND DEMAND MATCHING SYSTEMS

by: Bent Sørensen

328/96 Calculating Fuel Transport Emissions

by: Bernd Kuemmel

329/96 The dynamics of cocirculating influenza strains conferring partial cross-immunity

and

A model of influenza A drift evolution

by: Viggo Andreasen, Juan Lin and Simon Levin

330/96 LONG-TERM INTEGRATION OF PHOTOVOLTAICS INTO THE GLOBAL ENERGY SYSTEM

by: Bent Sørensen

331/96 Viskøse fingre

Specialerapport af:

Vibeke Orlien og Christina Specht

Vejledere: Jacob M. Jacobsen og Jesper Larsen

332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG

Specialerapport af:

Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

333/97 Biodiversity Matters

an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity

by: Bernd Kuemmel

334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM

by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen

335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids

by: Jeppe C. Dyre

336/97 PROBLEM-ORIENTATED GROUP PROJECT WORK AT ROSKILDE UNIVERSITY

by: Kathrine Legge

337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose - et projekt om matematisk modellering

af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen

Vejleder: Jørgen Larsen

338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne

Første modul fysikprojekt

af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss, Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup

Vejleder: Tage Christensen

339/97 Defining Discipline

by: Wolfgang Coy

340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -

by: Carsten Lunde Petersen

341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry

by Mogens Niss

342/97 LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND AND SUPPLY

A global clean fossil scenario discussion paper prepared by Bernd Kuemmel

Project leader: Bent Sørensen

343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG

af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

344/97 Puzzles and Siegel disks

by Carsten Lunde Petersen

345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anestesia Simulator

Ph.D. Thesis

by: Mette Sofie Olufsen

346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces

af: Sebastian Horst

Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen

347/98 Verificering af Matematiske Modeller - en analyse af Den Danske Eulerske Model

af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschlæger

Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact assessment for power plants in Denmark

by: Stefan Krüger Nielsen

Project leader: Bent Sørensen

349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i arbejdsmarkedsuddannelserne

af: Lena Lindenskov og Tine Wedege

350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998

Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96

351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education

by: Mogens Niss

352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications

by: Carsten Lunde Petersen

353/98 Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning

Specialerapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen

Vejleder: Morten Blomhøj

354/98 A GLOBAL RENEWABLE ENERGY SCENARIO

by: Bent Sørensen and Peter Meibom

355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces

by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd