

## **Sandsynlighedsregning og Statistik for matematikstuderende**

Larsen, Jørgen

*Publication date:*  
2006

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

*Citation for published version (APA):*  
Larsen, J. (2006). *Sandsynlighedsregning og Statistik for matematikstuderende*. Roskilde Universitet. Tekster fra IMFUFA Nr. 452

### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain.
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact [rucforsk@kb.dk](mailto:rucforsk@kb.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

JØRGEN LARSEN

SANDSYNLIGHEDSREGNING  
&  
STATISTIK

FOR MATEMATIKSTUDERENDE

2006



# Indhold

|                                                                                                            |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Forord</b>                                                                                              | <b>5</b>  |
| <b>Del I Sandsynlighedsregning</b>                                                                         | <b>7</b>  |
| <b>Indledning</b>                                                                                          | <b>9</b>  |
| <b>1 Endelige udfaldsrum</b>                                                                               | <b>11</b> |
| 1.1 Grundlæggende definitioner . . . . .                                                                   | 11        |
| <i>Punktsandsynligheder 13, Betingede sandsynligheder og fordelinger 14, Uafhængighed 16</i>               |           |
| 1.2 Stokastiske variable . . . . .                                                                         | 18        |
| <i>Uafhængige stokastiske variable 23, Funktioner af stokastiske variable 25, Fordelingen af en sum 25</i> |           |
| 1.3 Eksempler . . . . .                                                                                    | 26        |
| 1.4 Middelværdi . . . . .                                                                                  | 29        |
| <i>Vars og kovarians 34, Eksempler 37, Store Tals Lov 37</i>                                               |           |
| 1.5 Opgaver . . . . .                                                                                      | 38        |
| <b>2 Tællelige udfaldsrum</b>                                                                              | <b>43</b> |
| 2.1 Grundlæggende definitioner . . . . .                                                                   | 43        |
| <i>Punktsandsynligheder 44, Betingning, uafhængighed 45, Stokastiske variable 45</i>                       |           |
| 2.2 Middelværdi . . . . .                                                                                  | 46        |
| <i>Vars og kovarians 48</i>                                                                                |           |
| 2.3 Eksempler . . . . .                                                                                    | 49        |
| <i>Den geometriske fordeling 49, Den negative binomialfordeling 51, Poissonfordelingen 52</i>              |           |
| 2.4 Opgaver . . . . .                                                                                      | 55        |
| <b>3 Kontinuerte fordelinger</b>                                                                           | <b>57</b> |
| 3.1 Grundlæggende definitioner . . . . .                                                                   | 57        |
| <i>Transformation af fordelinger 59, Betingning 61</i>                                                     |           |
| 3.2 Middelværdi . . . . .                                                                                  | 62        |
| 3.3 Eksempler . . . . .                                                                                    | 62        |

|               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |            |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|               | <i>Ekspontialfordelingen 62, Gammafordelingen 63, Cauchyfordelingen 65, Normalfordelingen 65</i>                                                                                                                                                                                                                                                                               |            |
| 3.4           | Opgaver . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 68         |
| <b>4</b>      | <b>Frembringende funktioner</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <b>71</b>  |
| 4.1           | Grundlæggende egenskaber . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 71         |
| 4.2           | Sum af et stokastisk antal stokastiske variable . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 74         |
| 4.3           | Forgreningsprocesser . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 76         |
| 4.4           | Opgaver . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 79         |
| <b>5</b>      | <b>Generel teori</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>81</b>  |
| 5.1           | Hvorfor generalisere og aksiomatisere? . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 83         |
| <b>Del II</b> | <b>Statistik</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <b>87</b>  |
|               | <b>Indledning</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>89</b>  |
| <b>6</b>      | <b>Den statistiske model</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>91</b>  |
| 6.1           | Eksempler . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 92         |
|               | <i>Enstikprøveproblemet for 01-variable 92, Den simple binomialfordelingsmodel 92, Enstikprøveproblemet i binomialfordelingen 93, Multinomialfordelingen 95, Enstikprøveproblemet i poissonfordelingen 96, Ligefordeling på et interval 97, Enstikprøveproblemet i normalfordelingen 98, Tostikprøveproblemet i normalfordelingen 99, Simpel lineær regression 100</i>         |            |
| 6.2           | Opgaver . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 102        |
| <b>7</b>      | <b>Estimation</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>103</b> |
| 7.1           | Maksimaliseringsestimatoren . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 103        |
| 7.2           | Eksempler . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 105        |
|               | <i>Enstikprøveproblemet for 01-variable 105, Den simple binomialfordelingsmodel 105, Enstikprøveproblemet i binomialfordelingen 106, Multinomialfordelingen 107, Enstikprøveproblemet i poissonfordelingen 107, Ligefordeling på et interval 108, Enstikprøveproblemet i normalfordelingen 108, Tostikprøveproblemet i normalfordelingen 109, Simpel lineær regression 110</i> |            |
| 7.3           | Opgaver . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 112        |
| <b>8</b>      | <b>Hypoteseprøvning</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>115</b> |
| 8.1           | Kvotienttestet . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 115        |
| 8.2           | Eksempler . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 116        |
|               | <i>Enstikprøveproblemet for 01-variable 116, Den simple binomialfordelingsmodel 117, Enstikprøveproblemet i binomialfordelingen 118,</i>                                                                                                                                                                                                                                       |            |

|           |                                                                                                                                                                                                                                                   |            |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|           | <i>Multinomialfordelingen 120, Enstikprøveproblemet i normalfordelingen 120, Tostikprøveproblemet i normalfordelingen 122</i>                                                                                                                     |            |
| 8.3       | Opgaver . . . . .                                                                                                                                                                                                                                 | 124        |
| <b>9</b>  | <b>Nogle eksempler</b>                                                                                                                                                                                                                            | <b>127</b> |
| 9.1       | Rismelsbiller . . . . .                                                                                                                                                                                                                           | 127        |
|           | <i>Grundmodellen 127, En dosis-respons model 129, Estimation 130, Modelkontrol 131, Hypoteser om parametrene 132</i>                                                                                                                              |            |
| 9.2       | Lungekræft i Fredericia . . . . .                                                                                                                                                                                                                 | 134        |
|           | <i>Situationen 134, Modelopstilling 135, Estimation i den multiplikative model 136, Den multiplikative models beskrivelse af data 138, Ens byer? 139, En anden mulighed 140, Sammenligning af de to fremgangsmåder 143, Om teststørrelser 144</i> |            |
| 9.3       | Ulykker på en granatfabrik . . . . .                                                                                                                                                                                                              | 144        |
|           | <i>Situationen 144, Model 1 145, Model 2 145</i>                                                                                                                                                                                                  |            |
| <b>10</b> | <b>Den flerdimensionale normalfordeling</b>                                                                                                                                                                                                       | <b>149</b> |
| 10.1      | Flerdimensionale stokastiske variable . . . . .                                                                                                                                                                                                   | 149        |
| 10.2      | Definition og egenskaber . . . . .                                                                                                                                                                                                                | 150        |
| 10.3      | Opgaver . . . . .                                                                                                                                                                                                                                 | 154        |
| <b>11</b> | <b>Lineære normale modeller</b>                                                                                                                                                                                                                   | <b>157</b> |
| 11.1      | Estimation og test, generelt . . . . .                                                                                                                                                                                                            | 157        |
|           | <i>Estimation 157, Test af hypotese om middelværdien 158</i>                                                                                                                                                                                      |            |
| 11.2      | Enstikprøveproblemet . . . . .                                                                                                                                                                                                                    | 159        |
| 11.3      | Ensidet variansanalyse . . . . .                                                                                                                                                                                                                  | 160        |
| 11.4      | Bartlett's test for varianshomogenitet . . . . .                                                                                                                                                                                                  | 162        |
| 11.5      | Tosidet variansanalyse . . . . .                                                                                                                                                                                                                  | 164        |
|           | <i>Sammenhængende modeller 166, Projektionen på <math>L_0</math> 167, Test af hypoteser 168, Et eksempel 169</i>                                                                                                                                  |            |
| 11.6      | Regressionsanalyse . . . . .                                                                                                                                                                                                                      | 172        |
|           | <i>Formulering af modellen 173, Estimation af parametrene 174, Hypoteseprovning 176, Om faktorer 176, Et eksempel 177</i>                                                                                                                         |            |
| 11.7      | Opgaver . . . . .                                                                                                                                                                                                                                 | 178        |
| <b>A</b>  | <b>En udledning af normalfordelingen</b>                                                                                                                                                                                                          | <b>181</b> |
| <b>B</b>  | <b>Nogle resultater fra lineær algebra</b>                                                                                                                                                                                                        | <b>185</b> |
| <b>C</b>  | <b>Tabeller</b>                                                                                                                                                                                                                                   | <b>189</b> |
| <b>D</b>  | <b>Ordlistor</b>                                                                                                                                                                                                                                  | <b>197</b> |
|           | <b>Litteraturhenvisninger</b>                                                                                                                                                                                                                     | <b>201</b> |
|           | <b>Alfabetisk register</b>                                                                                                                                                                                                                        | <b>203</b> |



## Forord

SANDSYNLIGHEDSREGNING OG STATISTIK er to emneområder der dels studeres på deres egne betingelser, dels optræder som støttefag eller hjælpefag i en række sammenhænge, og den måde man bør formidle fagenes indhold på, afhænger i høj grad af hvem der er målgruppen. Denne bog er ikke skrevet til personer der specialiserer sig i sandsynlighedsregning og/eller statistik, og heller ikke til personer der har brug for statistik som støttefag, men derimod til personer der som led i en generel matematikuddannelse skal vide noget om sandsynlighedsregning og statistik. – Forskellige udkast til bogen har i en årrække været anvendt på RUCs matematikuddannelse.

Ved tilrettelæggelsen af undervisningsforløb der introducerer til sandsynlighedsregning, er det et stadigt tilbagevendende spørgsmål hvor meget (eller måske snarere hvor lidt) vægt man skal lægge på en generel aksiomatisk fremstilling. Hvis der er tale om en almen introduktion der henvender sig til en ikke nødvendigvis matematisk interesseret eller kvalificeret målgruppe, er der ikke så meget at være i tvivl om – den målteoretiske aksiomatisering à la Kolmogorov skal ikke med, eller den kan måske blive nævnt i en diskret fodnote. Men når der er tale om en del af en matematikuddannelse, stiller sagen sig anderledes; her kan der være en god pointe i at studere hvordan den almindeligvis »genstandsløse« matematikformalisme fungerer når man ønsker at etablere et sæt byggesten til en helt bestemt slags modelleringsopgaver (modellering af tilfældighedsfænomener), og det kan derfor være på sin plads at beskæftige sig med fundamentet for den matematiske teoribygning.

Sandsynlighedsregning er afgjort en matematikdisciplin, og statistik må siges at være overordentlig matematik-involveret. Men begge emneområder er, hvad angår deres matematikindhold, organiseret væsentlig anderledes end »almindelige« matematiske emneområder (i hvert fald dem som normalt indgår i undervisningsprogrammer), fordi de i overvejende grad er styret/reguleret af at de skal kunne bestemme ting, f.eks. bevise Store tals Lov og Den centrale Grænseværdisætning, og kun i mindre grad af de gældende internt matematiske normer for hvordan teoriområder skal opbygges og præsenteres, og man vil eksempelvis gå fejl af mange pointer hvis man tror at sandsynlighedsregningen (den målteori-baserede sandsynlighedsregning) »bare« er et specialtilfælde af emneområdet mål- og integralteori. Endvidere vil den der skal sætte sig ind i emneområderne sandsynlighedsregning og statistik, hurtigt opleve at man skal benytte begreber, metoder og resultater fra vidt forskellige »traditionelle« matematikområder, og



dette er formentlig én grund til at sandsynlighedsregning og statistik opfattes som svært.

Fremstillingen er på traditionel vis delt op i en sandsynlighedsregningsdel og en statistikdel. De to dele er temmelig forskellige i stil og opbygning.

Del I præsenterer sandsynlighedsregningens grundlæggende begrebsdannelser og tankegange og de sædvanlige eksempler, men sådan at stofmængden holdes i meget stramme tøjler. Først vises hvordan sandsynlighedsregning i Kolmogorovs aksiomatisering ser ud når man holder sig til endelige udfaldsrum – derved holdes mængden af matematiske besværligheder på et minimum uden at man behøver give afkald på at kunne bevise de formulerede sætninger ved hjælp af det givne teoriapparat. Derefter udvides teorien til tællelige udfaldsrum, eller i hvert fald til udfaldsrummet  $\mathbb{N}_0$  forsynet med  $\sigma$ -algebraen af alle delmængder; her er det stadig muligt at bevise »alle sætninger«, selv med et beskedent matematisk apparatur (det forventes at læseren har kendskab til teorien for uendelige rækker), men man får dog indblik i nogle af vanskelighederne ved uendelige udfaldsrum. Den formalistiske aksiomatiske tilgang fortsættes imidlertid ikke i kapitlet om kontinuerte fordelinger på  $\mathbb{R}$  og  $\mathbb{R}^n$ , dvs. fordelinger som har en tæthedsfunktion, og nu er der ikke længere tale om at alle påstande bevises (blandt andet ikke sætningen om transformation af tætheder, der snarere bør bevises i et analysekursus). Del I afsluttes med to lidt anderledes kapitler, dels et kapitel der behandler et mere afgrænset område, nemlig frembringende funktioner (inklusive lidt om forgreningsprocesser), dels et kapitel der kort giver nogle antydninger af hvordan og hvorfor man beskæftiger sig med sandsynlighedsmål på generelle udfaldsrum.

Del II præsenterer den klassiske matematiske statistik baseret på likelihood-funktionen: de statistiske modeller er bygget op af almindelige standardfordelinger og et beskedent antal parametre, estimatorerne er som hovedregel maksimaliseringsestimater, og hypoteserne testes med likelihoodkvotienttests. Fremstillingen er bygget op med et kapitel om begrebet statistisk model, et kapitel om estimation og et kapitel om hypoteseprøvning; disse kapitler er forsynet med en række eksempler der viser hvordan teorien tager sig ud når den anvendes på bestemte modeltyper eller modeller, og eksemplerne fortsætter ofte fra det ene kapitel til det andet. Efter denne teoriorganiserede fremstilling følger et eksempelorienteret kapitel med tre større gennemregnede eksempler der illustrerer den generelle teori. Del II afsluttes med en introduktion til teorien for lineære normale modeller formuleret i lineær algebra-sprog, i god overensstemmelse med en henved 40-årig tradition inden for dansk matematisk statistik.

Roskilde i august 2006

Jørgen Larsen

**Del I**

## **Sandsynlighedsregning**



## Indledning

SANDSYNLIGHEDSREGNING er en disciplin der beskæftiger sig med en matematisk formalisering af dagligdagsbegreberne sandsynlighed og tilfældighed og dertil knyttede delbegreber. I første omgang kan man måske studse over at der overhovedet skulle kunne gives en matematisk formalisering af tilfældighed: hvis noget er tilfældigt, er det så netop ikke unddraget muligheden for en eksakt beskrivelse? Ikke ganske. Erfaringen viser at i hvert fald nogle typer af tilfældighedsfænomener og tilfældighedseksperimenter udviser betydelige grader af regelmæssighed når man gentager dem et stort antal gange, det gælder f.eks. kast med terninger og mønter, roulettespil og andre former for »lykkespil«. For at kunne tale nærmere om tingene er vi nødt til at indføre forskellige begreber og betegnelser; i første omgang er de lidt upræcise, men senere vil de få en præcis matematisk betydning (som forhåbentlig ikke er alt for fjern fra dagligsprogets).

Tilfældighedseksperimentet giver når det udføres, et resultat af en slags, f.eks. resulterer terningkastet i at terningen viser et bestemt antal øjne; et sådant resultat kaldes et *udfald*. Mængden af mulige udfald kaldes *udfaldsrummet*.

*Sandsynligheder* er reelle tal der giver en kvantitativ beskrivelse af visse træk ved tilfældighedseksperimentet. Et simpelt eksempel på et sandsynlighedsudsagn kunne være »sandsynligheden for at terningkastet giver udfaldet fem øjne er  $\frac{1}{6}$ «; et andet eksempel kunne være »sandsynligheden for at det bliver snevejr juleaften er  $\frac{1}{20}$ «. Hvad betyder sådanne udsagn? Nogle mennesker hævder at sandsynlighedsudsagn skal fortolkes som udsagn der beskriver forudsigelser om udfaldet af et bestemt fremtidigt fænomen (f.eks. snevejr juleaften). Andre mener at sandsynlighedsudsagn beskriver den relative hyppighed hvormed det pågældende udfald indtræffer når tilfældighedseksperimentet (f.eks. terningkastet) gentages igen og igen. Den måde som sandsynlighedsregningen formaliseres/aksiomatiseres på, er i høj grad inspireret af at sandsynlighed skal kunne fortolkes som *relativ hyppighed i det lange løb*, men den er ikke bundet til denne bestemte fortolkning.

Sandsynlighedsregningen benytter sig af den simple mængdelæres notationer og begreber – dog med visse ændrede betegnelser, jf. oversigten på næste side. En *sandsynlighed* eller mere præcist et *sandsynlighedsmaal* vil blive defineret som en afbildning fra en vis definitions-mængde ind i de reelle tal. Hvad definitions-mængden skal være, er måske ikke ganske klart; eller rettere, i første omgang ville man jo nok tro at den ganske enkelt skulle være udfaldsrummet, men det giver problemer i situationer hvor udfaldsrummet er overtælleligt (f.eks. de reelle tal). Det har vist sig at den rigtige måde at gøre tingene på, er at tale om sandsynlighe-

Oversigt over forskellige begreber fra mængdelæren og deres betegnelse inden for sandsynlighedsregningen.

| Typisk notation | Sandsynlighedsregning             | Mængdelære                                                 |
|-----------------|-----------------------------------|------------------------------------------------------------|
| $\Omega$        | udfaldsrum;<br>den sikre hændelse | grundmængde, univers                                       |
| $\emptyset$     | den umulige hændelse              | den tomme mængde                                           |
| $\omega$        | udfald                            | element i $\Omega$                                         |
| $A$             | hændelse                          | delmængde af $\Omega$                                      |
| $A \cap B$      | både $A$ og $B$                   | fællesmængden af $A$ og $B$                                |
| $A \cup B$      | enten $A$ eller $B$               | foreningsmængden af $A$ og $B$                             |
| $A \setminus B$ | $A$ men ikke $B$                  | differensmængde                                            |
| $A^c$           | den modsatte hændelse til $A$     | komplementærmængden til $A$ ,<br>dvs. $\Omega \setminus A$ |

der for *hændelser*, dvs. visse nærmere fastlagte delmængder af udfaldsrummet. Et sandsynlighedsmål bliver derfor en afbildning der til visse delmængder af udfaldsrummet knytter et reelt tal.

# 1 Endelige udfaldsrum

I DETTE KAPITEL vil vi studere sandsynligheder på endelige udfaldsrum. Det vil foregå på den måde at vi præsenterer de generelle definitioner, men forsimplet til det endelige tilfælde. I forbindelse med mere generelle udfaldsrum dukker der forskellige matematiske besværligheder op som man i det endelige tilfælde helt slipper for.

## 1.1 Grundlæggende definitioner

DEFINITION 1.1: SANDSYNLIGHEDSRUM OVER EN ENDELIG MÆNGDE

Et sandsynlighedsrum over en endelig mængde er et triple  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  bestående af

1. et udfaldsrum  $\Omega$  som er en ikke-tom, endelig mængde,
2. mængden  $\mathcal{F}$  af alle delmængder af  $\Omega$ ,
3. et sandsynlighedsmål på  $(\Omega, \mathcal{F})$ , dvs. en afbildning  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  som er
  - positiv:  $P(A) \geq 0$  for alle  $A \in \mathcal{F}$ ,
  - normeret:  $P(\Omega) = 1$ , og
  - additiv: hvis  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  er parvis disjunkte hændelser, så er

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Her er to simple eksempler, der i øvrigt også kan bruges til at demonstrere at der faktisk findes matematiske objekter der opfylder definitionen:

*Eksempel 1.1: Ligefordeling*

Lad  $\Omega$  være en endelig mængde med  $n$  elementer,  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , lad  $\mathcal{F}$  være mængden af delmængder af  $\Omega$ , og lad  $P$  være givet ved  $P(A) = \frac{1}{n} \#A$ , hvor  $\#A$  står for »antal elementer i  $A$ «. Så opfylder  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  betingelserne for at være et sandsynlighedsrum (additiviteten følger af additiviteten af antalsfunktionen). Dette sandsynlighedsmål hedder *ligefordelingen* på  $\Omega$  (fordi det fordeler »sandsynlighedsmassen« ligeligt ud over udfaldsrummet).

*Eksempel 1.2: Etpunktsfordeling*

Lad  $\Omega$  være en endelig mængde, og lad  $\omega_0 \in \Omega$  være et udvalgt punkt. Lad  $\mathcal{F}$  være mængden af delmængder af  $\Omega$ , og sæt  $P(A) = 1$  hvis  $\omega_0 \in A$  og  $P(A) = 0$  ellers. Så opfylder  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  betingelserne for at være et sandsynlighedsrum. Sandsynlighedsmålet hedder *etpunktsfordelingen* i  $\omega_0$  (fordi det placerer al sandsynlighedsmassen i dette ene punkt).

Vi går straks i gang med at vise nogle resultater:

LEMMA 1.1

For vilkårlige hændelser  $A$  og  $B$  i sandsynlighedsrummet  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  gælder:

1.  $P(A) + P(A^c) = 1$ .
2.  $P(\emptyset) = 0$ .
3. Hvis  $A \subseteq B$ , så er  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$  og dermed  $P(A) \leq P(B)$ .  
(Dette udtrykkes undertiden på den måde at man siger at  $P$  er voksende.)
4.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

BEVIS

Ad 1: De to hændelser  $A$  og  $A^c$  er disjunkte, og deres forening er  $\Omega$ ; derfor er ifølge additivitetsaksiomet  $P(A) + P(A^c) = P(\Omega)$ , og  $P(\Omega)$  er lig 1.

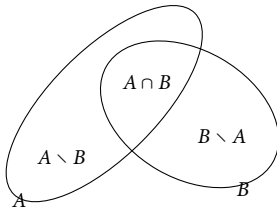
Ad 2: Da  $\emptyset = \Omega^c$ , er ifølge det netop viste  $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$ .

Ad 3: Hændelserne  $A$  og  $B \setminus A$  er disjunkte og deres forening er  $B$ ; derfor er  $P(A) + P(B \setminus A) = P(B)$ ; da  $P(B \setminus A) \geq 0$ , fås at  $P(A) \leq P(B)$ .

Ad 4: De tre hændelser  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  og  $A \cap B$  er parvis disjunkte og deres forening er  $A \cup B$ . Derfor er

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) \\ &= (P(A \setminus B) + P(A \cap B)) + (P(B \setminus A) + P(A \cap B)) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

□



I fremstillinger af sandsynlighedsregningen inddrager man altid møntkast og terningkast som eksempler på tilfældighedsfænomener, så det gør vi også her.

Eksempel 1.3: Møntkast

Antag at vi kaster én gang med en mønt og ser efter om den viser Plat eller Krone.

Udfaldsrummet er topunktsmængden  $\Omega = \{\text{Plat}, \text{Krone}\}$ . Mængden af hændelser er  $\mathcal{F} = \{\Omega, \{\text{Krone}\}, \{\text{Plat}\}, \emptyset\}$ . Det sandsynlighedsmål  $P$  der svarer til at mønten er symmetrisk, altså har lige stor sandsynlighed for at falde på enhver af de to sider, er ligefordelingen på  $\Omega$ :

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\{\text{Krone}\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{\text{Plat}\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\emptyset) = 0.$$

Eksempel 1.4: Terningkast

Antag at vi kaster én gang med en almindelig terning og ser efter hvor mange øjne den viser.

Udfaldsrummet er mængden  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Mængden  $\mathcal{F}$  af hændelser er mængden af delmængder af  $\Omega$  (så der er  $2^6 = 64$  forskellige hændelser). Det sandsynlighedsmål  $P$  der svarer til at terningen er symmetrisk, er ligefordelingen på  $\Omega$ .

Dermed er eksempelvis sandsynligheden for hændelsen  $\{3, 6\}$  (antallet af øjne er deleligt med 3) givet som  $P(\{3, 6\}) = \frac{2}{6}$ , fordi hændelsen består af to udfald, og der er seks mulige udfald i alt.

*Eksempel 1.5: Simpel stikprøveudtagning*

Man har en kasse (eller urne) med  $s$  sorte og  $h$  hvide kugler, og herfra udtager man en  $k$ -stikprøve, dvs. en delmængde med  $k$  elementer (det forudsættes at  $k \leq s + h$ ). Kuglerne tænkes udtaget ved *simpel stikprøveudtagning*, dvs. alle  $\binom{s+h}{k}$  forskellige delmængder med  $k$  elementer (jf. definitionen af binomialkoefficienter side 27) har samme sandsynlighed for at blive udtaget. – Her er altså tale om en ligefordeling på mængden  $\Omega$  bestående af alle disse delmængder.

Sandsynligheden for hændelsen »netop  $x$  sorte kugler« er derfor lig antal  $k$ -stikprøver med  $x$  sorte kugler og  $k - x$  hvide kugler divideret med det samlede antal stikprøver, altså  $\binom{s}{x} \binom{h}{k-x} / \binom{s+h}{k}$ . Se også side 28, herunder sætning 1.13.

**Punktsandsynligheder**

Læseren kan med nogen ret undre sig over den noget kringlede måde at matematificere sandsynligheder på, hvorfor kan man ikke bare have en funktion der til hvert udfald knytter sandsynligheden for at det indtræffer? Så længe man opererer med endelige (og tællelige) udfaldsrum kunne man faktisk godt gribe sagen an på den måde, men med overtællelige udfaldsrum går det helt galt (fordi overtælleligt mange positive tal ikke kan summere til noget endeligt). Men da vi nu er i det endelige tilfælde, er følgende definition og sætning af interesse.

**DEFINITION 1.2: PUNKTSANDSYNLIGHEDER**

Lad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  være et sandsynlighedsrum over en endelig mængde  $\Omega$ . Funktionen

$$\begin{aligned} p : \Omega &\longrightarrow [0; 1] \\ \omega &\longmapsto P(\{\omega\}) \end{aligned}$$

kaldes *punktsandsynlighederne* for  $P$ .

Punktsandsynligheder anskueliggøres ofte som sandsynlighedspinde.

**SÆTNING 1.2**

Hvis  $p$  er punktsandsynlighederne for sandsynlighedsmålet  $P$ , så gælder for en vilkårlig hændelse  $A$  at  $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ .

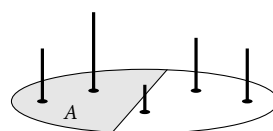
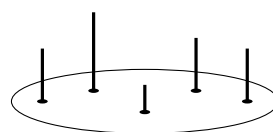
**BEVIS**

Vi skriver  $A$  som disjunkt forening af sine etpunkts-del-mængder og bruger additiviteten:  $P(A) = P(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ .  $\square$

Bemærkninger: En konsekvens af sætningen er at to forskellige sandsynlighedsmål ikke kan have samme punktsandsynlighedsfunktion. En anden konsekvens er at  $p$  summerer til 1, dvs.  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ ; det ser man ved at sætte  $A = \Omega$ .

**SÆTNING 1.3**

Hvis  $p : \Omega \rightarrow [0; 1]$  summerer til 1, dvs.  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ , så findes netop et sandsynlighedsmål  $P$  på  $\Omega$  der har  $p$  som sine punktsandsynligheder.



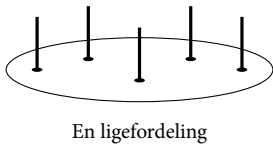
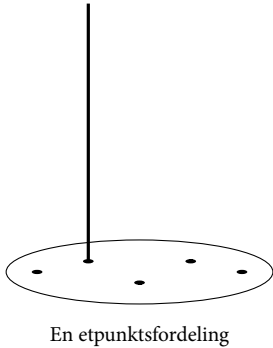


## BEVIS

Vi kan definere en funktion  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0; +\infty[$  ved  $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ . Denne funktion er positiv fordi  $p \geq 0$ , og normeret fordi  $p$  summerer til 1. Den er desuden additiv: hvis  $A_1, A_2, \dots, A_n$  er parvis disjunkte hændelser, så er

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{\omega \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} p(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in A_1} p(\omega) + \sum_{\omega \in A_2} p(\omega) + \dots + \sum_{\omega \in A_n} p(\omega) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n), \end{aligned}$$

hvor det andet lighedstegn følger af den associative lov for regneoperationen  $+$ . Altså opfylder  $P$  betingelserne for at være et sandsynlighedsmål. Pr. konstruktion er  $P$ 's punktsandsynligheder  $p$ , og som nævnt i bemærkningen til sætning 1.2 er der kun ét sandsynlighedsmål der kan have  $p$  som punktsandsynligheder.  $\square$



## Eksempel 1.6

Punktsandsynlighederne for etpunktsfordelingen i  $\omega_0$  (jf. eksempel 1.2) er givet ved  $p(\omega_0) = 1$ , og  $p(\omega) = 0$  når  $\omega \neq \omega_0$ .

## Eksempel 1.7

Punktsandsynlighederne for ligefordelingen på  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  (jf. eksempel 1.1) er givet ved  $p(\omega_i) = 1/n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

## Betingede sandsynligheder og fordelinger

Man er ofte interesseret i sandsynligheden for at en hændelse  $A$  indtræffer, givet at en anden hændelse  $B$  vides at indtræffe (eller at være indtruffet) – man taler om den *betingede sandsynlighed* for  $A$  givet  $B$ .

## DEFINITION 1.3: BETINGET SANDSYNLIGHED

Lad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  være et sandsynlighedsrum, lad  $A$  og  $B$  være hændelser, og antag at  $P(B) > 0$ . Tallet

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

kaldes den *betingede sandsynlighed* for  $A$  givet  $B$ .

## Eksempel 1.8

Man slår Plat eller Krone med to mønter, en 10-krone og en 20-krone, på én gang. Hvad er sandsynligheden for at 10-kronen viser Krone, givet at mindst en af de to mønter viser Krone?

Der er (iflg. standardmodellen) fire mulige udfald, og udfaldsrummet er

$$\Omega = \{(\text{Plat}, \text{Plat}), (\text{Plat}, \text{Krone}), (\text{Krone}, \text{Plat}), (\text{Krone}, \text{Krone})\},$$

hvor vi skriver 10-kronens resultat først; hvert af disse fire udfald antages at have sandsynlighed  $1/4$ . Den betingende hændelse  $B$  (mindst en Krone) og den omspurgte hændelse  $A$  (at 10-kronen viser Krone) er hhv.

$$B = \{(\text{Plat}, \text{Krone}), (\text{Krone}, \text{Plat}), (\text{Krone}, \text{Krone})\} \quad \text{og}$$

$$A = \{(\text{Krone}, \text{Plat}), (\text{Krone}, \text{Krone})\},$$

så den betingede sandsynlighed for  $A$  givet  $B$  er

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Af definition 1.3 følger umiddelbart

#### SÆTNING 1.4

Hvis  $A$  og  $B$  er hændelser, og hvis  $P(B) > 0$ , så er  $P(A \cap B) = P(A | B) P(B)$ .

#### DEFINITION 1.4: BETINGET FORDELING

Lad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  være et sandsynlighedsrum, og lad  $B$  være en hændelse med den egenskab at  $P(B) > 0$ . Funktionen

$$\begin{aligned} P(\cdot | B) : \mathcal{F} &\longrightarrow [0; 1] \\ A &\longmapsto P(A | B) \end{aligned}$$

kaldes den betingede fordeling givet  $B$ .

#### Bayes' formel

Antag at  $\Omega$  kan skrives som en disjunkt forening af de  $k$  hændelser  $B_1, B_2, \dots, B_k$  (eller som man også siger:  $B_1, B_2, \dots, B_k$  er en *klassedeling* af  $\Omega$ ). Desuden er der en hændelse  $A$ . Det antages endvidere at vi forlods (eller *a priori*) kender sandsynlighederne  $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_k)$  for de enkelte klasser i klassedelingen, og desuden kendes også alle de betingede sandsynligheder  $P(A | B_j)$  for  $A$  givet  $B_j$ . Opgaven er nu at bestemme sandsynlighederne  $P(B_j | A)$  for de enkelte  $B_j$ -er, givet at hændelsen  $A$  vides at være indtruffet; disse sandsynligheder kaldes *a posteriori* sandsynligheder.

(Som illustration kan man eksempelvis tænke på en medicinsk diagnosticeringssituation:  $A$  er det sæt af symptomer man observerer på patienten, og  $B$ -erne er forskellige (hinanden udelukkende) sygdomme der kunne forklare symptomerne. Lægerne har bud på de hyppigheder hvormed sygdommene forekommer, og på sandsynlighederne for at en patient udviser netop symptombilledet  $A$ , givet at patienten har sygdommen  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Lægerne er interesserede i de betingede sandsynligheder for at den patient som har symptomerne  $A$ , fejler sygdommen  $B_i$ .)

Da  $A = \bigcup_{i=1}^k A \cap B_i$  hvor der er tale om en disjunkt forening, er

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^k P(A | B_i) P(B_i),$$

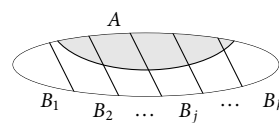
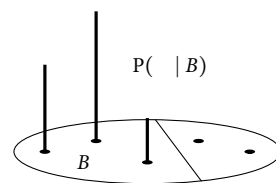
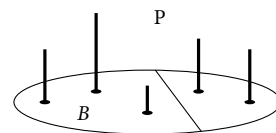
og da  $P(B_j | A) = P(A \cap B_j) / P(A) = P(A | B_j) P(B_j) / P(A)$ , er dermed

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^k P(A | B_i) P(B_i)}. \quad (1.1)$$

#### THOMAS BAYES

engelsk matematiker og teolog (1702-61).

»Bayes' formel« (der hidrører fra Bayes (1763)) spiller i vore dage en altafgørende rolle i den såkaldte bayesianske statistik og i bayesianske netværk.



## UAFHÆNGIGHED

Termen *uafhængig* bruges i forskellige betydninger i forskellige delområder af matematikken, så undertiden kan det være nødvendigt med en præcisere sprogbrug. Den her præsenterede form for uafhængighed er *stokastisk* uafhængighed.

Formel (1.1) kaldes *Bayes' formel*; den fortæller hvordan man udregner a posteriori sandsynlighederne  $P(B_j | A)$  ud fra a priori sandsynlighederne  $P(B_j)$  og de betingede sandsynligheder  $P(A | B_j)$ .

## Uafhængighed

Hændelser kaldes uafhængige hvis det er sådan at sandsynlighedsudsagn om nogle af dem ikke ændres af kendskabet til hvorvidt andre af dem er indtruffet eller ej.

Man kunne overveje at definere uafhængighed af hændelserne  $A$  og  $B$  til at betyde at  $P(A | B) = P(A)$ , hvilket ved anvendelse af definitionen på betinget sandsynlighed bliver til  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ; den sidste formel har den fordel at den er meningsfuld også når  $P(B) = 0$ , samt at  $A$  og  $B$  indgår symmetrisk. Man definerer derfor uafhængighed af *to* hændelser  $A$  og  $B$  til at betyde at  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . – Hvis man vil gøre tingene ordentligt, skal man imidlertid kunne tale om uafhængighed af  $k$  hændelser. Den generelle definition ser sådan ud:

## DEFINITION 1.5: UAFHÆNGIGHED AF HÆNDELSER

Hændelserne  $A_1, A_2, \dots, A_k$  siges at være uafhængige hvis der for enhver delmængde  $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}\}$  af disse hændelser gælder at  $P\left(\bigcap_{j=1}^m A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^m P(A_{i_j})$ .

Bemærk: Når man skal undersøge uafhængighed af hændelser, er det ikke tilstrækkeligt at tjekke at de er parvis uafhængige, jf. eksempel 1.9. Det er heller ikke tilstrækkeligt at kontrollere at sandsynligheden for fællesmængden af *alle* hændelserne er lig produktet af sandsynlighederne for de enkelte hændelser, jf. eksempel 1.10.

## Eksempel 1.9

Lad  $\Omega = \{a, b, c, d\}$  og lad  $P$  være ligefordelingen på  $\Omega$ . De tre hændelser  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{a, c\}$  og  $C = \{a, d\}$  har hver især sandsynlighed  $\frac{1}{2}$ . Hændelserne  $A$ ,  $B$  og  $C$  er parvis uafhængige, f.eks. er  $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ , idet  $P(B \cap C) = P(\{a\}) = \frac{1}{4}$  og  $P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ , og tilsvarende er  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  og  $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ .

Derimod er de tre hændelser *ikke* uafhængige, eksempelvis er  $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$ , idet  $P(A \cap B \cap C) = P(\{a\}) = \frac{1}{4}$  og  $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$ .

## Eksempel 1.10

Lad  $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  og lad  $P$  være ligefordelingen på  $\Omega$ . De tre hændelser  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{a, e, f, g\}$  og  $C = \{a, b, c, e\}$  har hver især sandsynlighed  $\frac{1}{2}$ . Da  $A \cap B \cap C = \{a\}$ , er  $P(A \cap B \cap C) = P(\{a\}) = \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$ , men hændelserne  $A$ ,  $B$  og  $C$  er *ikke* uafhængige; eksempelvis er  $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$  (fordi  $P(A \cap B) = P(\{a\}) = \frac{1}{8}$  og  $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ).

## Uafhængige delforsøg; produktrum

De tilfældighedsfænomener der skal modelleres, består meget ofte af et antal separate del-fænomener (f.eks. kan ét kast med fem terninger opfattes som sammensat

af fem udgaver af »et kast med én terning«). Hvis delfænomenerne antages uafhængige af hinanden, kan man let sammensætte modeller for delfænomenerne til en stor model for det samlede fænomen.

I de indledende overvejelser vil vi for nemheds skyld antage at det sammensatte fænomen består af to delfænomener I og II. Lad os sige at de to delfænomener kan modelleres med sandsynlighedsrummene  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  hhv.  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ .

Vi søger et sandsynlighedsrum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  der kan modellere det sammensatte fænomen bestående af I og II. Det er nærliggende at sige at udfaldene i det sammensatte forsøg skal skrives på formen  $(\omega_1, \omega_2)$  hvor  $\omega_1 \in \Omega_1$  og  $\omega_2 \in \Omega_2$ , altså at  $\Omega$  skal være produktmængden  $\Omega_1 \times \Omega_2$ , og  $\mathcal{F}$  kan så være mængden af alle delmængder af  $\Omega$ . Men hvad skal  $P$  være?

Tag en I-hændelse  $A_1 \in \mathcal{F}_1$  og den I-hændelse  $A_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{F}$  svarende til at i det sammensatte fænomen giver I-delen et udfald i  $A_1$  og II-delen hvadsomhelst, det vil sige at i det sammensatte fænomen interesserer man sig kun for hvad første delfænomen giver. De to hændelser  $A_1 \times \Omega_2$  og  $A_1$  svarer til det samme fænomen, blot i to forskellige sandsynlighedsrum, og derfor skulle det sandsynlighedsmål  $P$  som vi er på jagt efter, gerne være indrettet sådan at  $P(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1)$ . På samme måde må man forlange at hvis  $A_2 \in \mathcal{F}_2$ , så er  $P(\Omega_1 \times A_2) = P_2(A_2)$ .

Hvis det sammensatte fænomen skal have den egenskab at delfænomenerne er uafhængige af hinanden, så må det betyde at de to hændelser  $A_1 \times \Omega_2$  og  $\Omega_1 \times A_2$  (der jo vedrører hver sit delfænomen) skal være uafhængige hændelser, og da deres fællesmængde er  $A_1 \times A_2$ , skal der derfor gælde at

$$\begin{aligned} P(A_1 \times A_2) &= P((A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2)) \\ &= P(A_1 \times \Omega_2) P(\Omega_1 \times A_2) = P_1(A_1) P_2(A_2), \end{aligned}$$

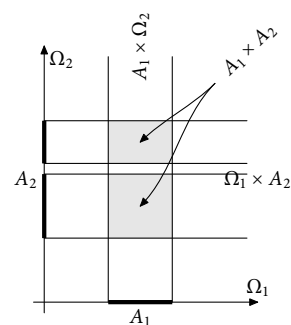
dvs. vi har et krav til  $P$  som vedrører alle produktmængder i  $\mathcal{F}$ . Da etpunktsmængder er produktmængder (fordi  $\{(\omega_1, \omega_2)\} = \{\omega_1\} \times \{\omega_2\}$ ), har vi specielt et krav til punktsandsynlighederne for  $P$ ; med nærliggende betegnelser er kravet at  $p(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1)p_2(\omega_2)$  for alle  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ .

Inspireret af denne analyse af problemstillingen kan man nu gå frem som følger:

1. Lad  $p_1$  og  $p_2$  være punktsandsynlighederne for hhv.  $P_1$  og  $P_2$ .
2. Definér en funktion  $p : \Omega \rightarrow [0; 1]$  ved  $p(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1)p_2(\omega_2)$  for  $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ .
3. Der gælder at  $p$  summerer til 1:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) &= \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2} p_1(\omega_1)p_2(\omega_2) \\ &= \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} p_1(\omega_1) \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} p_2(\omega_2) \\ &= 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

4. Ifølge sætning 1.3 findes derfor et entydigt bestemt sandsynlighedsmål  $P$  på  $\Omega$  der har  $p$  som sine punktsandsynligheder.



5. Dette sandsynlighedsmål opfylder det stillede krav om at  $P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) P_2(A_2)$  for alle  $A_1 \in \mathcal{F}_1$  og  $A_2 \in \mathcal{F}_2$ , idet

$$\begin{aligned} P(A_1 \times A_2) &= \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in A_1 \times A_2} p_1(\omega_1) p_2(\omega_2) \\ &= \sum_{\omega_1 \in A_1} p_1(\omega_1) \sum_{\omega_2 \in A_2} p_2(\omega_2) = P_1(A_1) P_2(A_2). \end{aligned}$$

Hermed har vi løst det stillede problem. – Det fundne sandsynlighedsmål  $P$  kaldes i øvrigt *produktet* af  $P_1$  og  $P_2$ .

Man kan udvide ovenstående betragtninger til situationer med  $n$  delfænomener og derved nå frem til at hvis et tilfældighedsfænomen er sammensat af  $n$  uafhængige delfænomener med punktsandsynligheder  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , så er den samlede punktsandsynlighedsfunktion givet ved

$$p(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = p_1(\omega_1) p_2(\omega_2) \dots p_n(\omega_n),$$

og om de tilsvarende sandsynlighedsmål gælder

$$P(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P_1(A_1) P_2(A_2) \dots P_n(A_n).$$

Man kalder i slige forbindelser  $p$  og  $P$  for den *simultane* punktsandsynlighedsfunktion hhv. fordeling, og  $p_i$ -ene og  $P_i$ -erne for de *marginale* punktsandsynlighedsfunktioner hhv. fordelinger.

#### Eksempel 1.11

Hvis man kaster én gang med en mønt og én gang med en terning, så har udfaldet (Krone, 5 øjne) sandsynlighed  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ , og hændelsen »Krone og mindst fem øjne« sandsynlighed  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ . – Hvis man kaster 100 gange med en mønt, så er sandsynligheden for at de 10 sidste kast alle giver Krone, lig  $(\frac{1}{2})^{10} \approx 0.001$ .

## 1.2 Stokastiske variable

En af grundene til matematikkens store succes er utvivlsomt at den i meget vid udstrækning betjener sig af symboler. Når man vil sætte talen om sandsynlighed og tilfældighed på matematiksprog, handler det blandt meget andet om at vælge en hensigtsmæssig notation. Det er uhyre praktisk at kunne operere med symboler der står for »det tilfældige udfald som tilfældighedseksperimentet nu leverer når vi udfører det«. Sådanne symboler kaldes *stokastiske variable*; stokastiske variable betegnes oftest med store bogstaver (især  $X, Y, Z$ ). Vi vil benytte stokastiske variable som om de var almindelige reelle tal og altså lade dem indgå i udtryk som  $X + Y = 5$  eller  $Z \in B$ .

Eksempel: I forbindelse med kast med to terninger kan man indføre stokastiske variable  $X_1$  og  $X_2$  som skal stå for antal øjne som terning nr. 1 hhv. 2 viser. Det at terningerne viser samme antal øjne, kan da kort skrives som  $X_1 = X_2$ , det at summen af øjnene er mindst 10, kan skrives som  $X_1 + X_2 \geq 10$ , osv.

Selv om ovenstående måske antyder hvad *meningen* med en stokastisk variabel skal være, så er det jo afgjort ikke nogen klar definition af hvad det er for et matematisk objekt. Omvendt fortæller nedenstående definition ikke meget om hvad meningen er:

DEFINITION 1.6: STOKASTISK VARIABLE

Lad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  være et sandsynlighedsrum over en endelig mængde. En stokastisk variabel på  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  er en afbildning  $X$  af  $\Omega$  ind i de reelle tal  $\mathbb{R}$ .

Mere generelt er en  $n$ -dimensional stokastisk variabel på  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  en afbildning  $X$  af  $\Omega$  ind i  $\mathbb{R}^n$ .

Vi skal i det følgende studere det matematiske begreb en stokastisk variabel. Allerførst må vi præcisere hvordan det kan indgå i sproget: Lad  $X$  være en stokastisk variabel på det aktuelle udfaldsrum. Hvis  $u$  er et udsagn om reelle tal sådan at for hvert  $x \in \mathbb{R}$  er  $u(x)$  enten sandt eller falsk, så skal  $u(X)$  forstås som et meningsfuldt udsagn om  $X$ , og det er sandt hvis og kun hvis hændelsen  $\{\omega \in \Omega : u(X(\omega))\}$  indtræffer. Derved bliver vi i stand til at tale om sandsynligheden  $P(u(X))$  for at  $u(X)$  er sandt; denne sandsynlighed er pr. definition  $P(u(X)) = P(\{\omega \in \Omega : u(X(\omega))\})$ .

Skrivemåden  $\{\omega \in \Omega : u(X(\omega))\}$  er præcis, men temmelig omstændelig og ofte unødigt detaljeret. Derfor skriver man næsten altid den pågældende hændelse på den kortere form  $\{u(X)\}$ .

Eksempelvis svarer udsagnet  $X \geq 3$  til hændelsen  $\{X \geq 3\}$  der mere udførligt er lig med  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 3\}$ , og man skriver  $P(X \geq 3)$  hvilket pr. definition er  $P(\{X \geq 3\})$  eller mere udførligt  $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 3\})$ . – Dette udvides på oplagt måde til situationer med flere stokastiske variable.

Hvis  $B$  er en delmængde af  $\mathbb{R}$ , svarer udsagnet  $X \in B$  til hændelsen  $\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ . Sandsynligheden for dette udsagn (eller denne hændelse) er  $P(X \in B)$ . Hvis vi ser på  $P(X \in B)$  som funktion af  $B$ , så opfylder den betingelserne for at være et sandsynlighedsmål på  $\mathbb{R}$ ; dette sandsynlighedsmål vil matematikere kalde det *transformerede mål* og sandsynlighedsteoretikere og statistikere vil kalde det *fordelingen af  $X$* . – Det foregående skal lige korrigeres en smule: Faktisk kan vi på dette sted ikke tale om et sandsynlighedsmål på  $\mathbb{R}$ , al den stund vi endnu kun er nået til sandsynligheder på endelige mængder. Derfor må vi »nøjes med« at opfatte sandsynlighedsmålet med de to navne som et sandsynlighedsmål på den endelige mængde  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ .

Lad os for en kort bemærkning betegne det transformerede sandsynlighedsmål  $X(P)$ ; så er  $X(P)(B) = P(X \in B)$  når  $B$  er en delmængde af  $\mathbb{R}$ . Denne tilsyneladende ganske uskyldige formel fortæller at alle sandsynlighedsudsagn vedrørende  $X$  kan omskrives til sandsynlighedsudsagn der alene involverer (delmængder af)  $\mathbb{R}$  og sandsynlighedsmålet  $X(P)$  på (den endelige delmængde  $X(\Omega)$  af)  $\mathbb{R}$ . Vi kan altså helt se bort fra det oprindelige sandsynlighedsrum  $\Omega$ .

*Eksempel 1.12*

Lad  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$  og lad  $P$  være det sandsynlighedsmål på  $\Omega$  som har punktsandsynlighederne  $p(\omega_1) = 0.3, p(\omega_2) = 0.1, p(\omega_3) = 0.4, p(\omega_4) = 0$ , og  $p(\omega_5) = 0.2$ . Vi definerer en stokastisk variabel  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ved  $X(\omega_1) = 3, X(\omega_2) = -0.8, X(\omega_3) = 4.1, X(\omega_4) = -0.8$ , og  $X(\omega_5) = -0.8$ .

Værdimængden for  $X$  er  $X(\Omega) = \{-0.8, 3, 4.1\}$ , og fordelingen af  $X$  er det sandsynlighedsmål på  $X(\Omega)$  der har punktsandsynlighederne 0.3, 0.3 og 0.4, fordi

$$\begin{aligned} P(X = -0.8) &= P(\{\omega_2, \omega_4, \omega_5\}) = p(\omega_2) + p(\omega_4) + p(\omega_5) = 0.3, \\ P(X = 3) &= P(\{\omega_1\}) = p(\omega_1) = 0.3, \\ P(X = 4.1) &= P(\{\omega_3\}) = p(\omega_3) = 0.4. \end{aligned}$$

*Eksempel 1.13: Fortsættelse af eksempel 1.12*

Vi indfører nu to yderligere stokastiske variable  $Y$  og  $Z$ , sådan at situationen alt i alt er som følger

| $\omega$   | $p(\omega)$ | $X(\omega)$ | $Y(\omega)$ | $Z(\omega)$ |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\omega_1$ | 0.3         | 3           | -0.8        | 3           |
| $\omega_2$ | 0.1         | -0.8        | 3           | -0.8        |
| $\omega_3$ | 0.4         | 4.1         | 4.1         | 4.1         |
| $\omega_4$ | 0           | -0.8        | 4.1         | 4.1         |
| $\omega_5$ | 0.2         | -0.8        | 3           | -0.8        |

Det ses at  $X, Y$  og  $Z$  er forskellige, eksempelvis er  $X(\omega_1) \neq Y(\omega_1), X(\omega_4) \neq Z(\omega_4)$  og  $Y(\omega_1) \neq Z(\omega_1)$ , men de har samme værdimængde, nemlig  $\{-0.8, 3, 4.1\}$ . Almindelig udregning viser at

$$\begin{aligned} P(X = -0.8) &= P(Y = -0.8) = P(Z = -0.8) = 0.3, \\ P(X = 3) &= P(Y = 3) = P(Z = 3) = 0.3, \\ P(X = 4.1) &= P(Y = 4.1) = P(Z = 4.1) = 0.4, \end{aligned}$$

dvs.  $X, Y$  og  $Z$  har *samme fordeling*. Vi ser at  $P(X \neq Z) = P(\{\omega_4\}) = 0$ , dvs.  $X = Z$  med sandsynlighed 1, og at  $P(X = Y) = P(\{\omega_3\}) = 0.4$ .

Fordelingen af en stokastisk variabel  $X$  kan – da der er tale om en fordeling på en endelig mængde – beskrives (og anskueliggøres) ved sine punktsandsynligheder. Da fordelingen »lever« på en delmængde af de reelle tal, kan vi imidlertid også beskrive og anskueliggøre den på en anden måde, nemlig ved hjælp af dens fordelingsfunktion.

**DEFINITION 1.7: FORDELINGSFUNKTION**

*Fordelingsfunktionen for en stokastisk variabel  $X$  er funktionen*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0; 1] \\ x &\longmapsto P(X \leq x). \end{aligned}$$

Fordelingsfunktioner har altid bestemte egenskaber:

## LEMMA 1.5

Hvis den stokastiske variabel  $X$  har fordelingsfunktion  $F$ , så er

$$\begin{aligned}P(X \leq x) &= F(x), \\P(X > x) &= 1 - F(x), \\P(a < X \leq b) &= F(b) - F(a),\end{aligned}$$

for vilkårlige reelle tal  $x$  og  $a < b$ .

## BEVIS

Den første ligning er en gentagelse af definitionen af fordelingsfunktion. De to andre ligninger følger af punkterne 1 og 3 i lemma 1.1 (side 12).  $\square$

## SÆTNING 1.6

Fordelingsfunktionen  $F$  for en stokastisk variabel  $X$  har følgende egenskaber:

1. Den er ikke-aftagende, dvs. hvis  $x \leq y$ , så er  $F(x) \leq F(y)$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  og  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .
3. Den er højrekontinuert, dvs.  $F(x+) = F(x)$  for alle  $x$ .
4. I ethvert punkt  $x$  gælder  $P(X = x) = F(x) - F(x-)$ .
5. Et punkt  $x$  er et diskontinuitetspunkt for  $F$  hvis og kun hvis  $P(X = x) > 0$ .

## BEVIS

Ad 1: Hvis  $x \leq y$ , så er  $F(y) - F(x) = P(x < X \leq y)$  ifølge lemma 1.5, og da sandsynligheder er ikke-negative, er dermed  $F(x) \leq F(y)$ .

Ad 2: Da  $X$  kun antager endeligt mange forskellige værdier, findes to tal  $x_{\min}$  og  $x_{\max}$  således at  $x_{\min} < X(\omega) < x_{\max}$  for alle  $\omega$ . Da er  $F(x) = 0$  for alle  $x < x_{\min}$ , og  $F(x) = 1$  for alle  $x > x_{\max}$ .

Ad 3: Da  $X$  kun antager endeligt mange forskellige værdier, gælder for et givet  $x$  at for alle tilstrækkeligt små tal  $h > 0$  kan  $X$  ikke antage nogen værdi i intervallet  $]x; x+h]$ , dvs. hændelserne  $\{X \leq x\}$  og  $\{X \leq x+h\}$  er identiske, altså er  $F(x) = F(x+h)$ . Heraf følger det ønskede.

Ad 4: For et givet  $x$  ser vi på den del af  $X$ 's værdimængde som ligger til venstre for  $x$ , altså mængden  $X(\Omega) \cap ]-\infty; x[$ . Hvis denne mængde er tom, sætter vi  $a = -\infty$ , og ellers sætter vi  $a$  lig det største element i  $X(\Omega) \cap ]-\infty; x[$ .

Da  $X(\omega)$  ikke ligger i  $]a; x[$  for noget  $\omega$ , er det sådan at for ethvert tal  $x^* \in ]a; x[$  er hændelserne  $\{X = x\}$  og  $\{x^* < X \leq x\}$  identiske, dvs.  $P(X = x) = P(x^* < X \leq x) = P(X \leq x) - P(X \leq x^*) = F(x) - F(x^*)$ . For  $x^* \nearrow x$  fås det ønskede.

Ad 5: Det følger af 4 og 3.  $\square$

Stokastiske variable vil komme til at optræde igen og igen, og læseren vil hurtigt nå til at jonglere aldeles ubesværet med selv avancerede eksemplarer af slagsen. Men på dette sted må vi hellere præsentere nogle simple (men ikke ligegyldige) eksempler på stokastiske variable.

## OM VOKSENDE FUNKTIONER

Lad  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  være en funktion som er voksende, dvs. for alle  $x$  og  $y$  gælder at  $x \leq y$  medfører  $F(x) \leq F(y)$ .

Da gælder at  $F$  i ethvert punkt  $x$  har en grænseværdi fra venstre

$$F(x-) = \lim_{h \searrow 0} F(x-h)$$

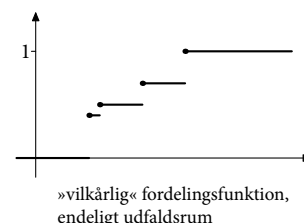
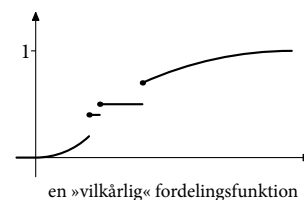
og en grænseværdi fra højre

$$F(x+) = \lim_{h \searrow 0} F(x+h),$$

og der gælder at

$$F(x-) \leq F(x) \leq F(x+).$$

Hvis  $F(x-) \neq F(x+)$ , er  $x$  et springpunkt for  $F$  (og ellers er  $x$  et kontinuitetspunkt for  $F$ ).





*Eksempel 1.14: Konstant stokastisk variabel*

Den simpleste type stokastiske variable er dem som altid har den samme værdi, altså stokastiske variable af formen  $X(\omega) = a$  for alle  $\omega \in \Omega$ ; her er  $a$  et reelt tal. Dens fordelingsfunktion er

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } a \leq x \\ 0 & \text{når } x < a \end{cases}.$$

Faktisk kunne vi her erstatte betingelsen » $X(\omega) = a$  for alle  $\omega \in \Omega$ « med betingelsen » $X = a$  med sandsynlighed 1«, altså  $P(X = a) = 1$ ; fordelingsfunktionen ville være uændret.

*Eksempel 1.15: 01-variabel*

Den næstsimpleste type stokastiske variable må være dem der kun antager *to* forskellige værdier, som man ofte kalder for 0 og 1. Sådanne variable benyttes blandt andet i forbindelse med (modeller for) binære forsøg, dvs. forsøg med to mulige udfald (Plat/Krone, Succes/Fiasko, Gunstig/Ikke-gunstig, ...), og de kaldes *01-variabel* eller *Bernoulli-variable*.

Fordelingen af en 01-variabel kan specificeres ved hjælp af en parameter  $p$  der angiver sandsynligheden for værdien 1, dvs.

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{for } x = 1 \\ 1 - p & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

hvilket også kan skrives som

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1. \quad (1.2)$$

Fordelingsfunktionen for en 01-variabel med parameter  $p$  er

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } 1 \leq x \\ 1 - p & \text{når } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{når } x < 0. \end{cases}$$

*Eksempel 1.16: Indikatorfunktion*

Hvis  $A$  er en hændelse (dvs. en delmængde af  $\Omega$ ), så er dens *indikatorfunktion* funktionen

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{når } \omega \in A \\ 0 & \text{når } \omega \in A^c. \end{cases}$$

En sådan indikatorfunktion er en 01-variabel med parameter  $p = P(A)$ .

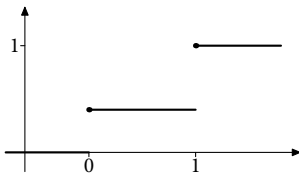
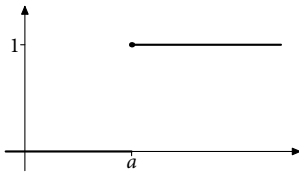
Hvis omvendt  $X$  er en 01-variabel, så er  $X$  indikatorfunktionen for hændelsen  $A = X^{-1}(\{1\}) = \{\omega : X(\omega) = 1\}$ .

*Eksempel 1.17: Ligefordelt stokastisk variabel*

Hvis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  er  $n$  forskellige reelle tal og  $X$  en stokastisk variabel som antager enhver af disse værdier med samme sandsynlighed, dvs.

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

så siger man at  $X$  er *ligefordelt* på mængden  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .



Som måske allerede ovenstående eksempler antyder, er (grafene for) fordelingsfunktionerne ikke overvældende velegnet til at give et informativt visuelt indtryk af fordelingen af en stokastisk variabel  $X$ . Det er langt bedre at beskæftige sig med sandsynlighedsfunktionen for  $X$ , dvs. funktionen  $f : x \mapsto P(X = x)$ , betragtet som funktion defineret på  $X$ 's værdimængde eller en ikke alt for voldsom udvidelse heraf. – I situationer der modelleres med endelige sandsynlighedsrum, er de interessante stokastiske variable meget ofte sådanne der tager værdier i de hele ikke-negative tal; i så fald kan man betragte sandsynlighedsfunktionen som defineret enten på  $X$ 's faktiske værdimængde eller på mængden  $\mathbb{N}_0$  af hele ikke-negative tal.

**DEFINITION 1.8: SANDSYNLIGHEDSFUNKTION**

Sandsynlighedsfunktionen for en stokastisk variabel  $X$  er funktionen

$$f : x \mapsto P(X = x).$$

**SÆTNING 1.7**

Sammenhængen mellem fordelingsfunktion  $F$  og sandsynlighedsfunktion  $f$  er

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x) - F(x-), \\ F(x) &= \sum_{z : z \leq x} f(z). \end{aligned}$$

**BEVIS**

Udtrykket for  $f$  er en omformulering af Punkt 4 i sætning 1.6. Udtrykket for  $F$  følger af sætning 1.2 side 13.  $\square$

**Uafhængige stokastiske variable**

Man er ofte interesseret i at studere mere end én stokastisk variabel ad gangen.

Hvis  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er stokastiske variable på det samme sandsynlighedsrum, så kalder man funktionen

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

for den *simultane* sandsynlighedsfunktion for  $X$ -erne, hvorimod eksempelvis funktionen

$$f_j(x_j) = P(X_j = x_j)$$

kaldes den marginale sandsynlighedsfunktion for  $X_j$  og funktionen

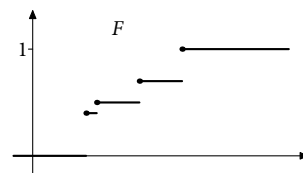
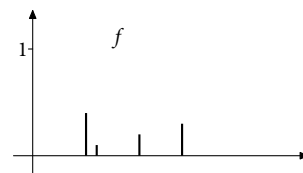
$$f_{ij}(x_i, x_j) = P(X_i = x_i, X_j = x_j)$$

kaldes den marginale sandsynlighedsfunktion for  $(X_i, X_j)$ .

Vi har tidligere (side 16f) defineret uafhængighed af hændelser. Det kan man bygge videre på i form af

**UAFHÆNGIGHED**

Termen *uafhængig* bruges i forskellige betydninger i forskellige delområder af matematikken, så undertiden kan det være nødvendigt med en præcisere sprogbrug. Den her præsenterede form for uafhængighed er *stokastisk uafhængighed*.



## DEFINITION 1.9: UAFHÆNGIGE STOKASTISKE VARIABLE

Lad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  være et sandsynlighedsrum over en endelig mængde. De stokastiske variable  $X_1, X_2, \dots, X_n$  på  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  siges at være uafhængige hvis det er sådan at hændelserne  $\{X_1 \in B_1\}, \{X_2 \in B_2\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$  er uafhængige, ligegyldigt hvordan man vælger delmængderne  $B_1, B_2, \dots, B_n$  af  $\mathbb{R}$ .

Et nemt og mere overskueligt kriterium for uafhængighed er

## SÆTNING 1.8

De stokastiske variable  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uafhængige hvis og kun hvis

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) \quad (1.3)$$

for alle valg af tal  $x_1, x_2, \dots, x_n$  således at  $x_i$  tilhører  $X_i$ 's værdimængde,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

## KOROLLAR 1.9

De stokastiske variable  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uafhængige hvis og kun hvis deres simultane sandsynlighedsfunktion er lig produktet af de marginale sandsynlighedsfunktioner:

$$f_{12\dots n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n).$$

## BEVIS FOR SÆTNING 1.8

Lad os først vise »kun hvis«. Vi antager altså at  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uafhængige ifølge definition 1.9 og skal vise at (1.3) gælder. Sæt  $B_i = \{x_i\}$ ; så er  $\{X_i \in B_i\} = \{X_i = x_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), og vi har

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i),$$

dvs. (1.3) gælder.

Derefter skal vi vise »hvis«, så vi antager at (1.3) gælder, og skal vise at for vilkårlige  $B_1, B_2, \dots, B_n$  er  $\{X_1 \in B_1\}, \{X_2 \in B_2\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$  uafhængige. For en vilkårlig delmængde  $B$  af  $\mathbb{R}^n$  er

$$P((X_1, X_2, \dots, X_n) \in B) = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n).$$

Anvendt på  $B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$  giver dette ved brug af (1.3) at

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}\right) &= P((X_1, X_2, \dots, X_n) \in B) \\ &= \sum_{x_1 \in B_1} \sum_{x_2 \in B_2} \cdots \sum_{x_n \in B_n} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\ &= \sum_{x_1 \in B_1} \sum_{x_2 \in B_2} \cdots \sum_{x_n \in B_n} \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n \sum_{x_i \in B_i} P(X_i = x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \in B_i), \end{aligned}$$

dvs.  $\{X_1 \in B_1\}, \{X_2 \in B_2\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$  er uafhængige.  $\square$

Hvis de enkelte  $X$ -er har samme sandsynlighedsfunktion og dermed samme fordeling, taler man om at de er *identisk fordelte*, og i det følgende vil vi ofte møde vendingen *uafhængige identisk fordelte stokastiske variable*.

### Funktioner af stokastiske variable

Hvis  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  er et endeligt sandsynlighedsrum,  $X$  en stokastisk variabel på  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  og  $t$  en funktion der afbilder  $X$ 's værdimængde ind i de reelle tal, så er den sammensatte funktion  $t \circ X$  igen en stokastisk variabel. Normalt skriver man ikke  $t \circ X$ , men  $t(X)$ . Fordelingen af  $t(X)$  kan i princippet let findes, idet

$$P(t(X) = y) = P(X \in \{x : t(x) = y\}) = \sum_{x : t(x) = y} f(x) \quad (1.4)$$

hvor  $f$  er sandsynlighedsfunktionen hørende til  $X$ .

På tilsvarende måde taler man om  $t(X_1, X_2, \dots, X_n)$  hvor  $t$  en funktion af  $n$  variable og  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er  $n$  stokastiske variable. Funktionen  $t$  behøver ikke være voldsomt avanceret; vi skal om lidt se på hvordan det ser ud når  $X$ -erne er uafhængige, og  $t$  er funktionen  $+$ , men først en ikke overraskende sætning.

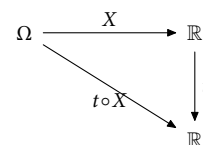
#### SÆTNING 1.10

Lad  $X_1, X_2, \dots, X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_{m+n}$  være uafhængige stokastiske variable, og lad  $t_1$  og  $t_2$  være funktioner af henholdsvis  $m$  og  $n$  variable. Så er de stokastiske variable  $Y_1 = t_1(X_1, X_2, \dots, X_m)$  og  $Y_2 = t_2(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_{m+n})$  uafhængige.

Vedr. bevis for sætningen: opgave 1.22.

### Fordelingen af en sum

Lad  $X_1$  og  $X_2$  være to stokastiske variable på  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , og lad  $f_{12}(x_1, x_2)$  være deres simultane sandsynlighedsfunktion. Da er  $t(X_1, X_2) = X_1 + X_2$  ligeledes en



stokastisk variabel på  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , og den generelle formel (1.4) giver at

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = y) &= \sum_{x_2 \in X_2(\Omega)} P(X_1 + X_2 = y \text{ og } X_2 = x_2) \\ &= \sum_{x_2 \in X_2(\Omega)} P(X_1 = y - x_2 \text{ og } X_2 = x_2) \\ &= \sum_{x_2 \in X_2(\Omega)} f_{12}(y - x_2, x_2), \end{aligned}$$

dvs. sandsynlighedsfunktionen for  $X_1 + X_2$  fås ved at summere  $f_{12}(x_1, x_2)$  over de talpar  $(x_1, x_2)$  for hvilke  $x_1 + x_2 = y$ . – Dette generaliseres uden videre til summer af mere end to stokastiske variable.

Hvis  $X_1$  og  $X_2$  er uafhængige, er deres simultane sandsynlighedsfunktion produktet af de marginale sandsynlighedsfunktioner, så vi får

#### SÆTNING 1.11

Hvis  $X_1$  og  $X_2$  er uafhængige stokastiske variable med sandsynlighedsfunktioner  $f_1$  og  $f_2$ , så har  $Y = X_1 + X_2$  sandsynlighedsfunktion

$$f(y) = \sum_{x_2 \in X_2(\Omega)} f_1(y - x_2) f_2(x_2).$$

#### Eksempel 1.18

Lad  $X_1$  og  $X_2$  være uafhængige identisk fordelte 01-variable med parameter  $p$ . Hvad er fordelingen af  $X_1 + X_2$ ?

Den simultane sandsynlighedsfunktion  $f_{12}$  for  $(X_1, X_2)$  er (jf. bl.a. (1.2) side 22)

$$\begin{aligned} f_{12}(x_1, x_2) &= f_1(x_1) f_2(x_2) \\ &= p^{x_1} (1-p)^{1-x_1} \cdot p^{x_2} (1-p)^{1-x_2} \\ &= p^{x_1+x_2} (1-p)^{2-(x_1+x_2)} \end{aligned}$$

når  $(x_1, x_2) \in \{0, 1\}^2$ , og 0 ellers. Sandsynlighedsfunktionen for  $X_1 + X_2$  er derfor

$$\begin{aligned} f(0) &= f_{12}(0, 0) &&= (1-p)^2, \\ f(1) &= f_{12}(1, 0) + f_{12}(0, 1) &&= 2p(1-p), \\ f(2) &= f_{12}(1, 1) &&= p^2. \end{aligned}$$

Som kontrol kan vi se efter om de fundne sandsynligheder summerer til 1:

$$f(0) + f(1) + f(2) = (1-p)^2 + 2p(1-p) + p^2 = ((1-p) + p)^2 = 1.$$

Eksemplet rummer oplagte generalisationsmuligheder.

### 1.3 Eksempler

Sandsynlighedsfunktionen for en 01-variabel med parameter  $p$  er (fra formel (1.2) side 22)

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

Hvis  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uafhængige 01-variable med parameter  $p$ , er deres simultane sandsynlighedsfunktion derfor (når  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ )

$$f_{12\dots n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^s (1-p)^{n-s} \quad (1.5)$$

hvor  $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  (jf. korollar 1.9).

#### DEFINITION 1.10: BINOMIALFORDELING

Fordelingen af summen af  $n$  uafhængige identisk fordelte 01-variable med parameter  $p$  kaldes binomialfordelingen med antalsparameter  $n \in \mathbb{N}$  og sandsynlighedsparameter  $p \in [0; 1]$ .

Vi vil finde sandsynlighedsfunktionen for binomialfordelingen med parametre  $n$  og  $p$ . Lad derfor  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være uafhængige 01-variable med parameter  $p$ , dvs. deres simultane sandsynlighedsfunktion er givet ved (1.5). Pr. definition er  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  binomialfordelt med parametre  $n$  og  $p$ . Hvis  $y$  er et heltal mellem 0 og  $n$ , er

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= \sum_{x_1+x_2+\dots+x_n=y} f_{12\dots n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{x_1+x_2+\dots+x_n=y} p^y (1-p)^{n-y} \\ &= \left( \sum_{x_1+x_2+\dots+x_n=y} 1 \right) p^y (1-p)^{n-y} \\ &= \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \end{aligned}$$

fordi der er  $\binom{n}{y}$  forskellige talsæt  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bestående af  $y$  1-er og  $n-y$  0-er. Sandsynlighedsfunktionen for binomialfordelingen med parametre  $n$  og  $p$  er altså

$$f(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, \quad y = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.6)$$

#### SÆTNING 1.12

Hvis  $Y_1$  og  $Y_2$  er uafhængige binomialfordelte stokastiske variable med antalsparametre  $n_1$  og  $n_2$  og med samme sandsynlighedsparameter  $p$ , så er  $Y_1 + Y_2$  binomialfordelt med parametre  $n_1 + n_2$  og  $p$ .

#### BEVIS

Sætningen kan vises på to måder (mindst), en besværlig måde som går ud på at benytte sætning 1.11, og som vi ikke vil gennemregne her, og en smart måde:

Lad  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, X_{n_1+1}, \dots, X_{n_1+n_2}$  være  $n_1 + n_2$  uafhængige identisk fordelte 01-variable. Pr. definition har  $X_1 + X_2 + \dots + X_{n_1}$  samme fordeling som  $Y_1$ , nemlig en binomialfordeling med parametre  $n_1$  og  $p$ , og tilsvarende har  $X_{n_1+1} + X_{n_1+2} + \dots + X_{n_1+n_2}$  samme fordeling som  $Y_2$ . Ifølge sætning 1.10 er

#### BINOMIALKOEFFICIENTER

Antallet af forskellige  $k$ -delmængder, dvs. delmængder med netop  $k$  elementer, som kan udtages fra en mængde  $G$  med  $n$  elementer, betegnes  $\binom{n}{k}$ . Denne størrelse kaldes en binomialkoefficient.

• Der gælder at  $\binom{n}{0} = 1$  og at  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  for  $0 \leq k \leq n$ .

• Man kan udlede en rekursionsformel for binomialkoefficienterne: Lad  $g_0$  være et element i  $G$ ; der er nu to slags  $k$ -delmængder af  $G$ : 1) de  $k$ -delmængder der ikke indeholder  $g_0$  og som derfor kan opfattes som  $k$ -delmængder af  $G \setminus \{g_0\}$ , og 2) de  $k$ -delmængder der indeholder  $g_0$  og som derfor er af formen en  $(k-1)$ -delmængde af  $G \setminus \{g_0\}$  forenet med  $\{g_0\}$ . Det samlede antal  $k$ -delmængder er lig summen af antallene af de to slags:

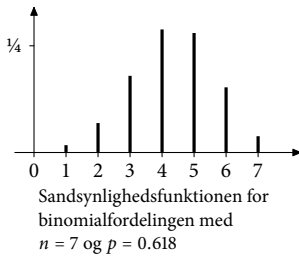
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Dette gælder når  $0 < k < n$ .

• Der gælder at

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

hvilket man kan indse på følgende måde: funktionen på højre side opfylder samme rekursionsformel som funktionen på venstre side (nemlig  $f(n, k) = f(n-1, k) + f(n-1, k-1)$ ); desuden stemmer de overens når  $k = n$  og  $k = 0$ ; altså stemmer de overens for alle  $k \leq n$ .



$Y_1$  og  $Y_2$  uafhængige. Forudsætningen i sætning 1.12 er altså opfyldt for disse  $Y_1$  og  $Y_2$ , og da  $Y_1 + Y_2$  er en sum af  $n_1 + n_2$  uafhængige identisk fordelte 01-variable med parameter  $p$ , er  $Y_1 + Y_2$  binomialfordelt med parametre  $n_1 + n_2$  og  $p$ . Hermed er sætningen vist!

Eller er den? Læseren vil måske synes at beviset er lidt underligt, for ikke at sige forkert. Er det der sker, ikke bare at der bliver tilvejebragt en situation med nogle helt specielle  $Y_i$ -er der er konstrueret sådan at konklusionen nærmest automatisk er sand? Skulle man ikke i stedet have begyndt med »vilkårlige«  $Y_1$  og  $Y_2$  med de nævnte fordelinger og så have ræsonneret ud fra dem?

Nej, det er ikke nødvendigt. Pointen er at sætningen ikke handler om stokastiske variable *qua* reelle funktioner på et sandsynlighedsrum, men om hvad der sker når man transformerer bestemte sandsynlighedsfordelinger med afbildningen  $(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$ . Hvordan man tilvejebringer disse fordelinger, er i den forbindelse uden betydning, og de stokastiske variables rolle er alene at være symboler der gør at man kan skrive tingene op på en gennemskuelig måde. (Se evt. også side 19.)  $\square$

Binomialfordelingen kan bruges til at modellere antal gunstige udfald i  $n$  uafhængige gentagelser af et forsøg der kan give enten gunstigt eller ikke-gunstigt udfald. Hvis gentagelserne strækker sig over to dage, f.eks. tirsdag og onsdag, kan man enten modellere totalantallet af gunstige udfald, eller man kan modellere antal gunstige om tirsdagen og antal gunstige om onsdagen og så lægge de to sammen; sætning 1.12 fortæller at det giver samme resultat. – Man kunne derefter overveje et problem af typen: Hvis man har foretaget  $n_1$  gentagelser om tirsdagen og  $n_2$  om onsdagen, og det samlede antal gunstige udfald er  $s$ , hvad kan man så sige om antal gunstige udfald om tirsdagen? Det handler den næste sætning om.

#### SÆTNING 1.13

Hvis  $Y_1$  og  $Y_2$  er uafhængige binomialfordelte stokastiske variable med antalsparametre  $n_1$  og  $n_2$  og samme sandsynlighedsparameter  $p$ , så har den betingede fordeling af  $Y_1$  givet at  $Y_1 + Y_2 = s$ , sandsynlighedsfunktionen

$$P(Y_1 = y \mid Y_1 + Y_2 = s) = \frac{\binom{n_1}{y} \binom{n_2}{s-y}}{\binom{n_1+n_2}{s}}, \quad (1.7)$$

som er forskellig fra 0 når  $\max\{s - n_2, 0\} \leq y \leq \min\{n_1, s\}$ .

Bemærk at den betingede fordeling ikke afhænger af  $p$ . – Vedr. bevis for sætningen: se opgave 1.17.

Sandsynlighedsfordelingen med sandsynlighedsfunktion (1.7) er en *hypergeometrisk fordeling*. Vi har mødt den allerede i eksempel 1.5 på side 13 i forbindelse med såkaldt stikprøveudtagning uden tilbagelægning. I forbindelse med stikprøveudtagning med tilbagelægning bliver der derimod tale om binomialfordelingen, således som det fremgår af indeværende afsnit.

Nu kan man jo sige at hvis man tager en lille stikprøve fra en meget stor population, så må det være stort set lige meget om det sker med eller uden tilbagelægning. Dette udsagn præciseres i sætning 1.14; for at forstå begrundelsen for sætning 1.14 kan man tænke på følgende situation (jf. eksempel 1.5): Man har en kasse med  $N$  kugler, hvoraf  $s$  er sorte og resten hvide. Herfra udtages (uden tilbagelægning) en stikprøve på  $n$ ; man ser på sandsynligheden for at denne stikprøve indeholder netop  $y$  sorte kugler, og interesserer sig for hvordan denne sandsynlighed opfører sig hvis  $N$  og  $s$  er meget store.

## SÆTNING 1.14

Ved grænseovergangen hvor  $N \rightarrow \infty$  og  $s \rightarrow \infty$  sådan at  $\frac{s}{N} \rightarrow p \in ]0; 1[$ , vil

$$\frac{\binom{s}{y} \binom{N-s}{n-y}}{\binom{N}{n}} \rightarrow \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

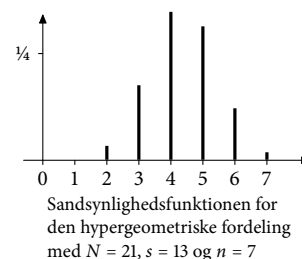
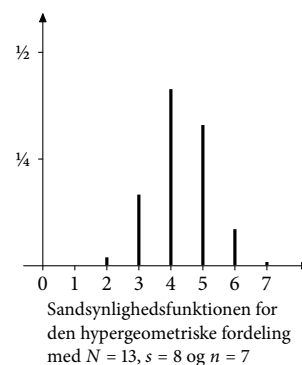
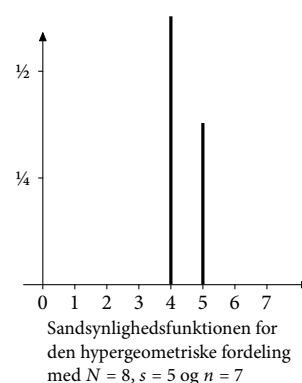
for ethvert  $y \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ .

## BEVIS

Ved almindelige omskrivninger fås

$$\begin{aligned} \frac{\binom{s}{y} \binom{N-s}{n-y}}{\binom{N}{n}} &= \binom{n}{y} \frac{(N-n)!}{(s-y)! (N-n-(s-y))!} \frac{s! (N-s)!}{N!} \\ &= \binom{n}{y} \frac{s!}{(s-y)!} \cdot \frac{(N-s)!}{(N-s-(n-y))!} \cdot \frac{N!}{(N-n)!} \\ &= \binom{n}{y} \frac{\overbrace{s(s-1)(s-2)\dots(s-y+1)}^{y \text{ faktorer}} \cdot \overbrace{(N-s)(N-s-1)(N-s-2)\dots(N-s-(n-y)+1)}^{n-y \text{ faktorer}}}{\underbrace{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}_{n \text{ faktorer}}} \end{aligned}$$

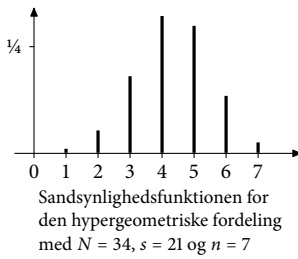
Da der er  $n$  faktorer i både tæller og nævner, kan vi parre hver faktor i tælleren med en i nævneren og derved skrive den lange brøk som et produkt af  $n$  korte brøker. Under grænseovergangen vil hver af disse korte brøker have en grænseværdi: Hver af de  $y$  brøker af formen  $\frac{s-\text{et eller andet}}{N-\text{et eller andet}}$  vil konvergere mod  $p$ , og hver af de  $n-y$  brøker af formen  $\frac{N-s-\text{et eller andet}}{N-\text{et eller andet}}$  vil konvergere mod  $1-p$ . Altså vil det samlede udtryk have den påståede grænseværdi.  $\square$



## 1.4 Middelværdi

Middelværdien af en reel funktion – for eksempel en stokastisk variabel – er det vægtede gennemsnit af de mulige funktionsværdier.




**DEFINITION 1.11: MIDDELVÆRDI**

Lad  $X$  være en reel stokastisk variabel på det endelige sandsynlighedsrum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Middelværdien af  $X$  er tallet  $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$ .

Undertiden skriver man  $EX$  i stedet for  $E(X)$ .

Hvis  $t$  er en funktion defineret på  $X$ 's værdimængde, så er  $t(X)$  igen en stokastisk variabel, og dens middelværdi er ifølge definition 1.11

$$E(t(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} t(X(\omega)) P(\{\omega\}). \quad (1.8)$$

**SÆTNING 1.15**

Middelværdien af  $t(X)$  kan også udregnes som

$$E(t(X)) = \sum_x t(x) P(X = x) = \sum_x t(x) f(x),$$

hvor der summeres over alle  $x$  i værdimængden  $X(\Omega)$  for  $X$ , og hvor  $f$  er sandsynlighedsfunktionen for  $X$ .

Hvis specielt  $t$  er den identiske afbildning, får vi følgende alternative formel for middelværdien af  $X$ :

$$E(X) = \sum_x x P(X = x).$$

**BEVIS**

Der gælder følgende omskrivninger der uddybes nedenfor:

$$\begin{aligned} \sum_x t(x) P(X = x) &\stackrel{1}{=} \sum_x t(x) P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \\ &\stackrel{2}{=} \sum_x t(x) \sum_{\omega \in \{X=x\}} P(\{\omega\}) \\ &\stackrel{3}{=} \sum_x \sum_{\omega \in \{X=x\}} t(x) P(\{\omega\}) \\ &\stackrel{4}{=} \sum_x \sum_{\omega \in \{X=x\}} t(X(\omega)) P(\{\omega\}) \\ &\stackrel{5}{=} \sum_{\omega \in \bigcup_x \{X=x\}} t(X(\omega)) P(\{\omega\}) \\ &\stackrel{6}{=} \sum_{\omega \in \Omega} t(X(\omega)) P(\{\omega\}) \\ &\stackrel{7}{=} E(t(X)). \end{aligned}$$

Uddybning:

Lighedstegn 1: en præcisering af hvad  $P(X = x)$  betyder.

Lighedstegn 2: følger af sætning 1.2 (side 13).

Lighedstegn 3: man ganger  $t(x)$  ind i den inderste sum.

Lighedstegn 4: når  $\omega \in \{X = x\}$ , er  $t(X(\omega)) = t(x)$ .

Lighedstegn 5: mængderne  $\{X = x\}$ ,  $\omega \in \Omega$ , er disjunkte.

Lighedstegn 6:  $\bigcup_x \{X = x\}$  er lig  $\Omega$ .

Lighedstegn 7: formel (1.8).  $\square$

Bemærkninger:

1. Sætning 1.15 er interessant og vigtig fordi den fortæller at middelværdien af  $Y = t(X)$  kan udregnes på tre måder:

$$E(t(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} t(X(\omega)) P(\{\omega\}), \quad (1.9)$$

$$E(t(X)) = \sum_x t(x) P(X = x), \quad (1.10)$$

$$E(t(X)) = \sum_y y P(Y = y). \quad (1.11)$$

Pointen er at udregningen efter behag kan foregå på  $\Omega$  og med brug af  $P$ , formel (1.9), eller på (den udgave af de reelle tal som indeholder) værdimængden for  $X$  og med brug af  $X$ 's fordeling, formel (1.10), eller på (den udgave af de reelle tal som indeholder) værdimængden for  $Y = t(X)$  og med brug af  $Y$ 's fordeling, formel (1.11).

2. I formuleringen af og beviset for sætningen var det underforstået at symbolet  $X$  stod for en almindelig endimensional stokastisk variabel, og at  $t$  var en funktion fra  $\mathbb{R}$  til  $\mathbb{R}$ . Men der er intet som helst i vejen for at opfatte  $X$  som en  $n$ -dimensional stokastisk variabel,  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , og  $t$  som en afbildning fra  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}$ . Sætningen forbliver rigtig, og beviset er uændret.
3. Matematikere vil kalde  $E(X)$  for *integralet* af funktionen  $X$  med hensyn til  $P$  og skrive  $E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega)$  eller kortere  $E(X) = \int_{\Omega} X dP$ , og de vil omtale sætning 1.15 som *integraltransformationssætningen*.

Man kan opfatte middelværdioperationen som en afbildning  $X \mapsto E(X)$  fra mængden af stokastiske variable (defineret på det givne endelige sandsynlighedsrum) ind i de reelle tal. Om denne afbildning gælder

#### SÆTNING 1.16

Afbildningen  $X \mapsto E(X)$  er en lineær afbildning fra vektorrummet af stokastiske variable på  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ind i de reelle tal.

Vedr. bevis: se opgave 1.18

Der gælder således generelt at middelværdien af en sum er lig summen af middelværdierne. Derimod gælder kun i visse tilfælde en regel om middelværdien af et produkt.

#### SÆTNING 1.17

Hvis  $X$  og  $Y$  er uafhængige stokastiske variable på rummet  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , så gælder at  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

BEVIS

Uafhængigheden giver at  $P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y)$  for alle  $x$  og  $y$ , og vi kan så foretage disse omskrivninger:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x,y} xy P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x,y} xy P(X = x) P(Y = y) \\ &= \sum_x \sum_y xy P(X = x) P(Y = y) \\ &= \sum_x x P(X = x) \sum_y y P(Y = y) = E(X) E(Y). \end{aligned}$$

□

SÆTNING 1.18

Hvis  $X(\omega) = a$  for alle  $\omega$ , så er  $E(X) = a$ , kort  $E(a) = a$ . Specielt er  $E(1) = 1$ .

BEVIS

Indsæt i definitionen for middelværdi og regn ud.

□

SÆTNING 1.19

Hvis  $A$  er en hændelse og  $\mathbf{1}_A$  dens indikatorfunktion, så gælder at  $E(\mathbf{1}_A) = P(A)$ .

BEVIS

Indsæt i definitionen for middelværdi og regn ud. (Indikatorfunktioner blev præsenteret i eksempel 1.16 på side 22.)

□

Vi skal nu udlede forskellige egenskaber ved middelværdiabildningen. Der er tale om egenskaber af formen: hvis der gælder ditten om  $X$ , så gælder der datten om  $E(X)$ . Det der gælder om  $X$ , er typisk af formen » $u(X)$  med sandsynlighed 1«, dvs. det kræves ikke at  $u(X(\omega))$  skal være opfyldt for alle  $\omega$ , men kun at hændelsen  $\{\omega : u(X(\omega))\}$  har sandsynlighed 1.

LEMMA 1.20

Hvis  $A$  er en hændelse med  $P(A) = 0$ , og  $X$  er en stokastisk variabel, så gælder at  $E(X\mathbf{1}_A) = 0$ .

BEVIS

Lad  $\omega \in A$ . Så er  $\{\omega\} \subseteq A$  og dermed  $P(\{\omega\}) \leq P(A) = 0$  da  $P$  er voksende (lemma 1.1). Da også  $P(\{\omega\}) \geq 0$ , kan vi slutte at  $P(\{\omega\}) = 0$ . Derfor bliver den første af nedenstående to summer 0:

$$E(X\mathbf{1}_A) = \sum_{\omega \in A} X(\omega) \mathbf{1}_A(\omega) P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega \setminus A} X(\omega) \mathbf{1}_A(\omega) P(\{\omega\}).$$

Den anden sum er 0 fordi når  $\omega \in \Omega \setminus A$ , er  $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ .

□

## SÆTNING 1.21

Middelværdiafbildningen er positiv, dvs. hvis  $X \geq 0$  med sandsynlighed 1, så er  $E(X) \geq 0$ .

ANDREJ MARKOV

russisk matematiker (1856-1922).

## BEVIS

Sæt  $B = \{\omega : X(\omega) \geq 0\}$  og  $A = \{\omega : X(\omega) < 0\}$ . Så er  $1 = \mathbf{1}_B(\omega) + \mathbf{1}_A(\omega)$  for alle  $\omega$ , og derfor er  $X = X\mathbf{1}_B + X\mathbf{1}_A$  og dermed  $E(X) = E(X\mathbf{1}_B) + E(X\mathbf{1}_A)$ . Middelværdien  $E(X\mathbf{1}_B)$  er ikke-negativ da den er en sum af ikke-negative led, og  $E(X\mathbf{1}_A)$  er 0 ifølge lemma 1.20  $\square$

PANUFTIJ TJEBSJOV

russisk matematiker (1821-94).

## KOROLLAR 1.22

Middelværdiafbildningen er voksende i den forstand at hvis  $X \leq Y$  med sandsynlighed 1, så er  $E(X) \leq E(Y)$ . Specielt gælder at  $|E(X)| \leq E(|X|)$ .

## BEVIS

Hvis  $X \leq Y$  med sandsynlighed 1, er  $E(Y) - E(X) = E(Y - X) \geq 0$  ifølge sætning 1.21.

Ved som  $Y$  at vælge  $|X|$  får vi dernæst at  $E(X) \leq E(|X|)$  og  $-E(X) \leq E(|X|)$ , dvs.  $|E(X)| \leq E(|X|)$ .  $\square$

## KOROLLAR 1.23

Hvis  $X = a$  med sandsynlighed 1, så er  $E(X) = a$ .

## BEVIS

Med sandsynlighed 1 er  $a \leq X \leq a$ , så ifølge korollar 1.22 og sætning 1.18 er  $a \leq E(X) \leq a$ , dvs.  $E(X) = a$ .  $\square$

## LEMMA 1.24: MARKOV'S ULIGHED

Hvis  $X$  er en ikke-negativ stokastisk variabel og  $c$  et positivt tal, så gælder at

$$P(X \geq c) \leq \frac{1}{c} E(X).$$

## BEVIS

Da  $c\mathbf{1}_{\{X \geq c\}}(\omega) \leq X(\omega)$  for alle  $\omega$ , er  $c E(\mathbf{1}_{\{X \geq c\}}) \leq E(X)$ , dvs.  $E(\mathbf{1}_{\{X \geq c\}}) \leq \frac{1}{c} E(X)$ . Ifølge sætning 1.19 er  $E(\mathbf{1}_{\{X \geq c\}}) = P(X \geq c)$ , så hermed er det ønsket vist.  $\square$

## KOROLLAR 1.25: TJEBSJOV'S ULIGHED

Hvis  $a$  er et positivt tal og  $X$  en stokastisk variabel, så gælder at

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} E(X^2).$$

## BEVIS

$P(|X| \geq a) = P(X^2 \geq a^2) \leq \frac{1}{a^2} E(X^2)$  ifølge Markov's ulighed.  $\square$

## KOROLLAR 1.26

Hvis  $E|X| = 0$ , så er  $X = 0$  med sandsynlighed 1.

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY  
fransk matematiker (1789-1857).

HERMANN AMANDUS SCHWARZ  
tysk matematiker (1843-1921).

#### BEVIS

Lad os vise at  $P(|X| > 0) = 0$ . Ifølge Markovs ulighed gælder  $P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} E(|X|) = 0$  for ethvert  $\varepsilon > 0$ . Hvis vi vælger  $\varepsilon$  mindre end det mindste positive tal i værdimængden for  $|X|$  (et sådant findes da mængden er endelig), er hændelsen  $\{|X| \geq \varepsilon\}$  den samme som hændelsen  $\{|X| > 0\}$ . Altså er  $P(|X| > 0) = 0$ .  $\square$

#### SÆTNING 1.27: CAUCHY-SCHWARZ' ULIGHED

Hvis  $X$  og  $Y$  er stokastiske variable på et sandsynlighedsrum over en endelig mængde, så er

$$(E(XY))^2 \leq E(X^2) E(Y^2) \quad (1.12)$$

Lighedstegnet gælder hvis og kun hvis der findes et talpar  $(a, b) \neq (0, 0)$  således at  $aX + bY = 0$  med sandsynlighed 1.

#### BEVIS

Hvis  $X$  og  $Y$  begge to er lig 0 med sandsynlighed 1, så er uligheden opfyldt (med lighed).

Antag at  $Y \neq 0$  med positiv sandsynlighed. For alle  $t \in \mathbb{R}$  er

$$0 \leq E((X + tY)^2) = E(X^2) + 2tE(XY) + t^2E(Y^2). \quad (1.13)$$

Højresiden er et andengradspolynomium i  $t$  (da  $Y$  ikke er konstant lig 0, er  $E(Y^2) > 0$ ). Da det altid er ikke-negativt, har det ikke to forskellige reelle rødder, og dets diskriminant er ikke-positiv, dvs.  $(2E(XY))^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0$ , hvilket er ensbetydende med (1.12). Endvidere gælder der lighedstegn hvis og kun hvis andengradspolynomiet har præcis én reel rod, dvs. hvis og kun hvis der findes et  $t$  så  $E(X + tY)^2 = 0$ , og det er ifølge korollar 1.26 ensbetydende med at  $X + tY = 0$  med sandsynlighed 1.

Tilfældet  $X \neq 0$  med positiv sandsynlighed behandles på samme måde.  $\square$

### Varians og kovarians

Hvis man skal beskrive fordelingen af  $X$  med ét tal, kan man bruge  $E(X)$ . Hvis man får lov til at bruge to tal, vil det være oplagt at lade det andet tal være et der fortæller noget om hvor store de tilfældige variationer omkring middelværdien er. Til det brug kan man bruge den såkaldte varians.

#### DEFINITION 1.12: VARIANS OG STANDARDAFVIGELSE

Variansen af den stokastiske variabel  $X$  er tallet

$$\text{Var}(X) = E((X - E X)^2) = E(X^2) - (E X)^2.$$

Standardafvigelsen på  $X$  er tallet  $\sqrt{\text{Var}(X)}$ .

Det følger umiddelbart af det første udtryk at  $\text{Var}(X)$  altid er et ikke-negativt tal. (Opgave 1.20 handler om at vise at de to udtryk for  $\text{Var}(X)$  er ens.)

## SÆTNING 1.28

Der gælder at  $\text{Var}(X) = 0$  hvis og kun hvis  $X$  er konstant med sandsynlighed 1. I givet fald er konstanten lig  $E X$ .

## BEVIS

Hvis  $X = c$  med sandsynlighed 1, er  $E X = c$ ; så er  $(X - E X)^2 = 0$  med sandsynlighed 1, og dermed altså  $\text{Var}(X) = E((X - E X)^2) = 0$ .

Hvis omvendt  $\text{Var}(X) = 0$ , så fortæller korollar 1.26 at  $(X - E X)^2 = 0$  med sandsynlighed 1, dvs.  $X$  er med sandsynlighed 1 lig med  $E X$ .  $\square$

Middelværdioperatoren er en lineær operator, dvs. der gælder altid  $E(aX) = a E X$  og  $E(X + Y) = E X + E Y$ . Noget tilsvarende er ikke tilfældet for variansoperatoren.

## SÆTNING 1.29

Hvis  $X$  er en stokastisk variabel og  $a$  et reelt tal, så er  $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$ .

## BEVIS

Indsæt i definitionen og benyt regnereglerne for middelværdi.  $\square$

## DEFINITION 1.13: KOVARIANS

Kovariansen mellem to stokastiske variable  $X$  og  $Y$  på samme sandsynlighedsrum er tallet  $\text{Cov}(X, Y) = E((X - E X)(Y - E Y))$ .

Man efterviser let følgende regneregler for kovarianser:

## SÆTNING 1.30

For vilkårlige stokastiske variable  $X, Y, U, V$  og reelle konstanter  $a, b, c, d$  gælder

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, X) &= \text{Var}(X), \\ \text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov}(Y, X), \\ \text{Cov}(X, a) &= 0, \\ \text{Cov}(aX + bY, cU + dV) &= ac \text{Cov}(X, U) + ad \text{Cov}(X, V) \\ &\quad + bc \text{Cov}(Y, U) + bd \text{Cov}(Y, V).\end{aligned}$$

Endvidere gælder

## SÆTNING 1.31

Hvis to stokastiske variable er uafhængige, så er deres kovarians 0

## BEVIS

Hvis  $X$  og  $Y$  er uafhængige, er også  $X - E X$  og  $Y - E Y$  uafhængige (sætning 1.10 side 25), og ifølge sætning 1.17 side 31 er dermed  $E((X - E X)(Y - E Y)) = E(X - E X) E(Y - E Y) = 0 \cdot 0 = 0$ .  $\square$

## SÆTNING 1.32

For vilkårlige stokastiske variable  $X$  og  $Y$  er  $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}$ , og lighedstegnet gælder hvis og kun hvis der findes et talpar  $(a, b) \neq (0, 0)$  således at  $aX + bY$  er konstant med sandsynlighed 1.

## BEVIS

Anvend sætning 1.27 på de to stokastiske variable  $X - EX$  og  $Y - EY$ .  $\square$

## DEFINITION 1.14: KORRELATION

Korrelationen mellem to ikke-konstante stokastiske variable  $X$  og  $Y$  er tallet

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}}.$$

## KOROLLAR 1.33

Hvis  $X$  og  $Y$  er ikke-konstante stokastiske variable, så gælder

1.  $-1 \leq \text{corr}(X, Y) \leq +1$ ,
2.  $\text{corr}(X, Y) = +1$  hvis og kun hvis der findes et talpar  $(a, b)$  med  $ab < 0$  således at  $aX + bY$  er konstant med sandsynlighed 1,
3.  $\text{corr}(X, Y) = -1$  hvis og kun hvis der findes et talpar  $(a, b)$  med  $ab > 0$  således at  $aX + bY$  er konstant med sandsynlighed 1.

## BEVIS

Sætning 1.32 giver alle resultaterne på nær sammenhængen mellem korrelationens fortegn og  $ab$ 's fortegn, men den følger af at  $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$  kun kan blive 0 hvis sidste led er negativt.  $\square$

## SÆTNING 1.34

Hvis  $X$  og  $Y$  er stokastiske variable på samme sandsynlighedsrum, så er

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + 2 \text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y).$$

Hvis  $X$  og  $Y$  er uafhængige, så er  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ .

## BEVIS

Den generelle formel vises ved almindelig udregning: Vi har

$$(X + Y - E(X + Y))^2 = (X - EX)^2 + (Y - EY)^2 + 2(X - EX)(Y - EY).$$

Vi tager middelværdi på begge sider og får

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2E((X - EX)(Y - EY)) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y). \end{aligned}$$

Ifølge sætning 1.31 er  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  hvis  $X$  og  $Y$  er uafhængige, og vi har hermed vist det ønskede.  $\square$

## KOROLLAR 1.35

Lad  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være indbyrdes uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med middelværdi  $\mu$  og varians  $\sigma^2$ , og lad  $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$  betegne deres gennemsnit. Der gælder at  $E\bar{X}_n = \mu$  og  $\text{Var}\bar{X}_n = \sigma^2/n$ .

Korollaret fortæller hvordan den tilfældige variation af et gennemsnit af  $n$  observationer aftager med  $n$  – hvis man altså bruger variansen som et mål for tilfældig variation.

## Eksempler

Eksempel 1.19: 01-variable

Lad  $X$  være en 01-variabel med  $P(X = 1) = p$  og  $P(X = 0) = 1 - p$ . Så har  $X$  middelværdi  $EX = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) = p$ . Variansen af  $X$  er i henhold til definition 1.12  $\text{Var}(X) = E(X^2) - p^2 = 0^2 \cdot P(X = 0) + 1^2 \cdot P(X = 1) - p^2 = p(1 - p)$ .

Eksempel 1.20: Binomialfordelingen

Binomialfordelingen med antalsparameter  $n$  og sandsynlighedsparameter  $p$  er fordelingen af en sum af  $n$  uafhængige 01-variable med parameter  $p$  (definition 1.10 side 27). Ifølge eksempel 1.19 og regnereglerne for middelværdi og varians er middelværdien i denne binomialfordeling derfor lig  $np$  og variansen er lig  $np(1 - p)$ .

Man kan naturligvis også finde den søgte middelværdi som  $\sum xf(x)$  hvor  $f$  er sandsynlighedsfunktionen for binomialfordelingen (formel (1.6) side 27), og tilsvarende kan man finde variansen som  $\sum x^2 f(x) - (\sum xf(x))^2$ .

I eksempel 4.3 på side 72 bestemmes binomialfordelingens middelværdi og varians på en helt anden måde.

## Store Tals Lov

Et af hovedområderne inden for sandsynlighedsregningen er at udlede resultater om den asymptotiske opførsel af følger af stokastiske variable. Her er et enkelt – det enkleste – eksempel.

## SÆTNING 1.36: STORE TALS SVAGE LOV

Lad  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  være en følge af indbyrdes uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med middelværdi  $\mu$  og varians  $\sigma^2$ . Da gælder at gennemsnittet  $\bar{X}_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$  konvergerer mod  $\mu$  i den forstand at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$

for ethvert  $\varepsilon > 0$ .

## BEVIS

Beviset er enkelt, takket være de mange forberedende øvelser: Ifølge korollar 1.35 er  $\text{Var}(\bar{X}_n - \mu) = \sigma^2/n$ . Ifølge Tjebysjovs ulighed (korollar 1.25 side 33) er da

$$P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1 - P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\sigma^2}{n},$$

hvilket går mod 1 for  $n$  gående mod  $\infty$ . □

## STORE TALS STÆRKE LOV

Der findes også en sætning der hedder *Store Tals Stærke Lov*. Den siger at under samme betingelser som i Store Tals Svage Lov gælder

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1,$$

dvs.  $\bar{X}_n$  konvergerer mod  $\mu$  med sandsynlighed 1.



Kommentar til beviset: Der er måske dem der synes at beviset (og sætningen) opererer med uendelig mange uafhængige identisk fordelte stokastiske variable, og kan man det (på dette sted i fremstillingen), og eksisterer der i det hele taget uendelige følger af stokastiske variable? Men der er ingen problemer. De eneste grænseovergange der sker, forgår i de reelle tal; vi opererer kun med  $n$  stokastiske variable ad gangen, og det er ganske uproblematisk – man kan f.eks. benytte et udfaldsrum som er et produktrum, jf. side 16f.

Store Tals Lov fortæller at gennemsnittet af et stort antal uafhængige identisk fordelte variable med stor sandsynlighed ligger tæt på middelværdien i fordelingen.

Lad os prøve at anvende Store Tals Lov på en følge af uafhængige identisk fordelte 01-variable  $X_1, X_2, \dots$  der er 1 med sandsynlighed  $p$ ; middelværdien i deres fordeling er  $p$  (jf. eksempel 1.19). Gennemsnittet  $\bar{X}_n$  bliver den relative hyppighed af 1-er blandt  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Store Tals Lov fortæller da at den relative hyppighed af 1-er med stor sandsynlighed er tæt på  $p$ , altså at den relative hyppighed af 1-er er tæt på sandsynligheden for at få et 1. Det vil sige at vi nu inden for det matematiske univers har deduceret os frem til en overensstemmelse mellem sandsynlighed (i matematisk forstand) og relativ hyppighed. Dette må betragtes som et godt tegn på den matematiske sandsynlighedsregnings velegnethed.

Store Tals Lov åbner som vi har set, mulighed for at fortolke sandsynlighed som relativ hyppighed i det lange løb, og tilsvarende åbner den mulighed for at fortolke middelværdi som gennemsnit af et stort antal observationer.

## 1.5 Opgaver

### Opgave 1.1

Angiv et sandsynlighedsrum der kan bruges som model for eksperimentet »man slår Plat eller Krone tre gange med en mønt«. Præcisér hændelserne »mindst en Krone«, »højst en Krone« og »ikke det samme resultat i to på hinanden følgende kast«. Hvor store er sandsynlighederne for disse hændelser?

### Opgave 1.2

Giv et eksempel (et matematik eksempel, ikke (nødvendigvis) et »virkeligt« eksempel) på et sandsynlighedsrum hvor udfaldsrummet har tre elementer.

### Opgave 1.3

I lemma 1.1 side 12 er en formel for sandsynligheden for at mindst en af to hændelser  $A$  og  $B$  indtræffer. Udlød en formel for sandsynligheden for at netop en af de to hændelser indtræffer.

### Opgave 1.4

Lad os sige at sandsynlighed kan fortolkes som relativ hyppighed i det lange løb. Argumentér for at definition 1.3 side 14 er en fornuftig måde at definere betinget sandsynlighed på.

### Opgave 1.5

Vis at funktionen  $P(\cdot | B)$  i definition 1.4 side 15 opfylder betingelserne for at være et sandsynlighedsmål i henhold til definition 1.1 side 11. Hvordan finder man punktsandsynlighederne for  $P(\cdot | B)$  når man kender dem for  $P$ ?

*Opgave 1.6*

Man kaster to almindelige terninger og ser hvor mange øjne de viser. Hvad er sandsynligheden for at antal øjne som terning nr. 1 viser, er et primtal, givet at summen af øjnene som de to terninger viser, er 8?

*Opgave 1.7*

En kasse indeholder fem røde og tre blå kugler. Hen under aften hvor det er halvmørkt og man ikke kan se forskel på rød og blå, tager Pedro fire tilfældige kugler op af kassen. Derefter tager Antonia én tilfældigt valgt kugle op.

1. Hvad er sandsynligheden for at Antonia tager en blå kugle?
2. Givet at Antonia tager en blå kugle, hvad er så sandsynligheden for at Pedro har taget fire røde?

*Opgave 1.8*

Lad os sige at i en bestemt familie er der sandsynligheden  $\frac{1}{4}$  for at børnene får blå øjne, og at de forskellige børn får blå øjne eller ej uafhængigt af hinanden. Familien får fem børn.

1. Hvis det vides at det yngste barn har blå øjne, hvad er da sandsynligheden for at mindst tre af børnene har blå øjne?
2. Hvis det vides at mindst et af de fem børn har blå øjne, hvad er da sandsynligheden for at mindst tre af børnene har blå øjne?

*Opgave 1.9*

Man bliver ofte præsenteret for spørgsmål af formen: »I en klinisk undersøgelse fandt man at ud af en stor gruppe lungekræftpatienter var 80% rygere, og ud af en tilsvarende kontrolgruppe var 40% rygere. Hvad kan man på den baggrund sige om rygningens betydning for lungekræft?«

[En kontrolgruppe er (i dette tilfælde) en gruppe personer der er søgt udvalgt sådan at den ligner patientgruppen på »alle« punkter, bortset fra at kontrolgruppens personer ikke har fået diagnosticeret lungekræft. Man vil formodentlig tilstræbe at patientgruppe og kontrolgruppe blandt andet har nogenlunde samme aldersfordeling, samme kønsfordeling, samme socialgruppefordeling, osv.]

Idet vi helt ser bort fra de spørgsmål der kan stilles til hvad det vil sige at kontrolgruppen er »tilsvarende«, og fra de problemer der hænger sammen med den statistiske usikkerhed og biologiske variation, hvad kan man så fremsætte af interessante kvantitative udsagn der belyser rygningens betydning for lungekræft?

Vink: Ved *odds* for hændelsen  $A$  forstås tallet  $P(A)/P(A^c)$ . Udregn/opstil et udtryk for odds for lungekræft givet man er ryger, og det samme givet man er ikke-ryger.

*Opgave 1.10*

Undertiden taler man (sundhedsmyndigheder og politikere) om at der skal foretages *screeninger* af befolkningen for at opdage bestemte sygdomme meget tidligt i forløbet.

Antag at man vil teste hver enkelt person i en given befolkningsgruppe for en bestemt, temmelig sjælden sygdom. Testmetoden er ikke 100% pålidelig (det er testmetoder sjældent), så der er en vis lille sandsynlighed for en »falsk positiv«,  $\alpha$ : for at testen fejlagtigt siger at personen har sygdommen, og der er ligeledes en vis lille sandsynlighed for en »falsk negativ«,  $\beta$ : for at testen fejlagtigt siger at personen ikke har sygdommen.

Opstil en egentlig matematisk model for det ovenfor skitserede. Hvilke parametre er det fornuftigt at lade indgå i modellen?

For den enkelte person er der to spørgsmål af umådelig interesse, nemlig: hvis testen er positiv, hvad er så sandsynligheden for at have sygdommen, og: hvis testen er negativ, hvad er så sandsynligheden for at have sygdommen?

Benyt den opstillede model til at besvare disse spørgsmål. Prøv også at indsætte talværdier.

#### Opgave 1.11

Vis at hvis hændelserne  $A$  og  $B$  er uafhængige, så er  $A$  og  $B^c$  også uafhængige.

#### Opgave 1.12

Giv et sæt nødvendige og tilstrækkelige betingelser for at en funktion  $f$  er en sandsynlighedsfunktion.

#### Opgave 1.13

Skitsér binomialfordelingens sandsynlighedsfunktion for forskellige værdier af  $n$  og  $p$ . Hvad sker der når  $p \rightarrow 0$  eller  $p \rightarrow 1$ ? Hvad sker der når man erstatter  $p$  med  $1 - p$ ?

#### Opgave 1.14

Antag at  $X$  er ligefordelt på  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  (jf. definition 1.17 side 22). Opskriv og skitsér sandsynlighedsfunktionen og fordelingsfunktionen for  $X$ . Find  $E X$  og  $\text{Var } X$ .

#### Opgave 1.15

Lad  $X$  og  $Y$  være stokastiske variable på samme sandsynlighedsrum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Hvilken sammenhæng er der mellem udsagnene » $X = Y$  med sandsynlighed 1« og » $X$  og  $Y$  har samme fordeling«? – Vink: benyt evt. eksempel 1.13 til inspiration.

#### Opgave 1.16

Lad  $X$  og  $Y$  være stokastiske variable på samme sandsynlighedsrum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Vis at hvis  $X$  er konstant ( $\exists$ : der findes et tal  $c$  således at  $X(\omega) = c$  for alle  $\omega \in \Omega$ ), så er  $X$  og  $Y$  uafhængige.

Vis også at hvis  $X$  er konstant med sandsynlighed 1 ( $\exists$ : der findes et tal  $c$  således at  $P(X = c) = 1$ ), så er  $X$  og  $Y$  uafhængige.

#### Opgave 1.17

Bevis sætning 1.13 side 28.

Benyt først definitionen på betinget sandsynlighed og udnyt at  $Y_1 = y$  og  $Y_1 + Y_2 = s$  er ensbetydende med  $Y_1 = y$  og  $Y_2 = s - y$ ; benyt derefter uafhængigheden af  $Y_1$  og  $Y_2$ , og benyt endelig at vi kender sandsynlighedsfunktionen for hver af de variable  $Y_1$ ,  $Y_2$  og  $Y_1 + Y_2$ .

#### Opgave 1.18

Vis at mængden af stokastiske variable defineret på et givet endeligt sandsynlighedsrum er et vektorrum over de reelle tal.

Vis at afbildningen  $X \mapsto E(X)$  er en lineær afbildning fra dette vektorrum ind i vektorrummet  $\mathbb{R}$ .

#### Opgave 1.19

Lad  $X$  være en stokastisk variabel hvis fordeling er givet ved  $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$ . Find  $E X$  og  $\text{Var } X$ .

Lad desuden  $Y$  være en stokastisk variabel hvis fordeling er givet ved  $P(Y = 100) = P(Y = -100) = \frac{1}{2}$ , og find  $E Y$  og  $\text{Var } Y$ .

## Opgave 1.20

I definitionen af varians (definition 1.12 side 34) optræder helt ukommenteret to forskellige udtryk for variansen på en stokastisk variabel. – Vis at det faktisk er rigtigt at  $E((X - EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2$ .

## Opgave 1.21

Lad  $X$  være en stokastisk variabel således at

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= 0.1 & P(X = -2) &= 0.1 \\ P(X = 1) &= 0.4 & P(X = -1) &= 0.4, \end{aligned}$$

og sæt  $Y = t(X)$  hvor funktionen  $t$  (fra  $\mathbb{R}$  til  $\mathbb{R}$ ) er givet ved

$$t(x) = \begin{cases} -x & \text{hvis } |x| \leq 1 \\ x & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vis at  $X$  og  $Y$  har samme fordeling. Find middelværdien af  $X$  og middelværdien af  $Y$ . Find variansen af  $X$  og variansen af  $Y$ . Find kovariansen mellem  $X$  og  $Y$ . Er  $X$  og  $Y$  uafhængige?

## Opgave 1.22

Lav et bevis for sætning 1.10 (side 25): Med notationen fra sætningen skal det vises at

$$P(Y_1 = y_1 \text{ og } Y_2 = y_2) = P(Y_1 = y_1) P(Y_2 = y_2)$$

for alle  $y_1$  og  $y_2$ . Skriv den første sandsynlighed op som en sum hvor der summeres over  $(x_1, x_2, \dots, x_{m+n})$  tilhørende en vis mængde; denne mængde er en produktmængde af en mængde af  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ -er og en mængde af  $(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n})$ -er.

## Opgave 1.23: Jensens ulighed

Lad  $X$  være en stokastisk variabel og  $\psi$  en konvex funktion. Vis Jensens ulighed

$$E\psi(X) \geq \psi(EX).$$

## Opgave 1.24

Lad  $x_1, x_2, \dots, x_n$  være  $n$  positive tal. Tallet  $G = (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}$  kaldes det geometriske gennemsnit af  $x$ -erne, og  $A = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$  er det aritmetiske gennemsnit af  $x$ -erne. Vis at  $G \leq A$ .

Vink: Lad  $X$  være en stokastisk variabel med  $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , og anvend Jensens ulighed på  $X$  og den konvekse funktion  $\psi = -\ln$ .

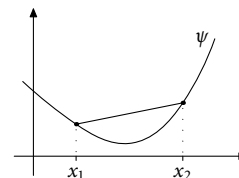
JOHAN LUDWIG WILLIAM VALDEMAR JENSEN (1859-1925), dansk matematiker og ingeniør ved Københavns Telefon Aktieselskab. Blandt andet kendt for Jensens ulighed (se opgave 1.23).

## KONVEKSE FUNKTIONER

En reel funktion  $\psi$  på et interval  $I \subseteq \mathbb{R}$  er *konvex* hvis der for vilkårlige to punkter  $(x_1, \psi(x_1))$  og  $(x_2, \psi(x_2))$  på grafen for  $\psi$  gælder at hele det linjestykke der forbinder punkterne, ligger over eller på grafen, altså hvis der for vilkårlige  $x_1, x_2 \in I$  gælder at

$$\lambda\psi(x_1) + (1-\lambda)\psi(x_2) \geq \psi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

for alle  $\lambda \in [0; 1]$ .



Hvis  $\psi$  er to gange kontinuert differentiable, så gælder at  $\psi$  er konvex hvis og kun hvis  $\psi'' \geq 0$ .



## 2 Tællelige udfaldsrum

DETTE KAPITEL PRÆSENTERER dele af teorien for sandsynligheder på tællelige udfaldsrum; på en række punkter er der tale om en uproblematisk generalisering af teorien for det endelige tilfælde, men der kommer også enkelte større modifikationer.

Som man vil erindre, opererer vi i det endelige tilfælde med mængden  $\mathcal{F}$  af alle delmængder af det endelige udfaldsrum  $\Omega$ , og ethvert element i  $\mathcal{F}$ , altså enhver delmængde af  $\Omega$  (enhver hændelse), tillægges en sandsynlighed. På tilsvarende måde vil vi i det tællelige tilfælde tillægge enhver delmængde af udfaldsrummet en sandsynlighed. Dette er i fuld overensstemmelse med hvad man har brug for i konkrete modelbygningssituationer, men set fra det strengt formelle synspunkt er det lidt en forsimpning. – Den interesserede læser kan konsultere definition 5.2 side 81 for at se den generelle definition af sandsynlighedsrum.

### 2.1 Grundlæggende definitioner

DEFINITION 2.1: SANDSYNLIGHEDSRUM OVER TÆLLELIG MÆNGDE

Et sandsynlighedsrum over en tællelig mængde er et tripel  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  bestående af

1. et udfaldsrum  $\Omega$  som er en ikke-tom, tællelig mængde,
2. mængden  $\mathcal{F}$  af alle delmængder af  $\Omega$ ,
3. et sandsynlighedsmål på  $(\Omega, \mathcal{F})$ , dvs. en afbildning  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  som er
  - positiv:  $P(A) \geq 0$  for alle  $A \in \mathcal{F}$ ,
  - normeret:  $P(\Omega) = 1$ , og
  - $\sigma$ -additiv: hvis  $A_1, A_2, \dots$  er en følge i  $\mathcal{F}$  af parvis disjunkte hændelser, så er

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad (2.1)$$

En tælleligt uendelig mængde har overtælleligt mange delmængder, men som man ser, involverer betingelsen for at være et sandsynlighedsmål kun tælleligt mange hændelser ad gangen.

LEMMA 2.1

Lad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  være et sandsynlighedsrum over det tællelige udfaldsrum  $\Omega$ . Der gælder

- i.  $P(\emptyset) = 0$ .

ii. Hvis  $A_1, A_2, \dots, A_n$  er parvis disjunkte hændelser fra  $\mathcal{F}$ , så er

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i),$$

dvs.  $P$  er også endeligt additiv.

iii.  $P(A) + P(A^c) = 1$  for enhver hændelse  $A$ .

iv. Hvis  $A \subseteq B$ , så er  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ , og  $P(A) \leq P(B)$ , dvs.  $P$  er voksende.

v.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

#### BEVIS

Hvis vi i (2.1) sætter  $A_1 = \Omega$  og alle øvrige  $A$ -er til  $\emptyset$ , får man at  $P(\emptyset)$  må være lig 0. Derefter er det klart at  $\sigma$ -additivitet medfører endelig additivitet.

Den øvrige del af lemmaet vises på samme måde som i det endelige tilfælde (jf. beviset for lemma 1.1 side 12).  $\square$

Det næste lemma fortæller at selv om vi har at gøre med et tælleligt uendeligt udfaldsrum, så kan stort set al sandsynlighedsmassen lokaliseres til en endelig mængde.

#### LEMMA 2.2

Lad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  være et sandsynlighedsrum over det tællelige udfaldsrum  $\Omega$ . Da gælder at til ethvert  $\varepsilon > 0$  findes en endelig delmængde  $\Omega_0$  af  $\Omega$  således at  $P(\Omega_0) \geq 1 - \varepsilon$ .

#### BEVIS

Skriv elementerne i  $\Omega$  op i rækkefølge:  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ . Så er  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega_i\} = \Omega$ , og da  $P$  er

$\sigma$ -additiv, er  $\sum_{i=1}^{\infty} P(\{\omega_i\}) = P(\Omega) = 1$ . Da rækkens sum er 1, bliver afsnitssummen

før eller senere større end  $1 - \varepsilon$ , dvs. der findes et  $n$  således at  $\sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) \geq 1 - \varepsilon$ .

Mængden  $\Omega_0 = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  har da den ønskede egenskab.  $\square$

### Punktsandsynligheder

Punktsandsynligheder defineres på ganske tilsvarende måde som i det endelige tilfælde, jf. definition 1.2 side 13:

#### DEFINITION 2.2: PUNKTSANDSYNLIGHEDER

Lad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  være et sandsynlighedsrum over det tællelige udfaldsrum  $\Omega$ . Funktionen

$$\begin{aligned} p : \Omega &\longrightarrow [0; 1] \\ \omega &\longmapsto P(\{\omega\}) \end{aligned}$$

kaldes punktsandsynlighederne for  $P$ .

Nedenstående sætning kan vises på ganske samme måde som i det endelig tilfælde (side 13), dog kan summen nu have uendeligt mange led.

### SÆTNING 2.3

Hvis  $p$  er punktsandsynlighederne for sandsynligheds målet  $P$ , så gælder for en vilkårlig hændelse  $A \in \mathcal{F}$  at  $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ .

Bemærkninger: En konsekvens af sætningen er at to forskellige sandsynligheds mål ikke kan have samme punktsandsynlighedsfunktion. En anden konsekvens er at  $p$  summerer til 1, dvs.  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ ; det ser man ved at sætte  $A = \Omega$ .

Den næste sætning kan vises efter samme opskrift som i det endelige tilfælde (sætning 1.3 side 13), idet man udnytter at når man summerer uendelige rækker med ikke-negative led, er det tilladt at bytte vilkårligt meget om på summationsrækkefølgen.

### SÆTNING 2.4

Hvis  $p : \Omega \rightarrow [0; 1]$  summerer til 1, dvs.  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ , så findes præcis et sandsynligheds mål på  $\Omega$  der har  $p$  som sine punktsandsynligheder.

## Betingning, uafhængighed

Begreber som betinget sandsynlighed, betinget fordeling og uafhængighed defineres fuldstændig som i det endelige tilfælde, se side 14 og 16.

Det skal måske specielt bemærkes at Bayes' formel (jf. side 15) kan generaliseres på følgende måde: Hvis  $B_1, B_2, \dots$  er en klassedeling af  $\Omega$ , dvs.  $B$ -erne er parvis disjunkte med  $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ , og hvis  $A$  er en eller anden hændelse, så er

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A | B_i) P(B_i)}.$$

## Stokastiske variable

Stokastiske variable defineres på samme måde som i det endelige tilfælde. Der er dog den forskel at de nu kan antage uendeligt mange værdier.

Her er nogle eksempler på fordelinger på en tællelig delmængde af de reelle tal. Først nogle fordelinger som anvendes i konkrete modelleringssituationer hvor man modellerer antalsobservationer, og som vi vil se mere til i afsnit 2.3:

- *Poissonfordelingen* med parameter  $\mu > 0$  har sandsynlighedsfunktion

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!} \exp(-\mu), \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$



- Den geometriske fordeling med sandsynlighedsparameter  $p \in ]0; 1[$  har sandsynlighedsfunktion

$$f(x) = p(1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Den negative binomialfordeling med sandsynlighedsparameter  $p \in ]0; 1[$  og formparameter  $k > 0$  har sandsynlighedsfunktion

$$f(x) = \binom{x+k-1}{x} p^k (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Den logaritmiske fordeling med parameter  $p \in ]0; 1[$  har sandsynlighedsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{-\ln p} \frac{(1-p)^x}{x}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

Her er en anden type eksempel, der skal vise lidt om hvad den matematiske formalisme også handler om.

- En stokastisk variabels værdier kan godt være placeret lidt besynderligt på talaksen, man kan for eksempel definere  $X$  til at antage værdierne  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \dots, 0$  med sandsynlighederne

$$P\left(X = \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3 \cdot 2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{3},$$

$$P\left(X = -\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3 \cdot 2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Eksemplet viser blandt andet at selv om  $X$  antager uendeligt mange værdier, behøver disse ikke ligge uendeligt langt væk.

Begreberne fordelingsfunktion og sandsynlighedsfunktion defineres på samme måde som i det endelige tilfælde (definition 1.7 side 20 og definition 1.8 side 23), og lemma 1.5 og sætning 1.6 side 21 gælder uændret; beviset for sætning 1.6 skal ændres: enten kan man udnytte at en tællelig mængde »stort set« er endelig (lemma 2.2), eller også skal man benytte beviset for det generelle tilfælde (sætning 5.3).

Kriteriet for uafhængighed af stokastiske variable (sætning 1.8/korollar 1.9 side 24) gælder uforandret. Formlen for sandsynlighedsfunktionen for en sum af stokastiske variable (sætning 1.11 side 26) gælder ligeledes uændret.

## 2.2 Middelværdi

Lad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  være et sandsynlighedsrum over en tællelig mængde, og lad  $X$  være en reel stokastisk variabel på dette rum. Man kunne overveje at definere middelværdien af  $X$  på samme måde som i det endelige tilfælde (side 30), dvs. som tallet  $EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$  eller  $EX = \sum_x x f(x)$  hvor  $f$  er  $X$ 's sandsynlighedsfunktion. Dette er for så vidt også en udmærket idé, bortset fra at de indgående summer nu er uendelige summer med hvad dertil kan høre af konvergensproblemer.

*Eksempel 2.1*

Hvis  $\alpha > 1$ , er  $c(\alpha) = \sum_{x=1}^{\infty} x^{-\alpha}$  som bekendt et endeligt tal; derfor kan man have en stokastisk variabel  $X$  med sandsynlighedsfunktion  $f_X(x) = \frac{1}{c(\alpha)} x^{-\alpha}$ ,  $x = 1, 2, 3, \dots$ . Imidlertid er summen  $EX = \sum_{x=1}^{\infty} x f_X(x) = \frac{1}{c(\alpha)} \sum_{x=1}^{\infty} x^{-\alpha+1}$  kun et veldefineret endeligt tal når  $\alpha > 2$ . Når  $\alpha \in ]1; 2]$ , går sandsynlighedsfunktionen for langsomt mod 0 til at  $X$  kan have en middelværdi. Det er altså ikke alle stokastiske variable der kan tillægges en middelværdi.

Nogen ville måske foreslå at vi indførte  $+\infty$  og  $-\infty$  som tilladte værdier for  $EX$ , men det løser ikke alle problemer. Se for eksempel på en stokastisk variabel  $Y$  med værdimængde  $\mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$  og sandsynlighedsfunktion  $f_Y(y) = \frac{1}{2c(\alpha)} |y|^{-\alpha}$ ,  $y = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ; her er det ikke nemt at give et fornuftigt bud på hvad  $EY$  skal betyde.

**DEFINITION 2.3: MIDDELVÆRDI**

Lad  $X$  være en stokastisk variabel på  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Hvis summen  $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| P(\{\omega\})$  er endelig, så siges  $X$  at have middelværdi, og middelværdien af  $X$  er i så fald tallet  $EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$ .

**SÆTNING 2.5**

Lad  $X$  være en reel stokastisk variabel på  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , og lad  $f$  være sandsynlighedsfunktionen for  $X$ . Da gælder at  $X$  har middelværdi hvis og kun hvis summen  $\sum_x |x| f(x)$  er endelig, og i givet fald er  $EX = \sum_x x f(x)$ .

Vedr. bevis: Sætningen bevises efter samme principper som sætning 1.15 (side 30), dog skal man nu jonglere med uendelige summer.

Eksempel 2.1 viser at det ikke er alle stokastiske variable der har middelværdi. For at have styr på tingene indfører vi en særlig betingelse for mængden af stokastiske variable som har middelværdi.

**DEFINITION 2.4**

Mængden af stokastiske variable på  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  som har middelværdi, betegnes  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  eller  $\mathcal{L}^1(P)$  eller  $\mathcal{L}^1$ .

Der gælder (jf. sætning 1.16 side 31)

**SÆTNING 2.6**

Mængden  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  er et vektorrum (over  $\mathbb{R}$ ), og afbildningen  $X \mapsto EX$  er en lineær afbildning af dette vektorrum ind i  $\mathbb{R}$ .

Vedr. bevis: benyt regneregler for uendelige summer.

Resultaterne om middelværdier fra det endelige tilfælde generaliseres umiddelbart, dog skal det måske nævnes at sætning 1.17 side 31 kommer til at se sådan ud:

**SÆTNING 2.7**

Hvis  $X$  og  $Y$  er uafhængige stokastiske variable som begge har middelværdi, så gælder at  $XY$  også har middelværdi, og  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

Lemma 1.20 side 32 kommer til at se sådan ud:

LEMMA 2.8

Hvis  $A$  er en hændelse med  $P(A) = 0$ , og  $X$  er en stokastisk variabel, så har den stokastiske variabel  $X\mathbf{1}_A$  middelværdi, og  $E(X\mathbf{1}_A) = 0$ .

Den næste sætning fortæller at man kan ændre en stokastisk variabel på en mængde med sandsynlighed 0 uden at det spiller nogen rolle for dens middelværdi.

SÆTNING 2.9

Lad  $X$  og  $Y$  være stokastiske variable. Hvis  $X = Y$  med sandsynlighed 1, og hvis  $X \in \mathcal{L}^1$ , så er  $Y \in \mathcal{L}^1$  og  $E Y = E X$ .

BEVIS

Da  $Y = X + (Y - X)$ , er det (i henhold til sætning 2.6) nok at vise at  $Y - X \in \mathcal{L}^1$  og at  $E(Y - X) = 0$ . Sæt  $A = \{\omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\}$ . Eftersom  $Y(\omega) - X(\omega) = (Y(\omega) - X(\omega))\mathbf{1}_A(\omega)$  for alle  $\omega$ , følger det ønskede af lemma 2.8.  $\square$

Lemma 2.10 er en direkte konsekvens af majorantkriteriet for uendelige rækker:

LEMMA 2.10

Lad  $Y$  være en vilkårlig stokastisk variabel. Hvis der findes en ikke-negativ stokastisk variabel  $X \in \mathcal{L}^1$  således at  $|Y| \leq X$ , så er  $Y \in \mathcal{L}^1$ , og  $E Y \leq E X$ .

## Varians og kovarians

Kort fortalt er variansen af en stokastisk variabel  $X$  defineret som  $\text{Var}(X) = E(X - EX)^2$ , forudsat dette er et endeligt tal.

DEFINITION 2.5

Mængden af stokastiske variable  $X$  på  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  for hvilke  $E(X^2) < +\infty$ , betegnes  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  eller  $\mathcal{L}^2(P)$  eller  $\mathcal{L}^2$ .

Bemærk at  $X \in \mathcal{L}^2(P)$  hvis og kun hvis  $X^2 \in \mathcal{L}^1(P)$ .

LEMMA 2.11

Hvis  $X \in \mathcal{L}^2$  og  $Y \in \mathcal{L}^2$ , så er  $XY \in \mathcal{L}^1$ .

BEVIS

For vilkårlige reelle tal  $x$  og  $y$  er  $|xy| \leq x^2 + y^2$ . Dette benyttes sammen med lemma 2.10.  $\square$

SÆTNING 2.12

Mængden  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  er et underrum af  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , og dette underrum indeholder alle konstante stokastiske variable.

BEVIS

Hvis vi i lemma 2.11 sætter  $Y = X$ , får vi at  $\mathcal{L}^2 \subseteq \mathcal{L}^1$ .

Det er klart at hvis  $X \in \mathcal{L}^2$  og  $a$  er en konstant, så er  $aX \in \mathcal{L}^2$ , dvs.  $\mathcal{L}^2$  er afsluttet over for multiplikation med skalarer.

Hvis  $X, Y \in \mathcal{L}^2$ , så ligger  $X^2$ ,  $Y^2$  og  $XY$  alle i  $\mathcal{L}^1$  ifølge lemma 2.11. Dermed er  $(X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2 \in \mathcal{L}^1$ , dvs.  $X + Y \in \mathcal{L}^2$ . Da  $\mathcal{L}^2$  således også er afsluttet over for addition, er det et underrum.  $\square$

DEFINITION 2.6: VARIANS

Hvis  $E(X^2) < +\infty$ , så siges  $X$  at have en varians, og variansen af  $X$  er tallet

$$\text{Var}(X) = E((X - EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2.$$

DEFINITION 2.7: KOVARIANS

Hvis  $X$  og  $Y$  har varians, så er deres kovarians tallet

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY)).$$

Der gælder samme regneregler for varianser og kovarianser som i det endelige tilfælde (side 34ff).

SÆTNING 2.13: CAUCHY-SCHWARZ' ULIGHED

Hvis  $X$  og  $Y$  tilhører  $\mathcal{L}^2(P)$ , så er

$$(E|XY|)^2 \leq E(X^2) E(Y^2). \quad (2.2)$$

BEVIS

Fra lemma 2.11 ved vi at  $XY \in \mathcal{L}^1(P)$ . Herefter kan man gå frem på samme måde som i det endelige tilfælde (sætning 1.27 side 34).  $\square$

Hvis man i (2.2) erstatter  $X$  med  $X - EX$  og  $Y$  med  $Y - EY$ , får man

$$\text{Cov}(X, Y)^2 \leq \text{Var}(X) \text{Var}(Y).$$

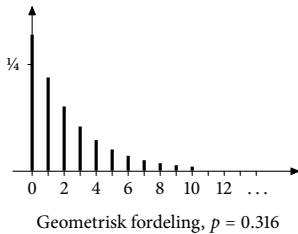
## 2.3 Eksempler

### Den geometriske fordeling

Man har et tilfældighedseksperiment med to mulige udfald 0 og 1 (eller Ugunstig og Gunstig); lad  $p$  betegne sandsynligheden for 1. Man gentager eksperimentet indtil udfaldet 1 indtræffer for første gang. Hvad kan man sige om antallet af gentagelser der skal til, før der første gang optræder et 1? Det er klart at der principielt ikke er nogen øvre grænse for antallet, så dette eksempel kan næppe modelleres med et endeligt sandsynlighedsrum. I øvrigt kan man heller ikke udelukke den mulighed at udfaldet 0 aldrig indtræffer!

## KVOTIENTRÆKKER

Hvis  $|t| < 1$ , er  $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ .



Vi vil tænke på (og tale om) tingene på den måde at grundeksperimentet udføres til tidspunkterne  $t = 1, 2, 3, \dots$ , og det der efterspørges, er ventetiden til der første gang kommer et 1. Vi sætter

$T_1 =$  første tidspunkt hvor der kommer et 1,

$V_1 = T_1 - 1 =$  antallet af 0-er inden det første 1.

Strengt taget kan vi ikke vide om der overhovedet kommer et 1; hvis der aldrig kommer et 1, sætter vi  $T_1 = \infty$  og  $V_1 = \infty$ . De mulige værdier for  $T_1$  er således  $1, 2, 3, \dots, \infty$ , og de mulige værdier for  $V_1$  er  $0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ .

Lad  $t \in \mathbb{N}_0$ . Hændelsen  $\{V_1 = t\}$  (eller  $\{T_1 = t + 1\}$ ) indtræffer netop når de  $t$  første gange giver 0 og nr.  $t + 1$  giver 1, så  $P(V_1 = t) = p(1-p)^t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Nu er (jf. formlen for summen af en kvotientrække)

$$P(V_1 \in \mathbb{N}_0) = \sum_{t=0}^{\infty} P(V_1 = t) = \sum_{t=0}^{\infty} p(1-p)^t = 1,$$

dvs.  $V_1$  (og  $T_1$ ) er endelig med sandsynlighed 1, eller sagt på en anden måde: med sandsynlighed 1 vil der før eller senere komme et 1.

Fordelingen af  $V_1$  er en geometrisk fordeling:

## DEFINITION 2.8: GEOMETRISK FORDELING

Den geometriske fordeling med parameter  $p$  er den fordeling på  $\mathbb{N}_0$  som har sandsynlighedsfunktion

$$f(t) = p(1-p)^t, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Vi kan udregne middelværdien i den geometriske fordeling:

$$\begin{aligned} E V_1 &= \sum_{t=0}^{\infty} t p(1-p)^t = p(1-p) \sum_{t=1}^{\infty} t(1-p)^{t-1} \\ &= p(1-p) \sum_{t=0}^{\infty} (t+1)(1-p)^t = \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

(jf. formlen for summen af en binomialrække). I middel vil der således komme  $(1-p)/p$  gange 0 før det første 1, og middelvektiden til første 1 er  $E T_1 = E V_1 + 1 = 1/p$ . – Variansen i den geometriske fordeling udregnes på lignende måde til  $(1-p)/p^2$ .

Sandsynligheden for at vi skal vente længere end  $t$  på at det første 1 indtræffer, er

$$P(T_1 > t) = \sum_{k=t+1}^{\infty} P(T_1 = k) = (1-p)^t.$$

Sandsynligheden for at vi skal vente længere end  $s + t$ , givet at vi allerede har ventet  $s$ , er

$$P(T_1 > s + t \mid T_1 > s) = \frac{P(T_1 > s + t)}{P(T_1 > s)} = (1-p)^t = P(T_1 > t),$$

dvs. fordelingen af den resterende ventetid afhænger ikke af hvor længe vi allerede har ventet – man taler om at den proces der genererer 0-erne og 1-erne, er *uden hukommelse*. (Det kan i øvrigt nævnes at eksponentialfordelingen er den fordeling på den kontinuerte tidsskala som har den tilsvarende egenskab, se side 63.)

Den »forskudte« geometriske fordeling er den eneste fordeling på  $\mathbb{N}$  med denne egenskab: Hvis  $T$  er en stokastisk variabel med værdier i  $\mathbb{N}$  og sådan at  $P(T > s + t) = P(T > s) P(T > t)$  for alle  $s, t \in \mathbb{N}$ , så er

$$P(T > t) = P(T > 1 + 1 + \dots + 1) = (P(T > 1))^t = (1 - p)^t$$

hvor  $p = 1 - P(T > 1) = P(T = 1)$ .

### Den negative binomialfordeling

Vi betragter samme situation som i afsnittet om den geometriske fordeling, blot ser vi nu på de stokastiske variable

$T_k =$  tidspunktet for det  $k$ -te 1

$V_k = T_k - k =$  antallet af 0-er inden det  $k$ -te 1.

Hændelsen  $\{V_k = t\}$  (eller  $\{T_k = t + k\}$ ) svarer til at der til tid  $t + k$  kommer et 1, og at der inden da er kommet netop  $k - 1$  gange et 1 og  $t$  gange et 0. Sandsynligheden for at der til tid  $t + k$  kommer et 1, er  $p$ ; sandsynligheden for at der de  $t + k - 1$  første gange kommer netop  $k - 1$  1-er og  $t$  0-er er binomialsandsynligheden  $\binom{t+k-1}{t} p^{k-1} (1-p)^t$ . Alt i alt er derfor

$$P(V_k = t) = \binom{t+k-1}{t} p^k (1-p)^t, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Fordelingen af  $V_k$  er en negativ binomialfordeling.

#### DEFINITION 2.9: NEGATIV BINOMIALFORDELING

Den negative binomialfordeling med sandsynlighedsparameter  $p \in ]0; 1[$  og formparameter  $k > 0$  er den fordeling på  $\mathbb{N}_0$  som har sandsynlighedsfunktion

$$f(t) = \binom{t+k-1}{t} p^k (1-p)^t, \quad t \in \mathbb{N}_0. \quad (2.3)$$

Bemærkninger: 1) For  $k = 1$  fås den geometriske fordeling. 2) I udledningerne ovenfor er  $k$  af gode grunde et heltal, men faktisk er udtrykket (2.3) veldefineret og en sandsynlighedsfunktion for vilkårlige positive reelle  $k$ .

#### SÆTNING 2.14

Hvis  $X$  og  $Y$  er uafhængige negativt binomialfordelte stokastiske variable med samme sandsynlighedsparameter  $p$  og med formparametre  $j$  og  $k$ , så er  $X + Y$  negativt binomialfordelt med sandsynlighedsparameter  $p$  og formparameter  $j + k$ .

#### BINOMIALRÆKKER

1. Der gælder

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k$$

for ethvert  $n \in \mathbb{N}$  og  $t \in \mathbb{R}$ .

2. Der gælder

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k$$

for ethvert  $\alpha \in \mathbb{R}$  og  $|t| < 1$ .

3. Der gælder

$$\begin{aligned} (1-t)^{-\alpha} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} (-t)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{k} t^k \end{aligned}$$

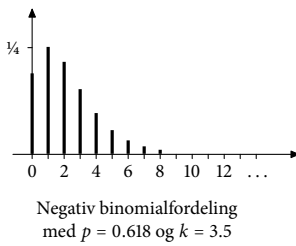
for ethvert  $\alpha \in \mathbb{R}$  og  $|t| < 1$ .

#### GENERALISEREDE BINOMIAL-KOEFFICIENTER

For vilkårligt  $r \in \mathbb{R}$  og  $k \in \mathbb{N}$  defineres tallet  $\binom{r}{k}$  som

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}.$$

(Hvis  $r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , stemmer denne definition overens med den kombinatoriske definition af binomialkoefficient (side 27).)



BEVIS

Vi har

$$\begin{aligned} P(X + Y = s) &= \sum_{x=0}^s P(X = x) P(Y = s - x) \\ &= \sum_{x=0}^s \binom{x+j-1}{x} p^j (1-p)^x \cdot \binom{s-x+k-1}{s-x} p^k (1-p)^{s-x} \\ &= p^{j+k} A(s) (1-p)^s \end{aligned}$$

hvor  $A(s) = \sum_{x=0}^s \binom{x+j-1}{x} \binom{s-x+k-1}{s-x}$ . Man kan nu give sig til at omskrive udtrykket for  $A(s)$  i det håb at man kan nå frem til det rigtige, men man kan heldigvis også slippe nemmere om ved det: Summen af sandsynlighederne er jo 1, dvs.  $\sum_{s=0}^{\infty} p^{j+k} A(s) (1-p)^s = 1$ , hvoraf  $p^{-(j+k)} = \sum_{s=0}^{\infty} A(s) (1-p)^s$ . Men vi ved også at  $p^{-(j+k)} = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+j+k-1}{s} (1-p)^s$ , enten fra formelen for summen af en binomialrække eller fra det forhold at sandsynlighedsfunktionen for den negative binomialfordeling med parametre  $p$  og  $j+k$  summerer til 1. Da en funktions potensrækkeudvikling er entydig, kan vi heraf slutte at  $A(s) = \binom{s+j+k-1}{s}$ , og at  $X+Y$  derfor har den påståede fordeling.  $\square$

Sætningen bliver i øvrigt gjort plausibel ved følgende ræsonnement (som inden for rammerne af en generel teori for stokastiske processer kan udbygges til et rigtigt bevis): Antal 0-er inden det  $(j+k)$ -te 1 er lig antal 0-er inden det  $j$ -te 1 plus antal 0-er i perioden fra det  $j$ -te 1 til det  $(j+k)$ -te 1; da værdierne til de enkelte tidspunkter genereres uafhængigt af hinanden, og da den regel der bestemmer ophøret af den første periode ikke afhænger af antallet af 0-er, er antal 0-er i den anden periode uafhængigt af antallet af 0-er i den første periode, og de er hver især negativt binomialfordelt.

Middelværdi og varians i den negative binomialfordeling er hhv.  $k(1-p)/p$  og  $k(1-p)/p^2$ , jf. eksempel 4.5 side 73. Det forventede antal 0-er inden det  $k$ -te 1 er derfor  $E V_k = k(1-p)/p$ , og den forventede ventetid til det  $k$ -te 1 er  $E T_k = k + E V_k = k/p$ .

### Poissonfordelingen

Antag at en bestemt slags begivenheder indtræffer »helt tilfældigt« på noget vi vil kalde tidsaksen. Begivenhederne kan være jordskælv, dødsfald som følge af en bestemt ikke-epidemisk sygdom, trafikulykker i et bestemt vejkryds, partikler fra den kosmiske stråling,  $\alpha$ -partikler der udsendes fra et radioaktivt stof, osv. osv. Man kan beskæftige sig med forskellige spørgsmål i den forbindelse, f.eks. hvad kan man sige om antallet af begivenheder i et bestemt tidsinterval, og hvad kan man sige om ventetiden fra en begivenhed til den næste. Det følgende handler om antallet af begivenheder i et bestemt interval.

Lad os se på et interval  $]a; b]$  på tidsaksen. Vi vil gå ud fra at begivenhederne ikke alene indtræffer »helt tilfældigt«, men også at den rate hvormed de optræder, er konstant i de betragtede tidsrum (hvad dette nærmere skal betyde, vil fremgå senere). Vi kan lave en approksimation til den »helt tilfældige« placering på den måde at vi deler intervallet op i et meget stort antal meget små intervaller, lad os sige  $n$  intervaller af længde  $\Delta t = (b - a)/n$ , og så for hvert enkelt interval lader en tilfældighedsmekanisme bestemme om det skal indeholde en begivenhed eller ej; sandsynligheden for at et givet interval får tildelt en begivenhed, skal være  $p(\Delta t)$ , og forskellige intervaller behandles uafhængigt af hinanden. Sandsynligheden  $p(\Delta t)$  knyttet til det enkelte lille interval afhænger ikke af intervallets placering i det store interval, kun af det lille intervals længde  $\Delta t$ . På den måde bliver det samlede antal begivenheder i det store interval binomialfordelt med sandsynlighedsparameter  $p(\Delta t)$  og antalsparameter  $n$  – og det er kun det samlede antal begivenheder vi er interesserede i.

Hvis  $n$  er meget stor, må man formode at vi får en god tilnærmelse til »det rigtige«. Vi vil derfor lade  $n$  gå mod uendelig; samtidig skal  $p(\Delta t)$  gå mod 0 på en eller anden måde; en nærliggende måde at lade den gå mod 0 på er at lade det foregå sådan at middelværdien i binomialfordelingen er (eller går mod) et bestemt endeligt tal  $\lambda(b - a)$ . Middelværdien i vores binomialfordeling er  $np(\Delta t) = ((b - a)/\Delta t)p(\Delta t) = \frac{p(\Delta t)}{\Delta t}(b - a)$ , så forslaget er at  $p(\Delta t)$  skal gå mod 0 på en sådan måde at  $\frac{p(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow \lambda$  hvor  $\lambda$  er en positiv konstant.

Parameteren  $\lambda$  skal fortolkes som den rate eller intensitet hvormed begivenhederne indtræffer, og den har dimension antal pr. tid. I demografiske og forsikringsmatematiske sammenhænge har den undertiden det maleriske navn *dødelighedsstyrke* (eng.: force of mortality).

Ved den beskrevne grænseovergang vil binomialsandsynlighederne ifølge nedenstående sætning (sætning 2.15) konvergere mod poissonsandsynligheder.

#### DEFINITION 2.10: POISSONFORDELING

*Poissonfordelingen med parameter  $\mu > 0$  er den fordeling på  $\mathbb{N}_0$  som har sandsynlighedsfunktion*

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!} \exp(-\mu), \quad x \in \mathbb{N}_0.$$

(At  $f$  summerer til 1, følger af eksponentialfunktionens rækkeudvikling.)

Middelværdien i poissonfordelingen med parameter  $\mu$  er  $\mu$ , og variansen er også lig  $\mu$ ; hvis  $X$  er poissonfordelt, er altså  $\text{Var } X = E X$ . – Vi har tidligere set at hvis  $X$  er binomialfordelt med parametre  $n$  og  $p$ , så er  $\text{Var } X = (1 - p) E X$ , dvs.  $\text{Var } X < E X$ , og at hvis  $X$  er negativt binomialfordelt med parametre  $k$  og  $p$ , så er altså  $p \text{Var } X = E X$ , dvs.  $\text{Var } X > E X$ .

#### SÆTNING 2.15

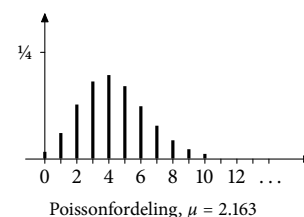
*Under den grænseovergang hvor  $n \rightarrow \infty$  og  $p \rightarrow 0$  på en sådan måde at  $np$*

SIMÉON-DENIS POISSON  
Fransk matematiker og fysiker  
(1781–1842).

#### EKSPONENTIALFUNKTIONENS RÆKKEUDVIKLING

For alle (reelle og komplekse)  $t$

$$\text{gælder at } \exp(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$





konvergerer mod  $\mu > 0$ , vil binomialfordelingen med parametre  $n$  og  $p$  konvergere mod poissonfordelingen med parameter  $\mu$  i den forstand at

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \longrightarrow \frac{\mu^x}{x!} \exp(-\mu)$$

for ethvert  $x \in \mathbb{N}_0$ .

BEVIS

Lad  $x \in \mathbb{N}_0$  være givet. Vi har at

$$\begin{aligned} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} &= \frac{n(n-1) \dots (n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{-x} (1-p)^n \\ &= \frac{1(1-\frac{1}{n}) \dots (1-\frac{x-1}{n})}{x!} (np)^x (1-p)^{-x} (1-p)^n \end{aligned}$$

Da  $x$  er fast, gælder at den store brøk konvergerer mod  $1/x!$ ,  $(np)^x$  konvergerer mod  $\mu^x$ , og  $(1-p)^{-x}$  konvergerer mod 1. Grænseværdien af  $(1-p)^n$  findes let ved at se på logaritmen til den:

$$\ln((1-p)^n) = n \ln(1-p) = -np \cdot \frac{\ln(1-p) - \ln(1)}{-p} \longrightarrow -\mu$$

fordi brøken konvergerer mod differentialkvotienten af  $\ln(t)$  i  $t = 1$ , som er 1. Altså konvergerer  $(1-p)^n$  mod  $\exp(-\mu)$ , og sætningen er vist.  $\square$

SÆTNING 2.16

Hvis  $X_1$  og  $X_2$  er uafhængige poissonfordelte stokastiske variable med parametre  $\mu_1$  og  $\mu_2$ , så er  $X_1 + X_2$  poissonfordelt med parameter  $\mu_1 + \mu_2$ .

BEVIS

Vi sætter  $Y = X_1 + X_2$ . Så er (jf. sætning 1.11 side 26)

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= \sum_{x=0}^y P(X_1 = y-x) P(X_2 = x) \\ &= \sum_{x=0}^y \frac{\mu_1^{y-x}}{(y-x)!} \exp(-\mu_1) \frac{\mu_2^x}{x!} \exp(-\mu_2) \\ &= \frac{1}{y!} \exp(-(\mu_1 + \mu_2)) \sum_{x=0}^y \binom{y}{x} \mu_1^{y-x} \mu_2^x \\ &= \frac{1}{y!} \exp(-(\mu_1 + \mu_2)) (\mu_1 + \mu_2)^y. \end{aligned}$$

$\square$

## 2.4 Opgaver

### Opgave 2.1

Bevis sætning 2.4 på side 45.

### Opgave 2.2

I definitionen på varians i det tællelige tilfælde (definition 2.6 side 49) går man tilsyneladende ud fra at  $E((X - EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2$ . Gør rede for at denne formel er rigtig.

### Opgave 2.3

Eftervis formlen  $\text{Var } X = E(X(X-1)) - \xi(\xi-1)$ , hvor  $\xi = EX$ .

### Opgave 2.4

Skitsér poissonfordelingens sandsynlighedsfunktion for forskellige værdier af parameteren  $\mu$ .

### Opgave 2.5

Udregn middelværdi og varians i poissonfordelingen med parameter  $\mu$ . (Benyt evt. opgave 2.3.)

### Opgave 2.6

Vis at hvis  $X_1$  og  $X_2$  er uafhængige poissonfordelte med parametre  $\mu_1$  og  $\mu_2$ , så er den betingede fordeling af  $X_1$  givet  $X_1 + X_2$  en binomialfordeling.

### Opgave 2.7

Skitsér den negative binomialfordelings sandsynlighedsfunktion for forskellige værdier af  $k$  og  $p$ .

### Opgave 2.8

Betragt den negative binomialfordeling med parametre  $k$  og  $p$ , hvor  $k > 0$  og  $p \in ]0; 1[$ . Som nævnt i teksten er middelværdi og varians i denne fordeling hhv.  $k(1-p)/p$  og  $k(1-p)/p^2$ .

Gør rede for at man kan lave en grænseovergang med parametrene  $k$  og  $p$  sådan at middelværdien er konstant og variansen konvergerer mod middelværdien.

Vis at ved denne grænseovergang vil den negative binomialfordelings sandsynlighedsfunktion konvergere mod sandsynlighedsfunktionen for en poissonfordeling.

### Opgave 2.9

Gør rede for at definitionen på kovarians (definition 2.7 side 49) er meningsfuld, dvs. at antagelsen om at  $X$  og  $Y$  har varians, sikrer at  $E((X - EX)(Y - EY))$  eksisterer.

### Opgave 2.10

Lad os sige at på en given dag er antallet af personer der kører med S-toget uden billet, poissonfordelt med parameter  $\mu$ , og lad os sige at der er sandsynligheden  $p$  for at en gratist bliver taget af billetkontrollen, og at de enkelte gratister bliver taget/ikke taget uafhængigt af hinanden. Hvad kan man heraf udlede om antallet af gratister der bliver taget af kontrollen?

Hvilke informationer skal man bruge for ud fra det konstaterede antal personer uden billet at kunne udtale sig om det faktiske antal uden billet?

### Opgave 2.11: Sankt Petersborg-paradokset

En spiller vil deltage i et spil hvor de enkelt omgange foregår på følgende måde: hvis

man betaler en indsats på  $k$  €, så vil man med sandsynlighed  $\frac{1}{2}$  vinde  $2k$  € og med sandsynlighed  $\frac{1}{2}$  tabe sin indsats. Spilleren vil nu benytte en snedig strategi: han begynder med at satse 1 €; hvis han taber i en given omgang, satser han det dobbelte i næste omgang; hvis han vinder, får han udbetalt gevinsten og går hjem.

Hvor stor bliver hans nettogevinst?

Hvor mange spil skal der til før han kan gå hjem?

Selv om spilleren er sikker på at gå hjem med overskud, så skal han jo bruge noget kapital undervejs. Hvor mange penge skal han have med hjemmefra for at kunne »overleve« indtil han vinder?

*Opgave 2.12*

Bevis sætning 2.7 side 47.

*Opgave 2.13*

Som bekendt (sætning 2.7) kan middelværdien af et produkt af to uafhængige stokastiske variable udtrykkes på simpel vis ved de enkelte variables middelværdi.

Udled et lignende resultat om variansen af to uafhængige variable. – Er uafhængighedsantagelsen væsentlig?

### 3 Kontinuerte fordelinger

I DE FORRIGE KAPITLER har vi mødt stokastiske variable/sandsynlighedsfordelinger som rent faktisk er koncentreret på en endelig eller tællelig delmængde af de reelle tal; sådanne variable/fordelinger kaldes ofte diskrete variable/fordelinger. Der findes imidlertid også fordelinger med den egenskab at der er et interval (eller flere intervaller) på  $\mathbb{R}$  hvor enhver åben delmængde har positiv sandsynlighed, men ethvert punkt har sandsynlighed 0.

Eksempel: Når man leger flaskeleg, roterer man flasken for at få valgt en tilfældig retning; den person der uheldigvis sidder i den retning som flasken peger, skal gøre et eller andet nærmere aftalt som legen nu går ud på. Vi vil straks ødelægge det hele ved at modellere den roterende flaske ved »et punkt på enhedscirklen, valgt tilfældigt efter en ligefordeling«; hvad man helt præcist skal forstå ved det, er indtil videre ikke ganske klart, men det må blandt andet betyde at en cirkelbue af længde  $b$  får tildelt samme mængde sandsynlighed, lige meget hvor på cirklen den (altså buen) er placeret, og gad vist om ikke den mængde sandsynlighed den skal tildeles, er  $b/2\pi$ . Da et givet punkt på cirkelperiferien er indeholdt i cirkelbuer af vilkårlig lille længde, må punktet selv have sandsynlighed 0.

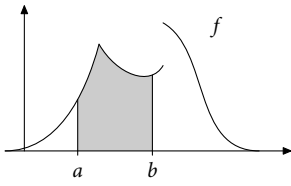
Man kan bevise at der er en entydig sammenhæng mellem på den ene side sandsynlighedsmål på  $\mathbb{R}$  og på den anden side fordelingsfunktioner, dvs. voksende og højrekontinuerte funktioner der går mod 0 hhv. 1 i  $-\infty$  hhv.  $+\infty$ , jf. sætning 1.6 og/eller sætning 5.3. Sammenhængen er kort fortalt at for ethvert halvåbent interval  $]a; b]$  er  $P(]a; b]) = F(b) - F(a)$ . – Nu kan det matematiske raritetskabinet fremvise temmelig besynderlige funktioner der opfylder betingelserne for at være en fordelingsfunktion, men frygt ikke! I dette kapitel vil vi se på nogle yderst pæne fordelinger, nemlig de såkaldte kontinuerte fordelinger eller fordelinger med en tæthedsfunktion.

#### 3.1 Grundlæggende definitioner

DEFINITION 3.1: SANDSYNLIGHEDSTÆTHEDSFUNKTION

En sandsynlighedstæthedsfunktion på  $\mathbb{R}$  er en integrabel funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty[$  der integrerer til 1, dvs.  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ .

Mere generelt er en sandsynlighedstæthedsfunktion på  $\mathbb{R}^d$  en integrabel funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0; +\infty[$  der integrerer til 1, dvs.  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = 1$ .



$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

**DEFINITION 3.2: KONTINUERT FORDELING**

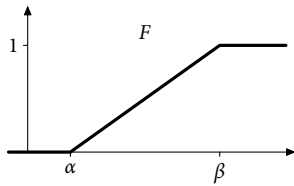
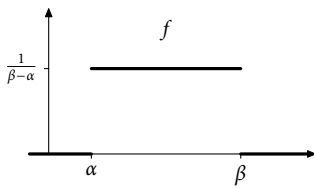
En kontinuert sandsynlighedsfordeling er en sandsynlighedsfordeling som har en sandsynlighedstæthedsfunktion: Hvis  $f$  er en sandsynlighedstæthedsfunktion på  $\mathbb{R}$ , så er den kontinuerte funktion  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$  fordelingsfunktion for en kontinuert fordeling på  $\mathbb{R}$ .

Man siger at en stokastisk variabel  $X$  har tæthedsfunktion  $f$ , hvis det er sådan at fordelingsfunktionen  $F(x) = P(X \leq x)$  for  $X$  er af formen  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$ . Vi minder om at i så fald er  $F'(x) = f(x)$  for alle kontinuitetspunkter  $x$  for  $f$ .

**SÆTNING 3.1**

Antag at  $X$  er en stokastisk variabel med tæthedsfunktion  $f$ . Så gælder

1.  $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ .
2.  $P(X = x) = 0$  for alle  $x \in \mathbb{R}$ .
3.  $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$ .
4. Hvis  $f$  er kontinuert i  $x$ , kan  $f(x) dx$  opfattes som sandsynligheden for at  $X$  ligger i et infinitesimalt interval af længde  $dx$  omkring  $x$ .



Tæthedsfunktion og fordelingsfunktion for ligefordelingen på intervallet fra  $\alpha$  til  $\beta$ .

**BEVIS**

Det første punkt følger af definitionerne på fordelingsfunktion og tæthedsfunktion. Det andet punkt følger af at

$$0 \leq P(X = x) \leq P(x - \frac{1}{n} < X \leq x) = \int_{x-1/n}^x f(u) du,$$

hvor integralet går mod 0 når  $n$  går mod uendelig. Det tredje punkt følger af de to første. En præcis formulering af punkt 4 er at

$$\frac{1}{2\varepsilon} P(x - \varepsilon < X < x + \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(u) du \longrightarrow f(x)$$

når  $\varepsilon \rightarrow 0$  og  $x$  er et kontinuitetspunkt for  $f$ ; dette er et velkendt resultat fra analysen.  $\square$

**Eksempel 3.1: Ligefordeling**

Ligefordelingen på intervallet fra  $\alpha$  til  $\beta$  (hvor  $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ ) er den fordeling som har tæthedsfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{for } \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Dens fordelingsfunktion er den stykkevis lineære funktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \text{for } \alpha < x < \beta \\ 1 & \text{for } x \geq \beta. \end{cases}$$

Ud fra en ligefordeling på et interval kan vi i øvrigt få den førnævnte ligefordeling på enhedscirklen, nemlig ved at tage ligefordelingen på  $]0; \pi[$  og flytte den over på enhedscirklen.

**DEFINITION 3.3:** FLERDIMENSIONAL KONTINUERT FORDELING

Den  $d$ -dimensionale stokastiske variabel  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  siges at have tæthedsfunktion  $f$ , hvis det er sådan at  $f$  er en  $d$ -dimensional tæthedsfunktion, og det for alle intervaller  $K_i = ]a_i; b_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ , gælder at

$$P\left(\bigcap_{i=1}^d \{X_i \in K_i\}\right) = \int_{K_1 \times K_2 \times \dots \times K_d} f(x_1, x_2, \dots, x_d) dx_1 dx_2 \dots dx_d.$$

Funktionen  $f$  kaldes den simultane tæthedsfunktion for  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Mange begreber og definitioner (og sætninger) fra det diskrete tilfælde kan overføres til det kontinuerte tilfælde ved at man kort fortalt erstatter sandsynlighedsfunktioner med tæthedsfunktioner og summer med integraler. Eksempler:

Som pendant til sætning 1.8/korollar 1.9 har vi

**SÆTNING 3.2**

De stokastiske variable  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uafhængige hvis og kun hvis deres simultane tæthedsfunktion kan skrives som et produkt af tæthedsfunktionerne for de enkelte  $X_i$ -er.

Som pendant til sætning 1.11 har vi

**SÆTNING 3.3**

Hvis de stokastiske variable  $X_1$  og  $X_2$  er uafhængige og med tæthedsfunktioner  $f_1$  og  $f_2$ , så har  $Y = X_1 + X_2$  tæthedsfunktion

$$f(y) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x) f_2(y-x) dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(Se opgave 3.6.)

## Transformation af fordelinger

Spørgsmålet om transformation af fordelinger handler nu som før om hvad man kan sige om fordelingen af  $Y = t(X)$  når man kender fordelingen af  $X$ , og når  $t$  er en afbildning defineret på  $X$ 's værdimængde. Man kan altid benytte den grundlæggende opskrift  $P(t(X) \leq y) = P(X \in t^{-1}(]-\infty; y]))$ .

*Eksempel 3.2*

Antag at  $X$  er ligefordelt på  $] -1; 1[$ . Vi vil finde fordelingen af  $Y = X^2$ .

For  $y \in [0; 1]$  er  $P(X^2 \leq y) = P(X \in [-\sqrt{y}; \sqrt{y}]) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \sqrt{y}$ , så  $Y$  har fordelingsfunktion

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y \leq 0, \\ \sqrt{y} & \text{for } 0 < y \leq 1, \\ 1 & \text{for } y > 1. \end{cases}$$

Vi kan finde en tæthedsfunktion  $f$  for  $Y$  ved at differentiere  $F$  (i de punkter hvor den er differentiabel):

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y^{-1/2} & \text{for } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Hvis  $t$  er differentiabel, kan man i visse situationer opskrive en sammenhæng mellem tæthedsfunktionen for  $X$  og tæthedsfunktionen for  $Y = t(X)$ . Der er tale om en direkte overførsel af resultater om substitution i integraler, hentet fra den matematiske analyse:

#### SÆTNING 3.4

Antag at  $X$  er en reel stokastisk variabel,  $I$  en åben delmængde af  $\mathbb{R}$  således at  $P(X \in I) = 1$ , og  $t : I \rightarrow \mathbb{R}$  en  $C^1$ -funktion defineret på  $I$  med  $t' \neq 0$  overalt på  $I$ . Hvis  $X$  har tæthedsfunktion  $f_X$ , så har  $Y = t(X)$  tæthedsfunktion

$$f_Y(y) = f_X(x) |t'(x)|^{-1} = f_X(x) |(t^{-1})'(y)|$$

hvor  $x = t^{-1}(y)$  og  $y \in t(I)$ . Formlen skrives undertiden på den korte form

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|.$$

Der findes også en flerdimensional udgave:

#### SÆTNING 3.5

Antag at  $\mathbf{X}$  er en  $d$ -dimensional stokastisk variabel,  $I$  en åben delmængde af  $\mathbb{R}^d$  således at  $P(\mathbf{X} \in I) = 1$ , og  $\mathbf{t} : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  en  $C^1$ -funktion defineret på  $I$  og med en funktionsmatrix  $D\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}$  som er regulær på hele  $I$ . Hvis  $\mathbf{X}$  har tæthedsfunktion  $f_X$ , så har  $\mathbf{Y} = \mathbf{t}(\mathbf{X})$  tæthedsfunktion

$$f_Y(\mathbf{y}) = f_X(\mathbf{x}) |\det D\mathbf{t}(\mathbf{x})|^{-1} = f_X(\mathbf{x}) |\det D\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{y})|$$

hvor  $\mathbf{x} = \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{y})$  og  $\mathbf{y} \in \mathbf{t}(I)$ . Formlen skrives undertiden på den korte form

$$f_Y(\mathbf{y}) = f_X(\mathbf{x}) \left| \det \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{y}} \right|.$$

#### Eksempel 3.3

Hvis  $X$  er ligefordelt på  $]0; 1[$ , så har  $Y = -\ln X$  tæthedsfunktion

$$f_Y(y) = 1 \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| = \exp(-y)$$

når  $0 < x < 1$ , dvs. når  $0 < y < +\infty$ , og  $f_Y(y) = 0$  ellers. – Fordelingen af  $Y$  er således en eksponentialfordeling, se afsnit 3.3.

## BEVIS FOR SÆTNING 3.4

Sætningen er en omformulering af et resultat fra den matematiske analyse om substitution i integraler. – Da den afledede af funktionen  $t$  er kontinuert og altid forskellig fra 0, er  $t$  enten strengt voksende eller strengt aftagende; vi antager at den er strengt voksende. Da er  $Y \leq b \Leftrightarrow X \leq t^{-1}(b)$ , så vi får følgende udtryk for fordelingsfunktionen  $F_Y$  for  $Y$ :

$$\begin{aligned} F_Y(b) &= P(Y \leq b) \\ &= P(X \leq t^{-1}(b)) \\ &= \int_{-\infty}^{t^{-1}(b)} f_X(x) dx \quad [\text{substitution } x = t^{-1}(y)] \\ &= \int_{-\infty}^b f_X(t^{-1}(y)) (t^{-1})'(y) dy. \end{aligned}$$

Dette viser at funktionen  $f_Y(y) = f_X(t^{-1}(y)) (t^{-1})'(y)$  har den egenskab at  $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(u) du$ , dvs.  $Y$  har tæthedsfunktion  $f_Y$ .  $\square$

**Betingning**

Hvis man har to kontinuerte stokastiske variable  $X$  og  $Y$  og søger den betingede fordeling af  $X$  givet  $Y$ , kan man ikke bare gå ud fra at udtrykket  $P(X = x | Y = y)$  uden videre er veldefineret og lig med  $P(X = x, Y = y) / P(Y = y)$ ; nævneren  $P(Y = y)$  er altid nul, og det er tælleren ofte også.

I stedet kan man forsøge sig med at betinge med en velvalgt hændelse med positiv sandsynlighed, f.eks  $y - \varepsilon < Y < y + \varepsilon$ , og undersøge om den (veldefinerede) betingede sandsynlighed  $P(X \leq x | y - \varepsilon < Y < y + \varepsilon)$  har en grænseværdi for  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; hvis det er tilfældet, kunne man formode at grænseværdien ville være  $P(X \leq x | Y = y)$ .

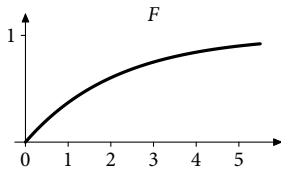
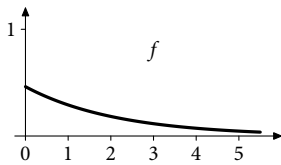
En anden, mere heuristisk tilgang til problemet er som følger: lad  $f_{XY}$  være den simultane tæthedsfunktion for  $(X, Y)$  og lad  $f_Y$  være tæthedsfunktionen for  $Y$ . Sandsynligheden for at  $(X, Y)$  ligger i et infinitesimalt rektangel med kantlængder  $dx$  og  $dy$  omkring  $(x, y)$  er da  $f_{XY}(x, y) dx dy$ , og sandsynligheden for at  $Y$  ligger i et infinitesimalt interval af længde  $dy$  omkring  $y$  er  $f_Y(y) dy$ ; den betingede sandsynlighed for at  $X$  ligger i et infinitesimalt interval af længde  $dx$  omkring  $x$ , givet at  $Y$  ligger i et infinitesimalt interval af længde  $dy$  omkring  $y$ , er dermed  $\frac{f_{XY}(x, y) dx dy}{f_Y(y) dy} = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} dx$ , så den betingede tæthed kunne formodes at være

$$f(x | y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Dette er faktisk også rigtigt i mange situationer.

Ovenstående omtale af betingede fordelinger i forbindelse med kontinuerte fordelinger er naturligvis overordentlig lemfældig; der findes matematiske rammer inden for hvilke man kan fremsætte præcise og rigtige udsagn om disse spørgsmål, men dem kommer vi ikke ind på i nærværende fremstilling.





Tæthedsfunktion og  
fordelingsfunktion for  
eksponentialfordelingen  
med  $\beta = 2.163$ .

### 3.2 Middelværdi

Middelværdien af en stokastisk variabel med tæthedsfunktion defineres på lignende måde som for stokastiske variable på et tælleligt udfaldsrum, blot erstattes sumtegnet med et integraltegn.

DEFINITION 3.4: MIDDELVÆRDI

Lad  $X$  være en stokastisk variabel med tæthedsfunktion  $f$ .

Hvis  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx < +\infty$ , så siges  $X$  at have en middelværdi, og middelværdien

af  $X$  defineres da som tallet  $E X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ .

Sætninger/regneregler for middelværdi og varians fra det tællelige tilfælde kan uden videre overføres.

### 3.3 Eksempler

#### Ekspontialfordelingen

DEFINITION 3.5: EKSPONENTIALFORDELING

Ekspontialfordelingen med skalaparameter  $\beta > 0$  er fordelingen med tæthedsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \exp(-x/\beta) & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0. \end{cases}$$

Fordelingsfunktionen er

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x/\beta) & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0. \end{cases}$$

At  $\beta$  er en skalaparameter, fremgår af følgende sætning:

SÆTNING 3.6

Hvis  $X$  er eksponentialfordelt med skalaparameter  $\beta$ , og hvis  $a > 0$ , så er  $aX$  eksponentialfordelt med skalaparameter  $a\beta$ .

BEVIS

Ifølge sætning 3.4 er tætheden for  $Y = aX$  funktionen  $f_Y$  givet ved

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \exp(-(y/a)/\beta) \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a\beta} \exp(-y/(a\beta)) & \text{for } y > 0 \\ 0 & \text{for } y \leq 0. \end{cases}$$

□

SÆTNING 3.7

Hvis  $X$  er eksponentialfordelt med skalaparameter  $\beta$ , er  $E X = \beta$  og  $\text{Var } X = \beta^2$ .

## BEVIS

Da  $\beta$  er en skalaparameter, er det (jf. regnereglerne for middelværdi og varians) nok at vise påstanden for  $\beta = 1$ . Dette kan gøres ved almindelig udregning, brug evt. formelen sidst i sidebemærkningen om Gammafunktionen.  $\square$

Eksponentialfordelingen benyttes ofte til at modellere ventetider mellem på hinanden følgende begivenheder, når disse begivenheder indtræffer »helt tilfældigt«. Eksponentialfordelingen er »uden hukommelse« i den forstand at sandsynligheden for at man skal vente længere end  $s + t$ , givet at man allerede har ventet  $s$ , er den samme som sandsynligheden for at man skal vente længere end  $t$ , dvs. hvis  $X$  er eksponentialfordelt, så gælder

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t), \quad s, t > 0. \quad (3.1)$$

## BEVIS FOR FORMEL (3.1)

Da  $X > s + t \Rightarrow X > s$ , er  $\{X > s + t\} \cap \{X > s\} = \{X > s + t\}$  og dermed

$$\begin{aligned} P(X > s + t \mid X > s) &= \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)} \\ &= \frac{\exp(-(s + t)/\beta)}{\exp(-s/\beta)} = \exp(-t/\beta) = P(X > t) \end{aligned}$$

for vilkårlige  $s, t > 0$ .  $\square$

Eksponentialfordelingen er på denne måde det kontinuerte modstykke til den geometriske fordeling, se side 51.

Endvidere er eksponentialfordelingen også beslægtet med poissonfordelingen. Antag at en type begivenheder indtræffer tilfældigt på den måde som er beskrevet i afsnittet om poissonfordelingen (side 52). Det at man skal vente mere end  $t$  på den første begivenhed, er det samme som at der i intervallet fra tid 0 til tid  $t$  indtræffer 0 begivenheder. Sandsynligheden for det sidstnævnte kan udregnes inden for poissonmodellens rammer til  $\frac{(\lambda t)^0}{0!} \exp(-\lambda t) = \exp(-\lambda t)$ , dvs. ventetiden til første begivenhed er eksponentialfordelt med parameter  $1/\lambda$ .

## Gammafordelingen

## DEFINITION 3.6: GAMMAFORDELING

Gammafordelingen med formparameter  $k > 0$  og skalaparameter  $\beta > 0$  er fordelingen med tæthedsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k)\beta^k} x^{k-1} \exp(-x/\beta) & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0. \end{cases}$$

Tilfældet  $k = 1$  giver eksponentialfordelingen.

## GAMMA-FUNKTIONEN

Gammafunktionen er funktionen

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} \exp(-x) dx$$

hvor  $t > 0$ . (Faktisk er det muligt at definere  $\Gamma(t)$  for alle  $t \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ .)

Der gælder

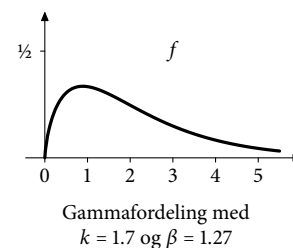
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(t + 1) = t \Gamma(t)$  for alle  $t$
- $\Gamma(n) = (n - 1)!$  når  $n$  er et naturligt tal.
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

(Se også side 67.)

Ved almindelig integralsubstitution får man følgende formel:

$$\Gamma(k) \beta^k = \int_0^{+\infty} x^{k-1} \exp(-x/\beta) dx$$

der gælder for  $k > 0$  og  $\beta > 0$ .



## BETA-FUNKTIONEN

Beta-funktionen er funktionen

$$B(k_1, k_2) = \int_0^1 u^{k_1-1} (1-u)^{k_2-1} du,$$

hvor  $k_1, k_2 > 0$ . Af beviset for sætning 3.9 får vi som en sidegevinst at

$$B(k_1, k_2) = \frac{\Gamma(k_1) \Gamma(k_2)}{\Gamma(k_1 + k_2)}$$

for  $k_1, k_2 > 0$ .

## SÆTNING 3.8

Hvis  $X$  er gammafordelt med formparameter  $k$  og skalaparameter  $\beta$ , og hvis  $a > 0$ , så er  $Y = aX$  gammafordelt med formparameter  $k$  og skalaparameter  $a\beta$ .

## BEVIS

På samme måde som sætning 3.6, dvs. ved brug af sætning 3.4.  $\square$

## SÆTNING 3.9

Hvis  $X_1$  og  $X_2$  er uafhængige gammafordelte med formparametre hhv.  $k_1$  og  $k_2$  og med samme skalaparameter  $\beta$ , så er  $X_1 + X_2$  gammafordelt med formparameter  $k_1 + k_2$  og skalaparameter  $\beta$ .

## BEVIS

Ifølge sætning 3.3 er tætheden for  $Y = X_1 + X_2$  (når  $y > 0$ )

$$f(y) = \int_0^y \frac{1}{\Gamma(k_1)\beta^{k_1}} x^{k_1-1} \exp(-x/\beta) \cdot \frac{1}{\Gamma(k_2)\beta^{k_2}} (y-x)^{k_2-1} \exp(-(y-x)/\beta) dx.$$

Ved at foretage substitutionen  $u = x/y$  i integralet får vi

$$f(y) = \left( \frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\beta^{k_1+k_2}} \int_0^1 u^{k_1-1} (1-u)^{k_2-1} du \right) y^{k_1+k_2-1} \exp(-y/\beta).$$

Tætheden er altså af formen  $f(y) = \text{konst } y^{k_1+k_2-1} \exp(-y/\beta)$  hvor konstanten sørger for at  $f$  integrerer til 1; ifølge formelen sidst i sidebemærkningen side 63 skal konstanten være  $\frac{1}{\Gamma(k_1 + k_2)\beta^{k_1+k_2}}$ . Hermed er sætningen vist.  $\square$

Af sætning 3.9 følger at middelværdien og variansen i gammafordelingen må være lineære funktioner af formparameteren, og desuden må middelværdien være lineær i skalaparameteren og variansen kvadratisk i skalaparameteren. Det der gælder, er

## SÆTNING 3.10

Hvis  $X$  er gammafordelt med parametre  $k$  og  $\beta$ , så er  $E X = k\beta$  og  $\text{Var } X = k\beta^2$ .

Inden for den matematiske såvel som den praktiske statistik optræder nogle specielle gammafordelinger, nemlig  $\chi^2$ -fordelinger.

DEFINITION 3.7:  $\chi^2$ -FORDELING

En  $\chi^2$ -fordeling med  $n$  frihedsgrader er det samme som en gammafordeling med formparameter  $n/2$  og skalaparameter 2, dvs. med tæthedsfunktion

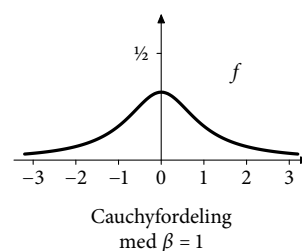
$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}} x^{n/2-1} \exp(-\frac{1}{2}x), \quad x > 0.$$

### Cauchyfordelingen

DEFINITION 3.8: CAUCHYFORDELINGEN

Cauchyfordelingen med skalaparameter  $\beta > 0$  er fordelingen med tæthedsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{1 + (x/\beta)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Denne fordeling er meget anvendt som modeksempel (!), blandt andet er den et eksempel på en fordeling som ikke har nogen middelværdi (fordi funktionen  $|x|/(1+x^2)$  er ikke integrabel). Fordelingen kan dog også forekomme i »det virkelige liv«, se f.eks. opgave 3.4.

### Normalfordelingen

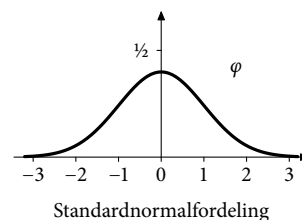
DEFINITION 3.9: STANDARDNORMALFORDELING

Standardnormalfordelingen er fordelingen med tæthedsfunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Fordelingsfunktionen for standardnormalfordelingen er

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(u) du, \quad x \in \mathbb{R}.$$



CARL FRIEDRICH GAUSS

tysk matematiker (1777-1855).

Kendt blandt andet for sit arbejde inden for geometri og matematisk statistik (herunder mindste kvadraters metode). Han beskæftigede sig også med de praktiske sider af matematikken, f.eks. landmåling. På de tyske 10 DM-sedler der var i omløb de sidste decennier før overgangen til euroen, kunne man se et portræt af Gauß, en tegning af normalfordelingstætheden og hans triangulering af et landområde i Nordtyskland.

DEFINITION 3.10: NORMALFORDELING

Normalfordelingen (eller Gaußfordelingen) med positionsparameter  $\mu$  og kvadratisk skalaparameter  $\sigma^2 > 0$  er fordelingen med tæthedsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Betegnelserne positionsparameter og kvadratisk skalaparameter retfærdiggøres af følgende sætning der vises ved anvendelse af sætning 3.4:

SÆTNING 3.11

Hvis  $X$  er normalfordelt med positionsparameter  $\mu$  og kvadratisk skalaparameter  $\sigma^2$ , og hvis  $a$  og  $b$  er reelle tal med  $a \neq 0$ , så er  $Y = aX + b$  normalfordelt med positionsparameter  $a\mu + b$  og kvadratisk skalaparameter  $a^2\sigma^2$ .

SÆTNING 3.12

Hvis  $X_1$  og  $X_2$  er uafhængige og normalfordelte med parametre  $\mu_1$  og  $\sigma_1^2$  hhv.  $\mu_2$  og  $\sigma_2^2$ , så er  $Y = X_1 + X_2$  normalfordelt med positionsparameter  $\mu_1 + \mu_2$  og kvadratisk skalaparameter  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ .

## BEVIS

På grund af sætning 3.11 er det nok at vise at hvis  $X_1$  er standardnormalfordelt, og hvis  $X_2$  er normalfordelt med positionsparameter 0 og kvadratisk skalaparameter  $\sigma^2$ , så er  $X_1 + X_2$  normalfordelt med positionsparameter 0 og kvadratisk skalaparameter  $1 + \sigma^2$ . Det vises ved at benytte sætning 3.3 og omskrive.  $\square$

BEVIS FOR AT  $\varphi$  ER EN TÆTHEDSFUNKTION

Vi mangler at gøre rede for at  $\varphi$  faktisk er en sandsynlighedstæthedsfunktion, altså at  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$ , eller sagt på en anden måde: Hvis vi lader  $c$  betegne den konstant der gør  $f(x) = c \exp(-\frac{1}{2}x^2)$  til en sandsynlighedstæthedsfunktion, skal det vises at  $c = 1/\sqrt{2\pi}$ .

Det snedige trick er at se på to uafhængige stokastiske variable  $X_1$  og  $X_2$  der hver især har tæthed  $f$ . Deres simultane tæthedsfunktion er

$$f(x_1) f(x_2) = c^2 \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right).$$

Nu ser vi på en funktion  $(y_1, y_2) = t(x_1, x_2)$  hvor sammenhængen mellem  $x$ -er og  $y$ -er er givet ved  $x_1 = \sqrt{y_2} \cos y_1$  og  $x_2 = \sqrt{y_2} \sin y_1$  for  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  og  $(y_1, y_2) \in ]0; 2\pi[ \times ]0; +\infty[$ . Sætning 3.5 giver en anvisning på hvordan man finder tæthedsfunktionen for den todimensionale stokastiske variabel  $(Y_1, Y_2) = t(X_1, X_2)$ ; almindelig udregning giver at den er  $\frac{1}{2}c^2 \exp(-\frac{1}{2}y_2)$  når  $0 < y_1 < 2\pi$  og  $y_2 > 0$ , og 0 ellers. Da det er en sandsynlighedstæthedsfunktion, integrerer den til 1:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} c^2 \exp\left(-\frac{1}{2}y_2\right) dy_1 dy_2 \\ &= 2\pi c^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}y_2\right) dy_2 \\ &= 2\pi c^2, \end{aligned}$$

hvoraf  $c = 1/\sqrt{2\pi}$ .  $\square$

## SÆTNING 3.13

Hvis  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uafhængige standardnormalfordelte stokastiske variable, så er fordelingen af  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$  en  $\chi^2$ -fordeling med  $n$  frihedsgrader.

## BEVIS

Da  $\chi^2$ -fordelingen er en gammafordeling, kan vi nøjes med at vise påstanden for  $n = 1$  og derefter henvise til sætning 3.9. Tilfældet  $n = 1$  behandles sålunde: For  $x > 0$  er

$$\begin{aligned} P(X_1^2 \leq x) &= P(-\sqrt{x} < X_1 \leq \sqrt{x}) \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \varphi(u) du \quad [ \varphi \text{ er lige} ] \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{x}} \varphi(u) du \quad [ \text{substitution } t = u^2 ] \\ &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) dt, \end{aligned}$$

som ved differentiation giver at tæthedsfunktionen for  $X_1^2$  er

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}x), \quad x > 0.$$

Tæthedsfunktionen for  $\chi^2$ -fordelingen med 1 frihedsgrad er ifølge definition 3.7

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}) 2^{1/2}} x^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}x), \quad x > 0.$$

Da de to tæthedsfunktioner er proportionale, er de ens, og vi har dermed fuldført beviset for sætningen. Som en sidegevinst får vi at  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .  $\square$

#### SÆTNING 3.14

Hvis  $X$  er normalfordelt med positionsparameter  $\mu$  og kvadratisk skalaparameter  $\sigma^2$ , så er  $E X = \mu$  og  $\text{Var } X = \sigma^2$ .

#### BEVIS

På grund af sætning 3.11 og regnereglerne for middelværdi og varians er det nok at vise sætningen i tilfældet  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 1$ . Antag derfor at  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 1$ . Af symmetri Grunde er  $E X = 0$ , og dermed  $\text{Var } X = E((X - E X)^2) = E(X^2)$ ; da  $X^2$  er  $\chi^2$ -fordelt med 1 frihedsgrad, dvs. gammafordelt med parametre  $\frac{1}{2}$  og 2, er  $E(X^2) = 1$  (sætning 3.10).  $\square$

Normalfordelingen bliver anvendt meget i statistiske modeller. En af grundene – og en af grundene til at normalfordelingen i det hele taget er genstand for så stor opmærksomhed – er Den Centrale Grænseværdisætning. (En ganske anderledes begrundelse for og udledning af normalfordelingen kan ses på side 181ff.)

#### SÆTNING 3.15: DEN CENTRALE GRÆNSEVÆRDISÆTNING

Antag at  $X_1, X_2, X_3, \dots$  er en følge af indbyrdes uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med middelværdi  $\mu$  og varians  $\sigma^2 > 0$ , og lad  $S_n$  betegne summen af de  $n$  første:  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

Da gælder at for  $n \rightarrow \infty$  er  $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$  asymptotisk standardnormalfordelt i den forstand at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) = \Phi(x)$$

for ethvert  $x \in \mathbb{R}$ .

Bemærkninger:

- Størrelsen  $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\frac{1}{n}S_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$  er summen hhv. gennemsnittet af de  $n$  første variable minus middelværdien deraf, divideret med standardafvigelsen, dvs. udtrykket har middelværdi 0 og varians 1.

- Ifølge Store Tals Lov (side 37) vil  $\frac{1}{n}S_n - \mu$  være meget lille (med meget stor sandsynlighed) når  $n$  vokser. Den Centrale Grænseværdisætning fortæller hvordan  $\frac{1}{n}S_n - \mu$  bliver meget lille, nemlig på en sådan måde at når man dividerer  $\frac{1}{n}S_n - \mu$  med  $\sqrt{\sigma^2/n}$ , får man noget der fluktuerer standardnormalfordelt omkring 0.
- Sætningen er yderst generel, idet der ikke gøres andre antagelser om  $X$ -ernes fordeling end at den har en middelværdi og en varians.

Beviset for sætningen forbigås.

### 3.4 Opgaver

#### Opgave 3.1

Skitsér gammafordelingens tæthed for forskellige værdier af formparameter og skalaparameter. (Find blandt andet ud af hvordan udseendet nær  $x = 0$  afhænger af parametrene; se f.eks. på  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  og  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ .)

#### Opgave 3.2

Skitsér normalfordelingens tæthed for forskellige værdier af  $\mu$  og  $\sigma^2$ .

#### Opgave 3.3

Lad  $F$  være en kontinuert og strengt voksende funktion defineret på et åbent interval  $I \subseteq \mathbb{R}$ , og sådan at  $F(x)$  konvergerer mod 0 hhv. 1 når  $x$  konvergerer mod venstre hhv. højre endepunkt af  $I$  (dvs.  $F$  kan – eventuelt efter en lille udvidelse – være en fordelingsfunktion).

1. Antag at den stokastiske variabel  $U$  er ligefordelt på  $]0; 1[$ . Vis at fordelingsfunktionen for  $X = F^{-1}(U)$  er  $F$ .
2. Antag at  $Y$  har fordelingsfunktion  $F$ . Vis at  $V = F(Y)$  er ligefordelt på  $]0; 1[$ .

Kommentar: Computerprogrammer har ofte en funktion der leverer tilfældige (eller i det mindste pseudo-tilfældige) tal fra ligefordelingen på  $]0; 1[$ . Denne opgave anviser én mulig måde til ud fra tilfældige ligefordelte tal at fremstille tilfældige tal fra en vilkårlig kontinuert fordeling.

#### Opgave 3.4

En todimensional cowboy affyrer sin pistol i en tilfældig retning. Et stykke fra cowboyen er der et meget langt (f.eks. uendelig langt) plankeværk.

1. Hvad er sandsynligheden for at kuglen rammer plankeværket?
2. Givet at han rammer, hvad kan man så sige om fordelingen af det sted kuglen rammer?

#### Opgave 3.5

Antag at  $(X_1, X_2)$  er en todimensional stokastisk variabel med tæthedsfunktion  $f(x_1, x_2)$ , jf. definition 3.3. Vis at funktionen  $f_1(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) dx_2$  er en tæthedsfunktion for  $X_1$ .

#### Opgave 3.6

Antag at  $X_1$  og  $X_2$  er uafhængige stokastiske variable med tæthedsfunktioner  $f_1$  og  $f_2$ . Sæt  $Y_1 = X_1 + X_2$  og  $Y_2 = X_1$ .

1. Find tæthedsfunktionen for  $(Y_1, Y_2)$ . (Benyt sætning 3.5.)
2. Find fordelingen af  $Y_1$ . (Benyt evt. opgave 3.5.)
3. Gøre rede for at det foregående er et bevis for sætning 3.3.

#### Opgave 3.7

På side 64 står der at det følger af sætning 3.9 at middelværdien og variansen i gammafordelingen er lineære funktioner af formparameteren, og at middelværdien er lineær i skalaparameteren og variansen kvadratisk i skalaparameteren. Gør rede for hvordan det følger af sætningen.

#### Opgave 3.8

Kviksølvindholdet i sværdfisk er i visse egne af USA normalfordelt med middelværdi 1.1 ppm og varians  $0.25 \text{ ppm}^2$  (se f.eks. Lee and Krutchkoff (1980) og/eller opgave 5.2 og 5.3 i Larsen (2006)), men efter sundhedsmyndighedernes vurdering bør gennemsnitsindholdet af kviksølv i konsumfisk ikke overstige 1 ppm. De fisk der sælges via de autoriserede salgskanaler, bliver kontrolleret af sundhedsmyndighederne, og hvis kviksølvindholdet i en fisk er for højt, bliver den kasseret. Imidlertid bliver ca. 25% af de fangede fisk solgt på det sorte marked og altså uden om kontrollen; derfor er det ikke tilstrækkeligt at myndighederne anvender en kassationsregel der hedder »hvis fisken indeholder over 1 ppm kviksølv, så kasseres den«.

Hvor lille skal myndighedernes kassationsgrænse være for at det forventede kviksølvindhold i en solgt fisk (solgt legalt eller illegalt) bliver under 1 ppm, og hvordan skal grænsen vælges hvis det forventede indhold skal være så lille som muligt?

#### Opgave 3.9

Lad  $X$  være en stokastisk variabel. Vi definerer *støtten* for  $X$  (eller mere præcist: støtten for  $X$ 's fordeling) som den mindste afsluttede delmængde  $B \subseteq \mathbb{R}$  for hvilken  $P(X \in B) = 1$ . Støtten for  $X$  betegnes  $\text{supp}(X)$ . – Man kan også karakterisere  $\text{supp}(X)$  på følgende måde:  $x \notin \text{supp}(X)$  hvis og kun hvis der findes en åben omegn  $U$  af  $x$  således at  $P(X \in U) = 0$ .

1. Antag at  $X$  er diskret med sandsynlighedsfunktion  $f$ .  
Vis at  $\text{supp}(X) = \{x : f(x) > 0\}$  (dvs. støtten for  $f$ ).
2. Antag at  $X$  er tællelig med sandsynlighedsfunktion  $f$ . Hvad er  $\text{supp}(X)$  i dette tilfælde?  
(Testeksempel: En stokastisk variabel der antager værdien  $\frac{1}{n}$  med sandsynlighed  $2^{-n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ )
3. Antag at  $X$  er kontinuert med tæthedsfunktion  $f$ . Hvad er  $\text{supp}(X)$  da?





## 4 Frembringende funktioner

INDEN FOR MATEMATIKKENS VERDEN finder man mange eksempler på at man konstruerer og benytter en-entydige oversættelser, repræsentationer, af én matematisk struktur til en anden. En af pointerne hermed er at visse ræsonnementer eller beviser eller udregninger er nemmere i nogle af strukturerne end i andre. Et klassisk eksempel er logaritmefunktionen, der som bekendt er en isomorfi mellem  $(\mathbb{R}_+, \cdot)$  og  $(\mathbb{R}, +)$ , og som altså laver gange-stykker om til plus-stykker.

I dette kapitel skal vi møde en repræsentation af mængden af stokastiske variable med værdier i  $\mathbb{N}_0$  (eller mere rigtigt: af mængden af sandsynlighedsfordelinger på  $\mathbb{N}_0$ ) ved hjælp af såkaldte frembringende funktioner.

**Bemærk:** Alle stokastiske variable der optræder i dette kapitel, er stokastiske variable med værdier i  $\mathbb{N}_0$ .

### 4.1 Grundlæggende egenskaber

DEFINITION 4.1: FREMBRINGENDE FUNKTION

Lad  $X$  være en stokastisk variabel med værdier i  $\mathbb{N}_0$ . Den frembringende funktion for  $X$  (eller mere præcist: for fordelingen af  $X$ ) er funktionen

$$G(s) = E s^X = \sum_{x=0}^{\infty} s^x P(X = x), \quad s \in [0; 1].$$

Teorien for frembringende funktionen trækker i høj grad på resultater fra teorien for potensrækker. For den frembringende funktion  $G$  for  $X$  gælder blandt andet:

1.  $G$  er kontinuert og har værdier i  $[0; 1]$ , specielt er  $G(0) = P(X = 0)$  og  $G(1) = 1$ .
2.  $G$  er vilkårligt mange gange differentiabel, og den  $k$ -te afledede er

$$\begin{aligned} G^{(k)}(s) &= \sum_{x=k}^{\infty} x(x-1)(x-2) \dots (x-k+1) s^{x-k} P(X = x) \\ &= E\left(X(X-1)(X-2) \dots (X-k+1) s^{X-k}\right). \end{aligned}$$

Specielt er  $G^{(k)}(s) \geq 0$  for alle  $s \in [0; 1]$ .

3. Sættes  $s = 0$  i udtrykket for  $G^{(k)}(s)$ , fås  $G^{(k)}(0) = k! P(X = k)$ , dvs. det er muligt at regne fra den frembringende funktion tilbage til sandsynlighedsfordelingen.

Heraf følger at to forskellige sandsynlighedsfordelinger ikke kan have samme frembringende funktion, eller sagt på en anden måde: den afbildning der til en sandsynlighedsfordeling knytter dens frembringende funktion, er injektiv.

4. Ved at lade  $s \rightarrow 1$  i udtrykket for  $G^{(k)}(s)$  får vi at

$$G^{(k)}(1) = E(X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)), \quad (4.1)$$

mere præcist gælder der at  $\lim_{s \rightarrow 1} G^{(k)}(s)$  er et endeligt tal hvis og kun hvis  $X^k$  har middelværdi, og i givet fald er (4.1) opfyldt.

Vi noterer specielt at

$$EX = G'(1) \quad (4.2)$$

og

$$\begin{aligned} \text{Var } X &= G''(1) - G'(1)(G'(1) - 1) \\ &= G''(1) - (G'(1))^2 + G'(1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

(formlen for variansen følger ved brug af opgave 2.3).

Et nyttigt og vigtigt resultat er

#### SÆTNING 4.1

Hvis  $X$  og  $Y$  er uafhængige stokastiske variable med frembringende funktioner  $G_X$  og  $G_Y$ , så er den frembringende funktion for summen af  $X$  og  $Y$  produktet af de frembringende funktioner:  $G_{X+Y} = G_X G_Y$ .

#### BEVIS

For  $|s| < 1$  er  $G_{X+Y}(s) = E s^{X+Y} = E(s^X s^Y) = E s^X E s^Y = G_X(s) G_Y(s)$  hvor vi først har brugt eksponentialfunktionernes funktionalligning og dernæst sætning 1.17/2.7 (side 31/47).  $\square$

#### Eksempel 4.1: Etpunktsfordeling

Hvis  $X$  er udartet i  $a$ , så er dens frembringende funktion  $G(s) = s^a$ .

#### Eksempel 4.2: 01-variabel

Hvis  $X$  er en 01-variabel med  $P(X=1) = p$ , så er dens frembringende funktion  $G(s) = 1 - p + sp$ .

#### Eksempel 4.3: Binomialfordelingen

Binomialfordelingen med parametre  $n$  og  $p$  er fordelingen af en sum af  $n$  uafhængige identisk fordelte 01-variable med parameter  $p$  (definition 1.10 side 27). Ifølge sætning 4.1 og eksempel 4.2 er den frembringende funktion for en binomialfordelt stokastisk variabel  $Y$  med parametre  $n$  og  $p$  derfor  $G(s) = (1 - p + sp)^n$ .

I eksempel 1.20 side 37 fandt vi binomialfordelingens middelværdi og varians til  $np$  og  $np(1-p)$ . Nu prøver vi at finde disse størrelser ud fra den frembringende funktion. Vi har

$$G'(s) = np(1-p+sp)^{n-1} \quad \text{og} \quad G''(s) = n(n-1)p^2(1-p+sp)^{n-2},$$

så

$$G'(1) = E Y = np \quad \text{og} \quad G''(1) = E(Y(Y-1)) = n(n-1)p^2.$$

Ifølge (4.2) og (4.3) er da

$$E Y = np \quad \text{og} \quad \text{Var } Y = n(n-1)p^2 - np(np-1) = np(1-p).$$

Vi kan også få et nyt bevis for sætning 1.12 (side 27): Ifølge sætning 4.1 er den frembringende funktion for summen af to uafhængige binomialfordelte variable med parametre  $n_1$  og  $p$  hhv.  $n_2$  og  $p$ ,

$$(1-p+sp)^{n_1} \cdot (1-p+sp)^{n_2} = (1-p+sp)^{n_1+n_2}$$

og højresiden ses at være den frembringende funktion for binomialfordelingen med parametre  $n_1 + n_2$  og  $p$ .

*Eksempel 4.4: Poissonfordelingen*

Poissonfordelingen med parameter  $\mu$  (definition 2.10 side 53) har frembringende funktion

$$G(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \frac{\mu^x}{x!} \exp(-\mu) = \exp(-\mu) \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\mu s)^x}{x!} = \exp(\mu(s-1)).$$

På samme måde som for binomialfordelingen kan vi ved hjælp af frembringende funktioner uhyre let vise resultatet i sætning 2.16 (side 54) om fordelingen af en sum af to uafhængige poissonfordelte variable.

*Eksempel 4.5: Negativ binomialfordeling*

Den frembringende funktion for en negativt binomialfordelt stokastisk variabel  $X$  (definition 2.9 side 51) med sandsynlighedsparameter  $p \in ]0; 1[$  og formparameter  $k > 0$  er

$$G(s) = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+k-1}{x} p^k (1-p)^x s^x = p^k \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+k-1}{x} ((1-p)s)^x = \left( \frac{1}{p} - \frac{1-p}{p} s \right)^{-k}.$$

(Til det sidste lighedstegn har vi benyttet nr. 3 af binomialrækkerne på side 51.) Så er

$$G'(s) = k \frac{1-p}{p} \left( \frac{1}{p} - \frac{1-p}{p} s \right)^{-k-1} \quad \text{og} \quad G''(s) = k(k+1) \left( \frac{1-p}{p} \right)^2 \left( \frac{1}{p} - \frac{1-p}{p} s \right)^{-k-2}$$

Det sætter vi ind i (4.2) og (4.3) og får

$$E X = k \frac{1-p}{p} \quad \text{og} \quad \text{Var } X = k \frac{1-p}{p^2}$$

som påstået side 52.

Ligeledes kan man ved hjælp af frembringende funktioner helt uden videre vise sætning 2.14 side 51 om fordelingen af en sum af negativt binomialfordelte variable.

Som det fremgår af eksemplerne, er det ofte sådan at når man først har fundet den frembringende funktion for en fordeling (og det kan undertiden godt være besværligt), så er der mange ting der går uhyre nemt, eksempelvis kan man altså finde middelværdi og varians blot ved at differentiere et par gange og foretage en simpel udregning.

Vi har tidligere set nogle eksempler på konvergens af sandsynlighedsfordelinger: binomialfordelingen konvergerer under visse omstændigheder mod en poissonfordeling (sætning 2.15 side 53), og den negative binomialfordeling konvergerer

ligeledes under visse omstændigheder mod en poissonfordeling (opgave 2.8 side 55). Konvergens af sandsynlighedsfordelinger på  $\mathbb{N}_0$  hænger sammen med konvergens af frembringende funktioner:

**SÆTNING 4.2: KONTINUITETSSÆTNINGEN**

Antag at vi for hvert  $n \in \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$  har en stokastisk variabel  $X_n$  med frembringende funktion  $G_n$  og sandsynlighedsfunktion  $f_n$ . Da gælder at  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x)$  for alle  $x \in \mathbb{N}_0$  hvis og kun hvis  $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(s) = G_\infty(s)$  for alle  $s \in [0; 1[$ .

Beviset for sætningen udelades (det er mere en øvelse i matematisk analyse end i sandsynlighedsregning).

Nu vil vi gå over til at undersøge nogle nye problemer, dvs. problemer der ikke er behandlet tidligere i denne fremstilling.

## 4.2 Sum af et stokastisk antal stokastiske variable

**SÆTNING 4.3**

Antag at  $N, X_1, X_2, \dots$  er indbyrdes uafhængige stokastiske variable, og at alle  $X$ -erne har samme fordeling. Sæt  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ . Da gælder at den frembringende funktion  $G_Y$  for  $Y$  er

$$G_Y = G_N \circ G_X, \quad (4.4)$$

hvor  $G_N$  er den frembringende funktion for  $N$  og  $G_X$  den frembringende funktion for  $X$ -ernes fordeling.

**BEVIS**

Lad  $B$  være støtten for  $N$ , dvs.  $B = \{n \in \mathbb{N}_0 : P(N = n) > 0\}$ . Så er  $P(Y = y) = \sum_{n \in B} P(Y = y \mid N = n) P(N = n)$  og dermed

$$\begin{aligned} G_Y(s) &= \sum_{y=0}^{\infty} s^y P(Y = y) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} s^y \sum_{n \in B} P(Y = y \mid N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n \in B} \left( \sum_{y=0}^{\infty} s^y P(Y = y \mid N = n) \right) P(N = n). \end{aligned}$$

For givet  $N$  er  $Y$  en sum af et ikke-stokastisk antal led, så udtrykket i den store parentes er den frembringende funktion for  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , og den er ifølge sætning 4.1 lig  $(G_X(s))^n$ . Det indsætter vi og får

$$G_Y(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (G_X(s))^n P(N = n).$$

| $y$ | antal blade med $y$ mider |
|-----|---------------------------|
| 0   | 70                        |
| 1   | 38                        |
| 2   | 17                        |
| 3   | 10                        |
| 4   | 9                         |
| 5   | 3                         |
| 6   | 2                         |
| 7   | 1                         |
| 8+  | 0                         |
|     | 150                       |

Tabel 4.1 Mider på æbleblade

Her er højresiden nu faktisk den frembringende funktion for  $N$ , udregnet i punktet  $G_X(s)$ , så alt i alt er vi nået frem til at for vilkårligt  $s$  er

$$G_Y(s) = G_N(G_X(s))$$

hvilket var det der skulle vises. □

*Eksempel 4.6: Mider på æbleblade*

Den 18. juli 1951 udtog man tilfældigt 25 blade på hvert af seks McIntosh-æbletræer i en æbleplantage i Connecticut og talte hvor mange røde mider (voksne hunner) der var på hvert blad. Derved fik man tallene i tabel 4.1 (Bliss and Fisher, 1953).

Hvis miderne var drysset tilfældigt ud over æbletræerne, ville det formentlig give sig udslag i at antal mider pr. blad var poissonfordelt. Statistikerne kan undersøge om talmaterialet med rimelighed kan beskrives med en poissonfordeling, og svaret er at poissonfordelingen *ikke* giver en god beskrivelse. Derfor må man finde på noget andet.

Man kan argumentere for at miderne er placeret i kolonier eller klumper, så man kunne overveje en model der afspejler dette. Eksempelvis kunne man tænke sig at miderne blev placeret på bladene ved hjælp af en tottrins-tilfældighedsmekanisme: først bestemmes hvor mange mideklumper der skal være på det foreliggende blad, og dernæst bestemmes hvor mange individer der skal være i hver af klumperne. Lad  $N$  være en stokastisk variabel der angiver antal klumper på bladet, og lad  $X_1, X_2, \dots$  være stokastiske variable der angiver antal individer i klump nr. 1, 2,  $\dots$ . Det man har observeret, er så 150 værdier af  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N$  (dvs.  $Y$  er en sum af et stokastisk antal stokastiske variable).

Da det altid er en god idé at forsøge sig med simple modeller før man kaster sig ud i de indviklede, vil vi antage at de stokastiske variable  $N, X_1, X_2, \dots$  er uafhængige, og at alle  $X$ -erne har samme fordeling. – Herefter er de eneste uafklarede elementer i modellen fordelingen af  $N$  og fordelingen af  $X$ -erne.

Den først foreslåede model at antal mider på et blad er poissonfordelt, dur som nævnt ikke, men måske så i stedet antal klumper pr. blad er poissonfordelt? Lad os antage at  $N$  er poissonfordelt med parameter  $\mu > 0$ . Antal individer pr. klump modellerer vi med en *logaritmisk fordeling* med parameter  $\alpha \in ]0; 1[$ , dvs. fordelingen med punktsandsynligheder

$$f(x) = \frac{1}{-\ln(1-\alpha)} \frac{\alpha^x}{x}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

(der er nødvendigvis et positivt antal mider i en klump). – Det er ikke særlig klart hvorfor man lige vælger denne fordeling, men der kommer et pænt slutresultat ud af det.

Sætning 4.3 fortæller hvordan man udtrykker den frembringende funktion for  $Y$  ved hjælp af de frembringende funktioner for  $N$  og  $X$ . Den frembringende funktion for  $N$  fandt vi i eksempel 4.4 til  $G_N(s) = \exp(\mu(s-1))$ . Den frembringende funktion for  $X$ -ernes fordeling er

$$G_X(s) = \sum_{x=1}^{\infty} s^x f(x) = \frac{1}{-\ln(1-\alpha)} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(\alpha s)^x}{x} = \frac{-\ln(1-\alpha s)}{-\ln(1-\alpha)}.$$

Den frembringende funktion for  $Y$  er ifølge sætning 4.3  $G_Y(s) = G_N(G_X(s))$ , og vi får derfor

$$\begin{aligned} G_Y(s) &= \exp\left(\mu\left(\frac{-\ln(1-\alpha s)}{-\ln(1-\alpha)} - 1\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{\mu}{\ln(1-\alpha)} \ln \frac{1-\alpha s}{1-\alpha}\right) = \left(\frac{1-\alpha s}{1-\alpha}\right)^{\mu/\ln(1-\alpha)} \\ &= \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha} s\right)^{\mu/\ln(1-\alpha)} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1-p}{p} s\right)^{-k} \end{aligned}$$

hvor  $p = 1 - \alpha$  og  $k = -\mu/\ln p$ . Denne funktion genkender vi som den frembringende funktion for den negative binomialfordeling med sandsynlighedsparameter  $p$  og formparameter  $k$  (eksempel 4.5). Antallet  $Y$  af mider på et blad er således negativt binomialfordelt.

#### KOROLLAR 4.4

I den i sætning 4.3 beskrevne situation er

$$\begin{aligned} E Y &= E N E X \\ \text{Var } Y &= E N \text{ Var } X + \text{Var } N (E X)^2. \end{aligned}$$

#### BEVIS

Formlerne (4.2) og (4.3) angiver sammenhængen mellem på den ene side den frembringende funktion og på den anden side fordelings middelværdi og varians. Hvis man differentierer (4.4), får man at  $G'_Y = (G'_N \circ G_X) G'_X$  der udregnet i punktet 1 giver  $E Y = E N E X$ . Tilsvarende kan man udregne  $G''_Y$  i punktet 1 og efter nogle omskrivninger nå frem til det påståede resultat.  $\square$

### 4.3 Forgreningsprocesser

En forgreningsproces er en særlig slags stokastisk proces. Generelt er en stokastisk proces en familie  $(X(t) : t \in T)$  af stokastiske variable, indiceret ved en størrelse  $t$  som man plejer at kalde for tiden, og som varierer i en mængde  $T$  der ofte er  $[0; +\infty[$  («kontinuert tid») eller  $\mathbb{N}_0$  («diskret tid»). Værdimængden for de stokastiske variable er normalt enten  $\mathbb{Z}$  («diskret tilstandsrum») eller  $\mathbb{R}$  («kontinuert tilstandsrum»).

En forgreningsproces med diskret tid og diskret tilstandsrum kan nu præsenteres på følgende måde. Lad os sige at vi har at gøre med en særlig slags individer der alle har levetid 1 tidsenhed; når individets berammede levetid er udløbet, vil

det enten dø eller spaltes i et stokastisk antal nye individer; de nye individer er af samme slags som deres stamfar, dvs. hver af dem lever 1 tidsenhed hvorefter det enten dør eller spaltes i et antal nye, osv. Individerne dør/formerer sig stokastisk uafhængigt af hverandre, og den sandsynlighedsfordeling der bestemmer hvor mange efterkommere et individ får, er den samme for alle individer og til alle tider. Hvis vi lader  $Y(t)$  betegne det samlede antal individer til tid  $t$  (opgjort efter at de dødsfald og spaltninger der skal ske til tid  $t$ , er sket), så er  $(Y(t) : t \in \mathbb{N}_0)$  et eksempel på en forgreningsproces.

De spørgsmål man stiller til en forgreningsproces, er blandt andet: givet at  $Y(0) = y_0$ , hvad kan man så sige om fordelingen af  $Y(t)$ ? hvor stor er middelværdien og variansen af  $Y(t)$ ? hvor stor er sandsynligheden for at  $Y(t) = 0$ , dvs. populationen er uddød til tid  $t$ ? hvor lang tid går der inden populationen uddør (hvis den uddør)?

Vi vil opstille en matematisk model for en forgreningsproces og besvare nogle af spørgsmålene.

Den såkaldte *afkomstfordeling* spiller en afgørende rolle i modellen. Afkomstfordelingen er den sandsynlighedsfordeling der modellerer antal efterkommere som det enkelte individ får når der går 1 tidsenhed. Afkomstfordelingen er en fordeling på  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ; værdien 0 svarer til at individet dør uden at få efterkommere, værdien 1 svarer til at individet dør men får 1 efterkommer (eller at individet lever videre), værdien 2 svarer til at individet dør men får 2 efterkommere, osv.

Lad  $G$  være afkomstfordelingens frembringende funktion. Processen startes til tid  $t = 0$  med ét individ. Til tid  $t = 1$  bliver dette individ til  $Y(1)$  nye, og den frembringende funktion for  $Y(1)$  er

$$s \mapsto E(s^{Y(1)}) = G(s).$$

Til tid  $t = 2$  bliver hver af de  $Y(1)$  individer til et stokastisk antal nye, så  $Y(2)$  er en sum af  $Y(1)$  uafhængige stokastiske variable, hver med frembringende funktion  $G$ , og ifølge sætning 4.3 er den frembringende funktion for  $Y(2)$  da

$$s \mapsto E(s^{Y(2)}) = (G \circ G)(s).$$

Til tid  $t = 3$  bliver hver af de  $Y(2)$  individer til et stokastisk antal nye, så  $Y(3)$  er en sum af  $Y(2)$  uafhængige stokastiske variable, hver med frembringende funktion  $G \circ G$ , og den frembringende funktion for  $Y(3)$  er da ifølge sætning 4.3

$$s \mapsto E(s^{Y(3)}) = (G \circ G \circ G)(s).$$

Fortsættes ræsonnementet, får man at den frembringende funktion for  $Y(t)$  er

$$s \mapsto E(s^{Y(t)}) = \underbrace{(G \circ G \circ \dots \circ G)}_t(s). \quad (4.5)$$

(Bemærk i øvrigt at hvis vi var startet med  $y_0$  individer til tid 0, så var den frembringende funktion blevet  $((G \circ G \circ \dots \circ G)(s))^{y_0}$ ; det er en konsekvens af sætning 4.1.)

#### OM NOTATIONEN

I de første kapitler gjorde vi meget ud af at stokastiske variable er funktioner defineret på et udfaldsrum  $\Omega$ ; efterhånden forsvandt både  $\omega$ -erne og  $\Omega$  ud af billedet. Når der nu står  $Y(t)$ , er det så fordi  $t$  har overtaget  $\omega$ 's plads? Nej, der er stadig et underforstået  $\Omega$ , og det ville være mere korrekt at skrive  $Y(\omega, t)$  og ikke bare  $Y(t)$ . Meningen er, at for hvert  $t$  har vi en almindelig stokastisk variabel  $\omega \mapsto Y(\omega, t)$ , og for hvert  $\omega$  har vi en funktion  $t \mapsto Y(\omega, t)$  af »tiden«  $t$  (som antager heltalsværdier).



Lad os kalde middelværdien i afkomstfordelingen for  $\mu$ ; vi minder om at  $\mu = G'(1)$  (formel (4.2)). Da formel (4.5) som nævnt bare er en anvendelse af sætning 4.3, kan vi anvende korollaret til denne sætning og få det ikke voldsomt overraskende resultat at  $E Y(t) = \mu^t$ , dvs. i middel er der eksponentiel vækst (eller uddøen). Mere interessant er

#### SÆTNING 4.5

Antag at  $Y(0) = 1$  og at afkomstfordelingen ikke er etpunktsfordelingen i 1.

Så gælder:

- Hvis  $\mu \leq 1$ , vil populationen uddø med sandsynlighed 1, nærmere bestemt er

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(Y(t) = y) = \begin{cases} 1 & \text{for } y = 0 \\ 0 & \text{for } y = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

- Hvis  $\mu > 1$ , vil populationen uddø med sandsynlighed  $s^*$  og vokse ud over alle grænser med sandsynlighed  $1 - s^*$ , nærmere bestemt er

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(Y(t) = y) = \begin{cases} s^* & \text{for } y = 0 \\ 0 & \text{for } y = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Her betegner  $s^*$  den løsning til ligningen  $G(s) = s$  som er mindre end 1.

#### BEVIS

Vi vil vise sætningen ved at vise konvergens af den frembringende funktion for  $Y(t)$ : for hvert givet fast  $s_0$  vil vi finde grænseværdien af  $E s_0^{Y(t)}$  når  $t \rightarrow \infty$ . Ifølge formel (4.5) er talfølgen  $(E s_0^{Y(t)})_{t \in \mathbb{N}}$  den samme som den talfølge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der er fastlagt ved

$$s_{n+1} = G(s_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Denne talfølges opførsel afhænger af udseendet af  $G$  og af startværdien  $s_0$ . På intervallet  $]0; 1[$  er  $G$  og alle dens afledede som tidligere nævnt ikke-negative, og desuden er  $G(1) = 1$  og  $G'(1) = \mu$ . Da vi pr. forudsætning har udelukket muligheden  $G(s) = s$  for alle  $s$  (svarende til at afkomstfordelingen er etpunktsfordelingen i værdien 1), kan man konkludere at

- Hvis  $\mu \leq 1$ , så er  $G(s) > s$  for alle  $s \in ]0; 1[$ .  
I så fald er talfølgen  $(s_n)$  voksende og således konvergent. Kald grænseværdien  $\bar{s}$ ; så er  $\bar{s} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} G(s_{n+1}) = G(\bar{s})$ , hvor det midterste lighedstegn følger af definitionen på  $(s_n)$  og det sidste lighedstegn følger af at  $G$  er kontinuert i  $\bar{s}$ . Det eneste punkt  $\bar{s} \in [0; 1]$  for hvilket  $G(\bar{s}) = \bar{s}$ , er  $\bar{s} = 1$ , så vi er nået frem til at følgen  $(s_n)$  er voksende og har grænseværdi 1.
- Hvis  $\mu > 1$ , så findes præcis et tal  $s^* \in [0; 1[$  således at  $G(s^*) = s^*$ .  
– Hvis  $s^* < s < 1$ , så er  $s^* \leq G(s) < s$ .  
Deraf følger at hvis  $s^* < s_0 < 1$ , så er talfølgen  $(s_n)$  aftagende og derfor konvergent med en grænseværdi  $\bar{s} \geq s^*$ . På samme måde som i tilfældet  $\mu \leq 1$  indses at  $G(\bar{s}) = \bar{s}$ , og man kan derfor konkludere at grænseværdien faktisk er  $s^*$ .

- Hvis  $0 < s < s^*$ , så er  $s < G(s) \leq s^*$ .  
Deraf følger at hvis  $0 < s_0 < s^*$ , så er talfølgen  $(s_n)$  voksende, og dens grænseværdi må (med et lignende argument som i forrige punkt) være  $s^*$ .
- Hvis  $s_0$  er enten  $s^*$  eller 1, så er talfølgen  $(s_n)$  konstant lig  $s_0$ .

I tilfældet  $\mu \leq 1$  viser ovenstående betragtninger at den frembringende funktion for  $Y(t)$  konvergerer mod den frembringende funktion for etpunktsfordelingen i punktet 0 (nemlig den konstante funktion 1), dvs. populationen uddør med sandsynlighed 1.

I tilfældet  $\mu > 1$  viser ovenstående betragtninger at den frembringende funktion for  $Y(t)$  konvergerer mod den funktion som har værdien  $s^*$  på intervallet  $[0; 1[$  og værdien 1 i punktet 1. Denne funktion er *ikke* frembringende funktion for en almindelig sandsynlighedsfordeling (så skulle funktionen have været kontinuert i 1), men med lidt god vilje kan man sige at den er frembringende funktion for en sandsynlighedsfordeling der placerer sandsynlighedsmassen  $s^*$  i punktet 0 og sandsynlighedsmassen  $1 - s^*$  i et uendelig fjernt punkt.

Man kan faktisk godt udvide teorien for frembringende funktioner til at omfatte fordelinger der placerer noget af sandsynlighedsmassen i et uendelig fjernt punkt, men dette kræver en nærmere redegørelse (som ikke vil blive bragt her); i stedet nøjes vi med at vise følgende to påstande:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(Y(t) = 0) = s^* \quad (4.6)$$

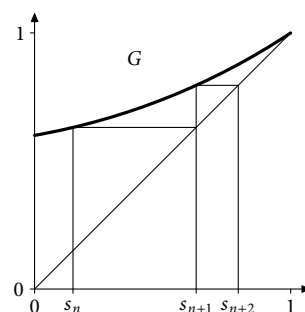
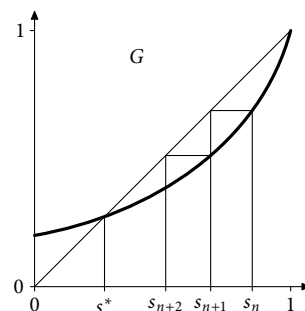
$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(Y(t) \leq c) = s^* \quad \text{for alle } c > 0. \quad (4.7)$$

Da  $P(Y(t) = 0)$  er lig værdien af den frembringende funktion for  $Y(t)$  udregnet i  $s = 0$ , følger (4.6) uden videre af det foregående. For at vise anden del foretager vi nogle omskrivninger hvor vi blandt andet benytter Markovs ulighed (lemma 1.24 side 33):

$$P(Y(t) \leq c) = P(s^{Y(t)} \geq s^c) \leq s^{-c} E s^{Y(t)}$$

hvor  $0 < s < 1$ . For  $t \rightarrow \infty$  går  $s^{-c} E s^{Y(t)}$  ifølge det tidligere viste mod  $s^{-c} s^*$ ; ved at vælge  $s$  tilstrækkelig tæt på 1, kan  $s^{-c} s^*$  komme lige så tæt på  $s^*$  som vi ønsker, så  $\limsup_{t \rightarrow \infty} P(Y(t) \leq c) \leq s^*$ . På den anden side er  $P(Y(t) = 0) \leq P(Y(t) \leq c)$  og  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(Y(t) = 0) = s^*$ , hvoraf  $s^* \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} P(Y(t) \leq c)$ , så alt i alt eksisterer grænseværdien  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(Y(t) \leq c)$  og er lig  $s^*$ .

Formlerne (4.6) og (4.7) viser at uanset hvor stort et interval  $[0; c]$  vi vælger, så vil det i grænsen når  $t \rightarrow \infty$  ikke indeholde andet sandsynlighedsmasse end den der befinder sig i punktet  $y = 0$ .  $\square$

Tilfældet  $\mu \leq 1$ Tilfældet  $\mu > 1$ 

## 4.4 Opgaver

### Opgave 4.1

Den kosmiske stråling antages – i hvert fald i denne opgave – at optræde i form af partikler

TIP:

Hvis  $(z_n)$  er en (reel eller kompleks) talfølge som konvergerer mod det endelige tal  $z$ , så er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \exp(z).$$

der ankommer »helt tilfældigt« til det måleapparat der skal registrere dem. At de kommer »helt tilfældigt«, betyder at antal partikler (med en given energi) der ankommer i et tidsrum af længde  $t$ , er poissonfordelt med parameter  $\lambda t$ , hvor  $\lambda$  er en strålingsintensitet.

Lad os nu sige at det apparat der skal registrere partiklerne, er lettere defekt således at de enkelte partikler ikke med sikkerhed registreres, men at der er en vis konstant sandsynlighed for at partiklen ikke registreres. Hvad kan man sige om fordelingen af antal registrerede partikler?

#### Opgave 4.2

Benyt sætning 4.2 til at vise at binomialfordelingen med parametre  $n$  og  $p$  konvergerer mod poissonfordelingen med parameter  $\mu$  når  $n \rightarrow \infty$  og  $p \rightarrow 0$  på en sådan måde at  $np \rightarrow \mu$ . (Dette er vist på en anden måde i sætning 2.15 side 53).

#### Opgave 4.3

Benyt sætning 4.2 til at vise at den negative binomialfordeling med parametre  $k$  og  $p$  konvergerer mod poissonfordelingen med parameter  $\mu$  når  $k \rightarrow \infty$  og  $p \rightarrow 1$  på en sådan måde at  $k(1-p)/p \rightarrow \mu$ . (Dette var også genstand for behandling i opgave 2.8 side 55).

#### Opgave 4.4

I sætning 4.5 antages det at processen starter med ét individ. Hvad vil der gælde hvis man i stedet starter med  $y_0$  individer?

#### Opgave 4.5

Betragt en forgreningsproces hvor afkomstfordelingen placerer sandsynlighederne  $p_0$ ,  $p_1$  og  $p_2$  på tallene 0, 1 og 2 ( $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ ), dvs. når der går et tidsskridt, bliver hvert individ til 0, 1 eller 2 med de nævnte sandsynligheder.

Hvordan afhænger sandsynligheden for at processen før eller senere uddør, af  $p_0$ ,  $p_1$  og  $p_2$ ?

## 5 Generel teori

DETTE KAPITEL ÅBNER en smal sprække ind til teorien for sandsynlighedsmål på generelle udfaldsrum.

DEFINITION 5.1:  $\sigma$ -ALGEBRA

Lad  $\Omega$  være en ikke-tom mængde. En mængde  $\mathcal{F}$  af delmængder af  $\Omega$  kaldes en  $\sigma$ -algebra på  $\Omega$  hvis der gælder:

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$ .
2.  $\mathcal{F}$  er afsluttet over for komplementærmængdedannelse,  $\gamma$ : hvis  $A \in \mathcal{F}$ , så er  $A^c \in \mathcal{F}$ .
3.  $\mathcal{F}$  er afsluttet over for tællelige foreningsmængdedannelser,  $\gamma$ : hvis  $A_1, A_2, \dots$  er en følge i  $\mathcal{F}$ , så er foreningsmængden  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  også i  $\mathcal{F}$ .

Bemærkninger: La  $\mathcal{F}$  være en  $\sigma$ -algebra. Da  $\emptyset = \Omega^c$ , følger det af 1 og 2 at  $\emptyset \in \mathcal{F}$ . Da  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c$ , følger det af 2 og 3 at  $\mathcal{F}$  også er afsluttet over for tællelige fællesmængdedannelser.

På de reelle tal  $\mathbb{R}$  opererer man med en særlig  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$  kaldet *Borel- $\sigma$ -algebraen*, som er den mindste  $\sigma$ -algebra på  $\mathbb{R}$  som indeholder alle åbne delmængder af  $\mathbb{R}$ ;  $\mathcal{B}$  er også den mindste  $\sigma$ -algebra på  $\mathbb{R}$  som indeholder alle intervaller.

DEFINITION 5.2: SANDSYNLIGHEDSRUM

Et sandsynlighedsrum er et tripel  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  bestående af

1. et udfaldsrum  $\Omega$  som er en ikke-tom mængde,
2. en  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  af delmængder af  $\Omega$ ,
3. et sandsynlighedsmål på  $(\Omega, \mathcal{F})$ , dvs. en afbildning  $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  som er
  - positiv:  $P(A) \geq 0$  for alle  $A \in \mathcal{F}$ ,
  - normeret:  $P(\Omega) = 1$ , og
  - $\sigma$ -additiv: hvis  $A_1, A_2, \dots$  er en følge af parvis disjunkte hændelser fra  $\mathcal{F}$ , så er  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ .

SÆTNING 5.1

Lad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  være et sandsynlighedsrum. Der gælder at sandsynlighedsmålet  $P$  er monoton-kontinuert i den forstand at hvis man har en voksende følge  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$  i  $\mathcal{F}$ , så er  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ , og  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ ; og på samme

ANDREJ KOLMOGOROV

russisk matematiker (1903-87).

I 1933 udkom hans *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* som er den første tilfredsstillende aksiomatiske fremstilling af sandsynlighedsregningen.

EMILE BOREL

fransk matematiker (1871-1956).

måde hvis  $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$  er en aftagende følge i  $\mathcal{F}$ , så er  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$ , og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

BEVIS

På grund af den endelige additivitet er

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P((A_n \setminus A_{n-1}) \cup (A_{n-1} \setminus A_{n-2}) \cup \dots \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus \emptyset)) \\ &= P(A_n \setminus A_{n-1}) + P(A_{n-1} \setminus A_{n-2}) + \dots + P(A_2 \setminus A_1) + P(A_1 \setminus \emptyset). \end{aligned}$$

For  $n \rightarrow \infty$  fås derfor (idet vi sætter  $A_0 = \emptyset$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \setminus A_{n-1}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1})\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$

hvor det midterste lighedstegn følger af at  $\mathcal{F}$  er en  $\sigma$ -algebra og  $P$  er  $\sigma$ -additiv. Hermed er sætningens første påstand vist. Den anden påstand følger ved at se på den voksende følge  $A_n = B_n^c$ .  $\square$

Definitionen af stokastisk variabel ser nu sådan ud (slgn. definition 1.6 side 19):

DEFINITION 5.3: STOKASTISK VARIABEL

En stokastisk variabel på  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  er en afbildning  $X$  af  $\Omega$  ind i  $\mathbb{R}$  med den egenskab at  $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$  for ethvert  $B \in \mathcal{B}$ .

Bemærkninger:

1. Betingelsen  $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$  sikrer at  $P(X \in B)$  er en meningsfuld størrelse.
2. Undertiden skriver man  $X^{-1}(B)$  i stedet for  $\{X \in B\}$  (der jo er en kort betegnelse for  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ ), og man opfatter  $X^{-1}$  som en afbildning der afbilder delmængder af  $\mathbb{R}$  over i delmængder af  $\Omega$ . De to krav der stilles til  $X$  for at det er en stokastisk variabel, er da at  $X$  afbilder  $\Omega$  over i  $\mathbb{R}$  og  $X^{-1}$  afbilder  $\mathcal{B}$  over i  $\mathcal{F}$ . Man taler om at  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  er en målelig afbildning.

Fordelingsfunktion defineres ganske som tidligere (definition 1.7 side 20):

DEFINITION 5.4: FORDELINGSFUNKTION

Fordelingsfunktionen for en stokastisk variabel  $X$  er funktionen

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0; 1] \\ x &\longmapsto P(X \leq x) \end{aligned}$$

Der gælder de samme resultater som vi tidligere har set:

## LEMMA 5.2

Hvis den stokastiske variabel  $X$  har fordelingsfunktion  $F$ , så er

$$\begin{aligned}P(X \leq x) &= F(x), \\P(X > x) &= 1 - F(x), \\P(a < X \leq b) &= F(b) - F(a),\end{aligned}$$

for vilkårlige reelle tal  $x$  og  $a < b$ .

## SÆTNING 5.3

Fordelingsfunktionen  $F$  for en stokastisk variabel  $X$  har følgende egenskaber:

1. Den er ikke-aftagende, dvs. hvis  $x \leq y$ , så er  $F(x) \leq F(y)$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  og  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .
3. Den er højrekontinuert, dvs.  $F(x+) = F(x)$  for alle  $x$ .
4. I ethvert punkt  $x$  gælder  $P(X = x) = F(x) - F(x-)$ .
5. Et punkt  $x$  er et diskontinuitetspunkt for  $F$  hvis og kun hvis  $P(X = x) > 0$ .

## BEVIS

De enkelte punkter i sætningen vises således:

Ad 1: Det gamle bevis fra sætning 1.6 kan overføres.

Ad 2: Mængderne  $A_n = \{X \in ]-n; n]\}$  vokser op mod hele  $\Omega$ , så derfor er ifølge sætning 5.1  $\lim_{n \rightarrow \infty} (F(n) - F(-n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(X \in \Omega) = 1$ . Dette i forening med at  $F$  er ikke-aftagende og har værdier mellem 0 og 1, medfører påstand 2.

Ad 3: Mængderne  $\{X \leq x + \frac{1}{n}\}$  aftager mod  $\{X \leq x\}$ . Derfor er  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x + \frac{1}{n}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x + \frac{1}{n}\}\right) = P(X \leq x) = F(x)$  ifølge sætning 5.1.

Ad 4:  $P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x - \frac{1}{n}\}\right) = F(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x - \frac{1}{n}) = F(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} F(x - \frac{1}{n}) = F(x) - F(x-)$  ifølge sætning 5.1.

Ad 5: Følger af det foregående.  $\square$

Der gælder også den »omvendte« sætning, som vi dog ikke vil bevise her:

## SÆTNING 5.4

Hvis der er givet en funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  som er ikke-aftagende og højrekontinuert, og  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  og  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ , så er  $F$  fordelingsfunktion for en stokastisk variabel.

## 5.1 Hvorfor generalisere og aksiomatisere?

1. En grund til at søge at lave en samlet aksiomatisk fremstilling af sandsynlighedsregningen er at det fra et matematisk-æstetisk synspunkt er noget sjusk hvis man er nødt til at behandle diskrete og kontinuerte sandsynligheder som to helt

forskellige typer objekter (sådan som vi har gjort i nærværende fremstilling) – og hvad stiller man op med fordelinger der f.eks. er en blanding af en diskret og en kontinuert fordeling?

#### Eksempel 5.1

Antag at man vil modellere levetiden  $T$  af nogle dimser der er således beskafte at de enten går i stykker med det samme ( $\succ: T = 0$ ) hvilket sker med en sandsynlighed som vi kan kalde  $p$ , eller også holder de et eksponentialfordelt stykke tid; fordelingen af  $T$  kan da specificeres ved at sige at  $P(T = 0) = p$  og  $P(T > t \mid T > 0) = \exp(-t/\beta)$ ,  $t > 0$  hvor  $\beta$  er eksponentialfordelingens parameter.

Fordelingen af  $T$  har en diskret komponent (sandsynlighedsmassen  $p$  placeret i 0) og en kontinuert komponent (sandsynlighedsmassen  $1 - p$  smurt ud på den positive halvakse efter en eksponentialfordeling).

2. Man vil gerne have en matematisk ramme der gør det muligt at tale om *konvergens af fordelinger*. Eksempelvis er det »umiddelbart indlysende« at den diskrete ligefordeling på mængden  $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  konvergerer mod den kontinuerte ligefordeling på  $[0; 1]$  når  $n \rightarrow \infty$ , og at normalfordelingen med middelværdi  $\mu$  og varians  $\sigma^2 > 0$  konvergerer mod etpunktsfordelingen i  $\mu$  når  $\sigma^2 \rightarrow 0$ . Ligeledes fortæller den centrale grænseværdisætning (side 67) at med passende skaleringer konvergerer fordelingen af summer af uafhængige variable mod en normalfordeling. Teorien skal være i stand til at præcisere hvad det er for et konvergensbegreb der er i spil her.

3. Vi har i simple situationer set hvordan man modellerer sammensatte forsøg med uafhængige komponenter (se bl.a. side 16f og side 24), men hvordan gør man det generelt, og kan det lade sig gøre med uendelig mange komponenter?

#### Eksempel 5.2

Store Tals Stærke Lov siger at hvis  $(X_n)$  er en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med middelværdi  $\mu$ , så er  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu) = 1$  hvor  $\bar{X}_n$  er gennemsnittet af  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (se evt. også side 37). Hændelsen  $\{\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu\}$  vedrører uendelig mange  $X$ -er, og man kan spørge om der overhovedet findes et sandsynlighedsrum hvor det er muligt at have uendelig mange stokastiske variable med en ønsket fordeling.

#### Eksempel 5.3

I afsnittene om den geometriske fordeling (side 49) og den negative binomialfordeling (side 51) ser man på hvor mange gange man skal gentage et 01-forsøg, inden der for første (eller for  $k$ -te) gang kommer et 1. Der optræder blandt andet en stokastisk variabel  $T_k$  som betegner nummeret på den gentagelse hvor man for  $k$ -te gang får resultatet 1. Det kan være af interesse at spørge om sandsynligheden for at der før eller senere vil være kommet i alt  $k$  1-ere, altså  $P(T_k < \infty)$ . Hvis  $X_1, X_2, X_3, \dots$  er stokastiske variable der repræsenterer 1., 2., 3., ... gentagelse af 01-forsøget, er  $T_k$  en enkel funktion af  $X$ -erne:  $T_k = \inf\{t \in \mathbb{N} : X_t = k\}$ . – Hvordan kan man konstruere et sandsynlighedsrum der tillader hændelser der vedrører egenskaber ved uendelige følger af stokastiske variable?

#### Eksempel 5.4

Tag en følge  $(U(t) : t = 1, 2, 3, \dots)$  af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable som

er ligefordelte på topunktsmængden  $\{-1, 1\}$ , og definér derudfra en ny følge af stokastiske variable  $(X(t) : t = 0, 1, 2, \dots)$  ved

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ X(t) &= X(t-1) + U(t), \quad t = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

dvs.  $X(t) = U(1) + U(2) + \dots + U(t)$ . Den derved fremkommende stokastiske proces er en *simpel random walk* i én dimension. Traditionelt tænker man på stokastiske processer som afbildet i et koordinatsystem hvor den vandrette akse er  $t$ -aksen (tiden) og den lodrette akse  $x$ -aksen (stedet). I overensstemmelse hermed vil vi sige at den simple random walk  $(X(t) : t \in \mathbb{N}_0)$  starter i  $x = 0$  til tid  $t = 0$ , og derefter bevæger den sig et skridt op eller et skridt ned hver gang der er gået et tidsskridt.

Skridtlængderne behøver ikke være 1. Vi kan sagtens have en random walk der bevæger sig i skridt af længde  $\Delta x$ , og som bevæger sig til tidspunkterne  $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$  (her er  $\Delta x \neq 0$  og  $\Delta t > 0$ ). Vi tager denne gang en følge  $(U(t) : t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots)$  og sætter

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ X(t) &= X(t - \Delta t) + U(t)\Delta x, \quad t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots \end{aligned}$$

dvs.  $X(n\Delta t) = U(\Delta t)\Delta x + U(2\Delta t)\Delta x + \dots + U(n\Delta t)\Delta x$ . På denne måde har vi fået defineret  $X(t)$  når  $t$  er et helt ikke-negativt multiplum af  $\Delta t$  ( $\because$  når  $t \in \mathbb{N}_0\Delta t$ ). Derefter kan vi i hvert delinterval  $]k\Delta t; (k+1)\Delta t[$  definere  $X(t)$  ved lineær interpolation; derved får vi alt i alt en kontinuert (stykkevis lineær) funktion  $t \mapsto X(t)$ ,  $t \geq 0$ .

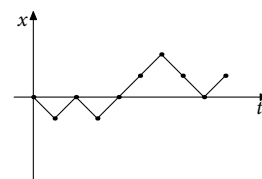
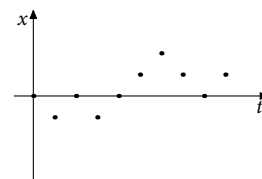
Man finder uden videre at  $E(X(n\Delta t)) = 0$  og  $\text{Var}(X(n\Delta t)) = n(\Delta x)^2$ , dvs. hvis  $t = n\Delta t$  (og dermed  $n = t/\Delta t$ ), så er  $\text{Var} X(t) = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} t$ . Det antyder at hvis man har planer om at lade  $\Delta t$  og  $\Delta x$  gå mod 0, er det nok en god idé at gøre det på en måde så  $(\Delta x)^2/\Delta t$  har en grænseværdi  $\sigma^2 > 0$ , hvorved altså  $\text{Var} X(t) \rightarrow \sigma^2 t$ .

Spørgsmålet er nu hvordan man kan konstruere en matematisk ramme der gør den skitserede »grænseovergang« meningsfuld – blandt andet skal det præciseres hvad det er for nogle matematiske objekter der konvergerer, og hvad det er for en konvergens.

Løsningen bliver at man skal operere med sandsynlighedsfordelinger på rum af kontinuerte funktioner (de interpolerede random walks er alle kontinuerte funktioner af  $t$ , og grænseprocessen må også skulle være kontinuert). Hvis vi for nemheds skyld antager at  $\sigma^2 = 1$ , så bliver »grænseværdien« den såkaldte Wiener-proces  $(W(t) : t \geq 0)$ . Wiener-processen, der altid er en kontinuert funktion af  $t$ , har en del bemærkelsesværdige egenskaber:

- Hvis  $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ , er tilvæksterne  $W(t_1) - W(s_1)$  og  $W(t_2) - W(s_2)$  uafhængige og normalfordelte med middelværdi 0 og varians hhv.  $(t_1 - s_1)$  og  $(t_2 - s_2)$ .
- Med sandsynlighed 1 er funktionen  $t \mapsto W(t)$  intetsteds differentiabel.
- Med sandsynlighed 1 vil  $W$  antage enhver reel værdi (dvs. med sandsynlighed 1 er billedmængden for  $t \mapsto W(t)$  hele  $\mathbb{R}$ ).
- For ethvert  $x$  gælder at  $W$  med sandsynlighed 1 vil passere  $x$  uendelig ofte (dvs.  $\{t > 0 : W(t) = x\}$  indeholder med sandsynlighed 1 uendelig mange elementer).

Pionerværkerne i det matematiske arbejde med sådanne processer er Bachelier (1900) og Norbert Wiener's arbejde fra begyndelsen af 1920-erne, se Wiener (1976, side 435-519).







**Del II**

**Statistik**



# Indledning

HVOR SANDSYNLIGHEDSREGNINGEN handler om at opstille og analysere sandsynlighedsmodeller for tilfældighedsfænomener (samt om at etablere det fornødne begrebsapparat), handler disciplinen *matematisk statistik* grundlæggende om at etablere og undersøge metoder til at uddrage informationer af talmaterialer der er behæftede med en usikkerhed der antages at kunne beskrives med passende sandsynlighedsfordelinger, og disciplinen *anvendt statistik* handler om hvordan disse metoder indgår i konkrete typer af modelleringsprocesser.

Den type af problemstillinger som det kommer til at handle om, kan kort skitseres således: Der foreligger et sæt tal  $x_1, x_2, \dots, x_n$  der vil blive omtalt som *observationerne* (det kunne f.eks. være resultaterne af 115 målinger af kviksølvindholdet i sværdfisk). Man opstiller en *statistisk model* gående ud på at observationerne er observerede værdier af stokastiske variable  $X_1, X_2, \dots, X_n$  der har en eller anden nærmere præciseret simultan fordeling der er kendt på nær nogle få ukendte *parametre* (f.eks. kunne  $X$ -erne være uafhængige identisk normalfordelte med de to ukendte parametre  $\mu$  og  $\sigma^2$ ). Der er herefter tre hoved-problemstillinger:

1. *Estimation*. På grundlag af observationer plus model skal der udregnes et *estimat* (dvs. et skøn eller overslag) over de ukendte parametres værdier; estimatet skal naturligvis være så godt som muligt (i en eller anden forstand der skal præciseres nærmere).
2. *Hypoteseprøvning*. I forbindelse med den faglige problemstilling kan der være forskellige interessante *statistiske hypoteser* man ønsker at teste. En statistisk hypotese er et udsagn om at parameterstrukturen er simple end først påstået (f.eks. at visse parametre er kendte eller er ens).
3. *Modelkontrol*. Statistiske modeller er ofte ikke det fjerneste »naturtro« i den forstand at de søger at efterligne de »virkelige« mekanismer der har frembragt observationerne. Arbejdet med tilpasning og kontrol af modellen og vurdering af modellens brugbarhed får derfor et anderledes indhold og en anderledes betydning end det er tilfældet ved så mange andre typer af matematiske modeller.



RONALD AYLMER FISHER  
engelsk statistiker og genetiker  
(1890-1962). Grundlæggeren af  
faget teoretisk statistik (i hvert fald  
faget i den udgave som præsenteres  
i denne bog).

I 1922 forklarede Fisher formålet med statistiske metoder således (Fisher (1922), her citeret efter Kotz and Johnson (1992)):

*In order to arrive at a distinct formulation of statistical problems, it is necessary to define the task which the statistician sets himself: briefly, and in its most concrete form, the object of statistical methods is the reduction of data. A quantity of data, which usually by its mere bulk is incapable of entering the mind, is to be replaced by relatively few quantities which shall adequately represent the whole, or which, in other words, shall contain as much as possible, ideally the whole, of the relevant information contained in the original data.*

## 6 Den statistiske model

VI VIL FØRST GIVE en forholdsvis abstrakt præsentation af begrebet en statistisk model og nogle af de tilhørende begrebsdannelser, sidenhen kommer en række illustrative eksempler.

Der foreligger en *observation*  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  som antages at være en observeret værdi af en stokastisk variabel  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  med værdier i observationsrummet  $\mathfrak{X}$ ; mængden  $\mathfrak{X}$  er ofte  $\mathbb{R}^n$  eller  $\mathbb{N}_0^n$ .

For hver værdi af en *parameter*  $\theta$  tilhørende *parameterrummet*  $\Theta$  har man et sandsynlighedsmaal  $P_\theta$  på  $\mathfrak{X}$ . Disse  $P_\theta$ -er er alle sammen kandidater til at være  $\mathbf{X}$ 's fordeling, og for (mindst) én værdi  $\theta$  er det rigtigt at  $\mathbf{X}$ 's fordeling er  $P_\theta$ .

Udsagnet » $\mathbf{x}$  er en observeret værdi af den stokastiske variabel  $\mathbf{X}$ , og for mindst én værdi af  $\theta \in \Theta$  er det rigtigt at fordelingen af  $\mathbf{X}$  er  $P_\theta$ « er (en formulering af) den *statistiske model*.

*Modelfunktionen* er en funktion  $f : \mathfrak{X} \times \Theta \rightarrow [0; +\infty[$  sådan at for hvert fast  $\theta \in \Theta$  er funktionen  $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \theta)$  den sandsynligheds(tætheds)funktion som  $\mathbf{X}$  har hvis  $\theta$  er den rigtige værdi af parameteren.

*Likelihoodfunktionen* svarende til  $\mathbf{x}$  er funktionen  $L : \Theta \rightarrow [0; +\infty[$  givet ved  $L(\theta) = f(\mathbf{x}, \theta)$ . – Likelihoodfunktionen kommer til at spille en central rolle i forbindelse med teorien for estimation af parametre og test af statistiske hypoteser.

Hvis man kan skrive likelihoodfunktionen som  $L(\theta) = g(\mathbf{x}) h(t(\mathbf{x}), \theta)$  for passende valgte funktioner  $g$ ,  $h$  og  $t$ , så siges  $t$  at være *sufficient* (eller at give en *sufficient datareduktion*). – Sufficiensbegrebet er især interessant når  $t$  afbilder ind i et rum af meget mindre dimension end  $\mathfrak{X}$ , typisk  $\mathbb{R}$  eller  $\mathbb{R}^2$ .

Bemærkninger:

1. Parametre betegnes ofte med græske bogstaver.
2. Parameterrummet  $\Theta$  er normalt af meget mindre dimension end observationsrummet  $\mathfrak{X}$ .
3. Man vil sædvanligvis tilstræbe at parametriseringen er *injektiv*, dvs. at afbildningen  $\theta \mapsto P_\theta$  er injektiv.
4. Likelihoodfunktionen skal *ikke* summere eller integrere til 1.
5. Man opererer ofte med *log-likelihoodfunktionen*, dvs. logaritmen til likelihoodfunktionen; man benytter altid den naturlige logaritme.

Lidt mere notation:

1. Undertiden har vi brug for at præcisere at  $L$  er likelihoodfunktionen hørende til netop  $\mathbf{x}$ , og vi vil så skrive  $L(\theta; \mathbf{x})$  i stedet for  $L(\theta)$ .

## PUNKT-NOTATIONEN

Hvis man har nogle indicerede værdier, f.eks.  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , bruger man som betegnelse for summen af dem det samme symbol, men med et punkt på indeksets plads:

$$a_{\cdot} = \sum_{i=1}^n a_i$$

Tilsvarende hvis der er mere end et indeks:

$$b_{i\cdot} = \sum_j b_{ij}$$

og

$$b_{\cdot j} = \sum_i b_{ij}$$

2. Symbolerne  $E_\theta$  og  $\text{Var}_\theta$  anvendes når der er behov for at præcisere at middelværdien hhv. variansen udregnes med hensyn til den sandsynlighedsfordeling der svarer til parameter værdien  $\theta$ , altså med hensyn til  $P_\theta$ .

## 6.1 Eksempler

### Enstikprøveproblemet for 01-variable

I den generelle formulering af enstikprøveproblemet for 01-variable har man en observation  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  der antages at være en observeret værdi af en stokastisk variabel  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  med værdier i  $\mathcal{X} = \{0, 1\}^n$ . De enkelte  $X$ -er antages at være uafhængige identisk fordelte 01-variable, og  $P(X_i = 1) = \theta$  hvor  $\theta$  er den ukendte parameter. Parameterrummet er  $\Theta = [0; 1]$ . Modelfunktionen er (jf. (1.5) side 27)

$$f(\mathbf{x}, \theta) = \theta^{x_{\cdot}} (1 - \theta)^{n - x_{\cdot}}, \quad (\mathbf{x}, \theta) \in \mathcal{X} \times \Theta,$$

og likelihoodfunktionen er

$$L(\theta) = \theta^{x_{\cdot}} (1 - \theta)^{n - x_{\cdot}}, \quad \theta \in \Theta.$$

Som det ses, afhænger likelihoodfunktionen kun af  $\mathbf{x}$  gennem  $x_{\cdot}$ , dvs.  $x_{\cdot}$  er sufficient, eller mere præcist: funktionen der afbilder  $\mathbf{x}$  over i  $x_{\cdot}$ , er sufficient.

▷ [Læs fortsættelsen side 105.]

#### Eksempel 6.1

Lad os sige at man har udført 7 gentagelser af et forsøg der har de to mulige udfald 0 og 1, og at man har opnået værdierne 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0. Vi vil opstille en statistisk model herfor.

Der foreligger observationen  $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$  som antages at være en værdi af en 7-dimensional stokastisk variabel  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_7)$  med værdier i  $\mathcal{X} = \{0, 1\}^7$ . De enkelte  $X_i$ -er antages at være uafhængige identisk fordelte 01-variable, og  $P(X_i = 1) = \theta$  hvor  $\theta$  er den ukendte parameter. Parameterrummet er  $\Theta = [0; 1]$ . Modelfunktionen er

$$f(\mathbf{x}, \theta) = \prod_{i=1}^7 \theta^{x_i} (1 - \theta)^{1 - x_i} = \theta^{x_{\cdot}} (1 - \theta)^{7 - x_{\cdot}}.$$

Likelihoodfunktionen svarende til observationen  $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$  er

$$L(\theta) = \theta^4 (1 - \theta)^3, \quad \theta \in [0; 1].$$

### Den simple binomialfordelingsmodel

Binomialfordelingen fremkommer som fordelingen af en sum af uafhængige identisk fordelte 01-variable, så det vil næppe overraske at statistisk analyse af binomialfordelte observationer minder særdeles meget om statistisk analyse af 01-variable.

Hvis  $Y$  er binomialfordelt med (kendt) antalsparameter  $n$  og ukendt sandsynlighedsparameter  $\theta \in [0; 1]$ , er modelfunktionen

$$f(y, \theta) = \binom{n}{y} \theta^y (1 - \theta)^{n-y}$$

hvor  $(y, \theta) \in \mathcal{X} \times \Theta = \{0, 1, 2, \dots, n\} \times [0; 1]$ , og likelihoodfunktionen er

$$L(\theta) = \binom{n}{y} \theta^y (1 - \theta)^{n-y}, \quad \theta \in [0; 1].$$

▷ [Læs fortsættelsen side 105.]

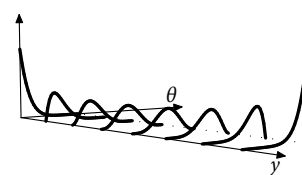
#### Eksempel 6.2

Hvis man i eksempel 6.1 ikke interesserede sig for udfaldene af de syv enkeltforsøg, men kun for det samlede antal 1-er, så ville situationen være den at man havde en observation  $y = 4$  af en binomialfordelt stokastisk variabel  $Y$  med antalsparameter  $n = 7$  og ukendt sandsynlighedsparameter  $\theta$ . Observationsrummet er  $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  og parameterummet er  $\Theta = [0; 1]$ . Modelfunktionen er

$$f(y, \theta) = \binom{7}{y} \theta^y (1 - \theta)^{7-y}, \quad (y, \theta) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \times [0; 1].$$

Likelihoodfunktionen svarende til observationen  $y = 4$  er

$$L(\theta) = \binom{7}{4} \theta^4 (1 - \theta)^3, \quad \theta \in [0; 1].$$



$$f(y, \theta) = \binom{7}{y} \theta^y (1 - \theta)^{7-y}$$

#### Eksempel 6.3: Rismelsbiller I

I en del af et eksempel der omtales nærmere i afsnit 9.1, optræder 144 rismelsbiller (*Tribolium castaneum*) som udsættes for en bestemt dosis af insektgiften pyrethrum, hvorved 43 af dem dør i løbet af den fastsatte observationsperiode. Hvis vi går ud fra at billerne er »ens«, og at de dør eller ikke dør uafhængigt af hinanden, så kan vi tillade os at formode at antallet  $y = 43$  er en observation af en binomialfordelt stokastisk variabel  $Y$  der har antalsparameter  $n = 144$  og ukendt sandsynlighedsparameter  $\theta$ . Den statistiske model er da givet ved modelfunktionen

$$f(y, \theta) = \binom{144}{y} \theta^y (1 - \theta)^{144-y}, \quad (y, \theta) \in \{0, 1, 2, \dots, 144\} \times [0; 1].$$

Likelihoodfunktionen svarende til observationen  $y = 43$  er

$$L(\theta) = \binom{144}{43} \theta^{43} (1 - \theta)^{144-43}, \quad \theta \in [0; 1].$$

▷ [Eksemplet fortsætter i eksempel 7.1 side 106.]

### Enstikprøveproblemet i binomialfordelingen

Man har observationer  $y_1, y_2, \dots, y_s$  af stokastiske variable  $Y_1, Y_2, \dots, Y_s$  der er indbyrdes uafhængige binomialfordelte således at  $Y_j$  har antalsparameter  $n_j$



Tabel 6.1 Skematisk opstilling ved sammenligning af binomialfordelinger

|                     | gruppe nr.  |             |             |     |             |
|---------------------|-------------|-------------|-------------|-----|-------------|
|                     | 1           | 2           | 3           | ... | s           |
| antal gunstige      | $y_1$       | $y_2$       | $y_3$       | ... | $y_s$       |
| antal ikke-gunstige | $n_1 - y_1$ | $n_2 - y_2$ | $n_3 - y_3$ | ... | $n_s - y_s$ |
| i alt               | $n_1$       | $n_2$       | $n_3$       | ... | $n_s$       |

(kendt) og sandsynlighedsparameter  $\theta_j \in [0; 1]$ . Man kan med fordel tænke på observationerne som foreliggende i et skema som i tabel 6.1. Modelfunktionen er

$$f(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^s \binom{n_j}{y_j} \theta_j^{y_j} (1 - \theta_j)^{n_j - y_j}$$

hvor parametervariablen  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$  varierer i  $\Theta = [0; 1]^s$ , og observationsvariablen  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_s)$  varierer i  $\mathfrak{X} = \prod_{j=1}^s \{0, 1, \dots, n_j\}$ . Likelihoodfunktionen og log-likelihoodfunktionen svarende til  $\mathbf{y}$  er

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \text{konst}_1 \cdot \prod_{j=1}^s \theta_j^{y_j} (1 - \theta_j)^{n_j - y_j},$$

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = \text{konst}_2 + \sum_{j=1}^s (y_j \ln \theta_j + (n_j - y_j) \ln(1 - \theta_j))$$

hvor  $\text{konst}_1$  er produktet af de  $s$  binomialkoefficienter, og  $\text{konst}_2$  er  $\ln(\text{konst}_1)$ .

▷ [Fortsættes side 106.]

#### Eksempel 6.4: Rismelsbiller II

Man har udsat nogle rismelsbiller for gift i forskellige koncentrationer, nemlig 0.20, 0.32, 0.50 og 0.80 mg/cm<sup>2</sup>, og dernæst set hvor mange af billerne der var døde efter 13 dages forløb. Forsøgsresultaterne er vist i tabel 6.2. (Giften strøs ud på gulvet hvor billerne færdes, derfor måles koncentrationen i mængde pr. areal.) Man er interesseret i at undersøge om der er forskel på virkningen af de forskellige koncentrationer. Vi vil derfor opstille en statistisk model der gør en sådan undersøgelse mulig.

Som i eksempel 6.3 vil vi antage at antal døde biller ved hver af de fire giftkoncentrationer kan opfattes som observerede værdier af binomialfordelte stokastiske variable. For hvert  $j$  lader vi  $y_j$  betegne antal døde biller og  $n_j$  betegne antal biller i alt ved koncentration nr.  $j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Den statistiske model er da at  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (43, 50, 47, 48)$  er en observeret værdi af en firedimensional stokastisk variabel  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$  hvor  $Y_1, Y_2, Y_3$  og  $Y_4$  er indbyrdes uafhængige binomialfordelte med antalsparametre  $n_1 = 144$ ,  $n_2 = 69$ ,  $n_3 = 54$  og  $n_4 = 50$  og sandsynlighedsparametre  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  og  $\theta_4$ . Modelfunktionen er

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4; \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \binom{144}{y_1} \theta_1^{y_1} (1 - \theta_1)^{144 - y_1} \binom{69}{y_2} \theta_2^{y_2} (1 - \theta_2)^{69 - y_2} \times$$

$$\binom{54}{y_3} \theta_3^{y_3} (1 - \theta_3)^{54 - y_3} \binom{50}{y_4} \theta_4^{y_4} (1 - \theta_4)^{50 - y_4}.$$

|                 | koncentration |      |      |      |
|-----------------|---------------|------|------|------|
|                 | 0.20          | 0.32 | 0.50 | 0.80 |
| antal døde      | 43            | 50   | 47   | 48   |
| antal ikke døde | 101           | 19   | 7    | 2    |
| i alt           | 144           | 69   | 54   | 50   |

Tabel 6.2 Rismelsbillers overlevelse ved forskellige gift doser.

Log-likelihoodfunktionen svarende til observationen  $\mathbf{y}$  er

$$\begin{aligned} \ln L(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) &= \text{konst} \\ &+ 43 \ln \theta_1 + 101 \ln(1 - \theta_1) + 50 \ln \theta_2 + 19 \ln(1 - \theta_2) \\ &+ 47 \ln \theta_3 + 7 \ln(1 - \theta_3) + 48 \ln \theta_4 + 2 \ln(1 - \theta_4). \end{aligned}$$

▷ [Eksemplet fortsætter i eksempel 7.2 side 106.]

### Multinomialfordelingen

Multinomialfordelingen er en generalisation af binomialfordelingen: I situationer hvor man har at gøre med  $n$  uafhængige gentagelser af et grundforsøg der kan resultere i et af  $r$  mulige udfald, vil antallet af gange man får den ene slags udfald, være *binomialfordelt*, jf. definition 1.10 side 27. I situationer hvor man har at gøre med  $n$  uafhængige gentagelser af et grundforsøg der kan resultere i et af  $r$  mulige udfald  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ , kan man interessere sig for de stokastiske variable  $Y_i$  der er lig antal gange man får udfaldet  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Den  $r$ -dimensionale stokastiske variabel  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$  vil blive *multinomialfordelt*.

Under de beskrevne omstændigheder er fordelingen af  $\mathbf{Y}$  af formen

$$P(\mathbf{Y} = \mathbf{y}) = \binom{n}{y_1 \ y_2 \ \dots \ y_r} \prod_{i=1}^r \theta_i^{y_i} \quad (6.1)$$

når  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_r)$  er et sæt af ikke-negative heltal der summerer til  $n$ , og  $P(\mathbf{Y} = \mathbf{y}) = 0$  ellers. Parameteren  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$  er et sæt af  $r$  ikke-negative reelle tal der summerer til 1, og hvor  $\theta_i$  er sandsynligheden for at grundforsøget giver udfaldet  $\omega_i$ . Størrelsen

$$\binom{n}{y_1 \ y_2 \ \dots \ y_r} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^r y_i!}$$

er en såkaldt *multinomialkoefficient* og er lig med antallet af måder hvorpå man kan dele en mængde med  $n$  elementer op i  $r$  delmængder sådan at delmængde nr.  $i$  indeholder netop  $y_i$  elementer,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Sandsynlighedsfordelingen givet ved sandsynlighedsfunktionen (6.1) omtales som multinomialfordelingen med  $r$  klasser (eller kategorier) og med antalsparameter  $n$  (et kendt tal) og sandsynlighedsparameter  $\boldsymbol{\theta}$ .

▷ [Læs fortsættelsen side 107.]

Tabel 6.3 Genotypefordeling af torsk fra tre lokaliteter i Østersøen.

|       | Lolland | Bornholm | Ålandsøerne |
|-------|---------|----------|-------------|
| AA    | 27      | 14       | 0           |
| Aa    | 30      | 20       | 5           |
| aa    | 12      | 52       | 75          |
| i alt | 69      | 86       | 80          |

*Eksempel 6.5: Torsk i Østersøen*

Den 6. marts 1961 fangede nogle havbiologer 69 torsk ved Lolland og undersøgte arten af blodets hæmoglobin i hver enkelt torsk. Senere på året fangede man desuden nogle torsk ved Bornholm og ved Ålandsøerne og undersøgte dem på samme måde (Sick, 1965).

Man mener at hæmoglobin-arten bestemmes af ét enkelt gen, og det som biologerne bestemte, var torskenes genotype for så vidt angår dette gen. Genet kan optræde i to udgaver som traditionen tro kaldes for A og a, og de mulige genotyper er da AA, Aa og aa. Den fundne fordeling på genotyper for hver af de tre lokaliteter ses i tabel 6.3.

På hver geografisk lokalitet har man klassificeret et antal torsk i tre mulige klasser, så på hver lokalitet er der tale om en multinomialfordelingssituation. (Når der er tre klasser, taler man også om en *trinomial*fordeling.) Som grundmodel benytter vi derfor den model der siger at de tre observerede tripler

$$\mathbf{y}_L = \begin{pmatrix} y_{1L} \\ y_{2L} \\ y_{3L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 30 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_B = \begin{pmatrix} y_{1B} \\ y_{2B} \\ y_{3B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 52 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} y_{1\tilde{A}} \\ y_{2\tilde{A}} \\ y_{3\tilde{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 75 \end{pmatrix}$$

stammer fra hver sin multinomialfordeling med antalsparametre henholdsvis  $n_L = 69$ ,  $n_B = 86$  og  $n_{\tilde{A}} = 80$ , og med sandsynlighedsparametre henholdsvis

$$\boldsymbol{\theta}_L = \begin{pmatrix} \theta_{1L} \\ \theta_{2L} \\ \theta_{3L} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_B = \begin{pmatrix} \theta_{1B} \\ \theta_{2B} \\ \theta_{3B} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} \theta_{1\tilde{A}} \\ \theta_{2\tilde{A}} \\ \theta_{3\tilde{A}} \end{pmatrix}.$$

▷ [Eksemplet fortsættes i eksempel 7.3 side 107.]

### Enstikprøveproblemet i poissonfordelingen

Den simpleste situation er som følger. Man har observationer  $y_1, y_2, \dots, y_n$  af uafhængige identisk poissonfordelte stokastiske variable  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  med parameter  $\mu$ . Modelfunktionen er

$$f(\mathbf{y}, \mu) = \prod_{j=1}^n \frac{\mu^{y_j}}{y_j!} \exp(-\mu) = \frac{\mu^{\mathbf{y} \cdot}}{\prod_{j=1}^n y_j!} \exp(-n\mu),$$

hvor  $\mu \geq 0$  og  $\mathbf{y} \in \mathbb{N}_0^n$ . Likelihoodfunktionen er  $L(\mu) = \text{konst } \mu^{\mathbf{y} \cdot} \exp(-n\mu)$ , og log-likelihoodfunktionen er  $\ln L(\mu) = \text{konst} + \mathbf{y} \cdot \ln \mu - n\mu$ .

▷ [Læs fortsættelsen side 107.]

*Eksempel 6.6: Hestespark*

For hvert af de 20 år fra 1875 til 1894 har man for hvert af den prøjske armés 10 regimenter

| antal dødsfald $y$ | antal regiment-år med $y$ dødsfald |
|--------------------|------------------------------------|
| 0                  | 109                                |
| 1                  | 65                                 |
| 2                  | 22                                 |
| 3                  | 3                                  |
| 4                  | 1                                  |
|                    | 200                                |

Tabel 6.4 *Antal dødsfald som følge af hestespark i den prøjsiske armé.*

registreret hvor mange soldater der døde fordi de blev sparket af en hest (Bortkiewicz, 1898). Det vil sige at man for hvert af de 200 »regiment-år« kender antal dødsfald som følge af hestespark.

Man kan give en oversigt over disse tal ved at angive i hvor mange regiment-år der var 0 dødsfald, i hvor mange der var 1 dødsfald, i hvor mange der var 2, osv., dvs. man klassificerer regiment-årene efter antal dødsfald. Det viste sig at det største antal dødsfald pr. regiment-år var 4, og der bliver derfor fem klasser svarende til 0, 1, 2, 3 og 4 døde pr. år. De faktiske tal ses i tabel 6.4.

Man må formode at det i høj grad var tilfældigheder der bestemte om en given soldat blev sparket til døde af en hest eller ej. Derfor er det også i høj grad tilfældigheder der har afgjort om et givet regiment i et givet år nu fik 0 eller 1 eller 2 osv. døde som følge af hestespark. Set fra en passende stor »flyvehøjde« kan man måske godt finde på at antage at dødsfaldene indtræffer uafhængigt af hinanden og med samme intensitet året igennem, således at betingelserne for en poissonfordelingsmodel er til stede.

Vi vil derfor forsøge os med den statistiske model der siger at de 200 observationer  $y_1, y_2, \dots, y_{200}$  er observationer af indbyrdes uafhængige identisk poissonfordelte stokastiske variable  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{200}$  med parameter  $\mu$ .

▷ [Eksemplet fortsætter i eksempel 7.4 side 108.]

### Ligefordeling på et interval

Dette eksempel har så vidt vides ikke den store praktiske anvendelse, men det kan være nyttigt for at afprøve teorien.

Antag at  $x_1, x_2, \dots, x_n$  er observationer af indbyrdes uafhængige identisk fordelte stokastiske variable  $X_1, X_2, \dots, X_n$  som er ligefordelte på intervallet  $]0; \theta[$ , hvor  $\theta > 0$  er den ukendte parameter. Tæthedsfunktionen for  $X_i$  er

$$f(x, \theta) = \begin{cases} 1/\theta & \text{når } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

så modelfunktionen er

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \begin{cases} 1/\theta^n & \text{når } 0 < x_{\min} \text{ og } x_{\max} < \theta \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Her er  $x_{\min} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  og  $x_{\max} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , altså henholdsvis den mindste og den største observation,

▷ [Læs fortsættelsen side 108.]

### Enstikprøveproblemet i normalfordelingen

Man har observationer  $y_1, y_2, \dots, y_n$  af uafhængige identisk normalfordelte stokastiske variable med middelværdi  $\mu$  og varians  $\sigma^2$ , altså fra fordelingen med

tæthedsfunktion  $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$ . Modelfunktionen er

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}, \mu, \sigma^2) &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_j - \mu)^2}{\sigma^2}\right) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (y_j - \mu)^2\right) \end{aligned}$$

hvor  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  og  $\sigma^2 > 0$ . Standardomskrivninger giver

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (y_j - \mu)^2 &= \sum_{j=1}^n ((y_j - \bar{y}) + (\bar{y} - \mu))^2 \\ &= \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 + 2(\bar{y} - \mu) \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y}) + n(\bar{y} - \mu)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 + n(\bar{y} - \mu)^2, \end{aligned}$$

altså

$$\sum_{j=1}^n (y_j - \mu)^2 = \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 + n(\bar{y} - \mu)^2. \quad (6.2)$$

Ved hjælp heraf får vi log-likelihoodfunktionen til

$$\begin{aligned} \ln L(\mu, \sigma^2) &= \text{konst} - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (y_j - \mu)^2 \\ &= \text{konst} - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 - \frac{n(\bar{y} - \mu)^2}{2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Vi kan udnytte formel (6.2) til endnu et formål: hvis vi indsætter  $\mu = 0$ , får vi

$$\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^n y_j^2 - n\bar{y}^2 = \sum_{j=1}^n y_j^2 - \frac{1}{n} y^2$$

dvs. summen af de kvadratiske afvigelse af  $y$ -erne fra  $\bar{y}$  kan udregnes ud fra summen af  $y$ -erne og summen af kvadraterne på  $y$ -erne. For at udregne likelihoodfunktionen behøver man altså ikke kende de enkelte observationer, det er nok at kende summen og summen af kvadraterne (dvs. stikprøvefunktionen  $t(\mathbf{y}) = (\sum y, \sum y^2)$  er *sufficient*, jf. side 91).

▷ [Læs fortsættelsen side 108.]

*Eksempel 6.7: Lysets hastighed*

I årene 1880-82 foretog den amerikanske fysiker A.A. Michelson og den amerikanske

|    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|-----|
| 28 | 26 | 33 | 24 | 34 | -44 |
| 27 | 16 | 40 | -2 | 29 | 22  |
| 24 | 21 | 25 | 30 | 23 | 29  |
| 31 | 19 | 24 | 20 | 36 | 32  |
| 36 | 28 | 25 | 21 | 28 | 29  |
| 37 | 25 | 28 | 26 | 30 | 32  |
| 36 | 26 | 30 | 22 | 36 | 23  |
| 27 | 27 | 28 | 27 | 31 | 27  |
| 26 | 33 | 26 | 32 | 32 | 24  |
| 39 | 28 | 24 | 25 | 32 | 25  |
| 29 | 27 | 28 | 29 | 16 | 23  |

Tabel 6.5 Newcombs bestemmelser af lysets passagetid af en strækning på 7442 m. Tabelværdierne  $\times 10^{-3} + 24.8$  er passagetiden i  $10^{-6}$  sek.

matematiker og astronom S. Newcomb en række efter den tids forhold temmelig nøjagtige bestemmelser af lysets hastighed i luft (Newcomb, 1891). Deres metoder var baseret på Foucaults idé med at sende en lysstråle fra et hurtigt roterende spejl hen på et fjernt fast spejl som returnerer lysstrålen til det roterende spejl, hvor man måler dens vinkelforskydning i forhold til den oprindelige lysstråle. Hvis man kender rotationshastigheden samt afstanden mellem spejlene, kan man derved bestemme lyshastigheden.

I tabel 6.5 (fra Stigler (1977)) er vist resultaterne af de 66 målinger som Newcomb foretog i perioden 24. juli til 5. september 1882 i Washington, D.C. I Newcombs opstilling var der 3721 m mellem det roterende spejl der var placeret i Fort Myer på vestbredden af Potomac-floden, og det faste spejl der var anbragt på George Washington-monumentets fundament. Den størrelse som Newcomb rapporterer, er lysets passagetid, altså den tid som det er om at tilbagelægge den pågældende distance.

Af de 66 værdier i tabellen skiller to sig ud, nemlig -44 og -2, der synes at være *outliers*, altså tal der tilsyneladende ligger for langt væk fra flertallet af observationerne. I den efterfølgende analyse af tallene vil vi vælge at se bort fra de to nævnte observationer, og der indgår herefter kun 64 observationer.

▷ [Eksemplet fortsættes i eksempel 7.5 side 109.]

### Tostikprøveproblemet i normalfordelingen

Man har to grupper af individer, og på hvert individ har man målt værdien af en bestemt variabel  $Y$ . Individerne i den ene gruppe hører ikke sammen med dem i den anden gruppe på nogen måde, de er *uparrede*. Der behøver heller ikke være lige mange observationer i de to grupper. Skematisk ser situationen sådan ud:

|          | observationer |          |         |          |         |            |
|----------|---------------|----------|---------|----------|---------|------------|
| gruppe 1 | $y_{11}$      | $y_{12}$ | $\dots$ | $y_{1j}$ | $\dots$ | $y_{1n_1}$ |
| gruppe 2 | $y_{21}$      | $y_{22}$ | $\dots$ | $y_{2j}$ | $\dots$ | $y_{2n_2}$ |

Her betegner  $y_{ij}$  observation nr.  $j$  i gruppe nr.  $i$ ,  $i = 1, 2$ . Grupperne har henholdsvis  $n_1$  og  $n_2$  observationer. Vi vil gå ud fra at forskellen mellem observationer inden for en gruppe er tilfældig, hvorimod der er en *systematisk forskel* på to de grupper – det er derfor at observationerne er inddelt i grupper! Endelig antages at  $y_{ij}$ -erne er observerede værdier af uafhængige stokastiske variable  $Y_{ij}$  som er normalfordelte med samme varians  $\sigma^2$  og med  $E Y_{ij} = \mu_i$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_i$ ,  $i = 1, 2$ .

På denne måde beskriver de to middelværdiparametre  $\mu_1$  og  $\mu_2$  den *systematiske variation*, dvs. de to gruppers niveauer, medens variansparameteren  $\sigma^2$  (samt normalfordelingen) beskriver den *tilfældige variation*, der altså er den samme i begge grupper (denne antagelse kan man eventuelt teste, se opgave 8.2 side 125). Modelfunktionen er

$$f(\mathbf{y}, \mu_1, \mu_2, \sigma^2) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp\left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu_i)^2 \right)$$

hvor  $\mathbf{y} = (y_{11}, y_{12}, y_{13}, \dots, y_{1n_1}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n_2}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$  og  $\sigma^2 > 0$ ; vi har her sat  $n = n_1 + n_2$ . Den til (6.2) analoge spaltning af kvadratsummen er

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu_i)^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^2 n_i (\bar{y}_i - \mu_i)^2$$

hvor  $\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$  er gennemsnittet i gruppe nr.  $i$ .

Log-likelihoodfunktionen er

$$\begin{aligned} \ln L(\mu_1, \mu_2, \sigma^2) & \\ &= \text{konst} - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \left( \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^2 n_i (\bar{y}_i - \mu_i)^2 \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

▷ [Fortsættes side 109.]

#### Eksempel 6.8: C-vitamin

C-vitamin (ascorbinsyre) er et veldefineret kemisk stof som man sagtens kan fremstille industrielt, og man skulle tro at det industrielt fremstillede virker på nøjagtig samme måde som »naturligt« C-vitamin. For at undersøge om det nu også forholder sig sådan, har man foretaget et eksperiment med nogle marsvin (små gnavere).

Man delte 20 nogenlunde ens marsvin op i to grupper, hvoraf den ene fik appelsinsaft, og den anden fik en tilsvarende mængde »kunstigt« C-vitamin. Efter seks ugers behandling målte man længden af fortændernes odontoblaste (det tandbensdannende væv). Man fik da disse resultater (i hver gruppe er observationerne ordnet efter størrelse):

|                     |     |     |     |     |      |      |      |      |      |      |
|---------------------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
| appelsinsaft:       | 8.2 | 9.4 | 9.6 | 9.7 | 10.0 | 14.5 | 15.2 | 16.1 | 17.6 | 21.5 |
| kunstigt C-vitamin: | 4.2 | 5.2 | 5.8 | 6.4 | 7.0  | 7.3  | 10.1 | 11.2 | 11.3 | 11.5 |

Man kan fastslå at der må være tale om en art tostikprøveproblem. Karakteren af observationerne gør at det ikke er urimeligt at forsøge sig med en normalfordelingsmodel af en slags, og det er alt i alt nærliggende at sige at der er tale om et »tostikprøveproblem med normalfordelte observationer«. Vi vil analysere observationerne ved brug af denne model, mere nøjagtigt vil vi undersøge om odontoblasternes middelvækst er den samme i de to grupper.

▷ [Eksemplet fortsætter som eksempel 7.6 side 110.]

### Simpel lineær regression

Regressionsanalyse, der er en stor underafdeling inden for statistik, handler om at modellere middelværdistrukturen for (det som modellen opfatter som) de

| Kogepunkt | Lufttryk | Kogepunkt | Lufttryk |
|-----------|----------|-----------|----------|
| 194.5     | 20.79    | 201.3     | 24.01    |
| 194.3     | 20.79    | 203.6     | 25.14    |
| 197.9     | 22.40    | 204.6     | 26.57    |
| 198.4     | 22.67    | 209.5     | 28.49    |
| 199.4     | 23.15    | 208.6     | 27.76    |
| 199.9     | 23.35    | 210.7     | 29.04    |
| 200.9     | 23.89    | 211.9     | 29.88    |
| 201.1     | 23.99    | 212.2     | 30.06    |
| 201.4     | 24.02    |           |          |

Tabel 6.6 *Forbes' barometriske målinger. – Kogepunktet er angivet i °F, lufttrykket i 'inches Kviksølv'.*

stokastiske variable, idet man inddrager et større eller mindre antal kvantitative variable. Her ser vi på det simpleste tilfælde.

Der foreligger et antal sammenhørende værdier  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , hvor  $y$ -erne opfattes som observerede værdier af stokastiske variable  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , og  $x$ -erne er såkaldte *baggrundsvARIABLE* eller *forklarende variable*. Det er en væsentlig pointe at  $x$ -erne ifølge modellen er ikke-stokastiske.

Den simple lineære regressionsmodel går ud på at  $Y$ -erne er indbyrdes uafhængige normalfordelte stokastiske variable med samme varians  $\sigma^2$  og med en middelværdistruktur af formen  $E Y_i = \alpha + \beta x_i$ , eller sagt mere præcist: der findes konstanter  $\alpha$  og  $\beta$  således at  $E Y_i = \alpha + \beta x_i$  for alle  $i$ . Modellen indeholder således tre ukendte parametre,  $\alpha$ ,  $\beta$  og  $\sigma^2$ . Modelfunktionen er

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}, \alpha, \beta, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_i - (\alpha + \beta x_i))^2}{\sigma^2}\right) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - (\alpha + \beta x_i))^2\right) \end{aligned}$$

hvor  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  og  $\sigma^2 > 0$ . Log-likelihoodfunktionen er

$$\ln L(\alpha, \beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - (\alpha + \beta x_i))^2. \quad (6.5)$$

▷ [Fortsættes side 110.]

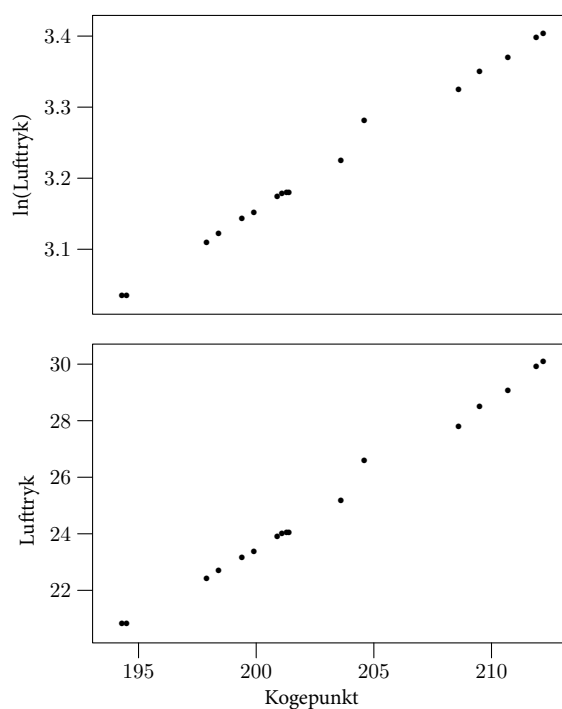
#### Eksempel 6.9: Forbes' barometriske målinger

Som bekendt aftager lufttrykket med højden over havets overflade, og derfor kan et barometer benyttes som højdemåler. Da vands kogepunkt aftager med lufttrykket, kan man imidlertid også bestemme højden ved at koge vand. – I 1840'erne og 1850'erne foretog den skotske fysiker James D. Forbes på 17 forskellige lokaliteter i Alperne og i Skotland en række målinger hvor han bestemte dels vands kogepunkt, dels luftens tryk (omregnet til lufttrykket ved en standardlufttemperatur) (Forbes, 1857). Resultaterne er vist i tabel 6.6 (fra Weisberg (1980)).

Hvis man på en tegning afsætter lufttryk som funktion af kogepunkt, ser man at der er en tydelig sammenhæng (figur 6.1, nederst). Man kunne derfor overveje at opstille en lineær regressionsmodel med lufttryk som  $y$  og kogepunkt som  $x$ . Hvis man konsulterer en



Figur 6.1 *Forbes' målinger.*  
 Øverst: logaritmen til lufttryk  
 afsat mod kogepunkt.  
 Nederst: lufttryk afsat mod  
 kogepunkt.  
 Trykket er målt i 'inches  
 Kviksølv', temperaturen i °F.



fysiker, kan man dog få at vide at man i højere grad skulle forvente en lineær sammenhæng mellem kogepunkt og logaritmen til lufttryk, hvilket også bekræftes af en figur (figur 6.1, øverst), så vi vil i stedet prøve at beskrive data ved hjælp af en regressionsmodel hvor man som  $y$  bruger logaritmen til lufttrykket og som  $x$  kogepunktet.

▷ [Eksemplet fortsættes i eksempel 7.7 side 112.]

## 6.2 Opgaver

### Opgave 6.1

Gør rede for at binomialfordelingen faktisk er en instans af multinomialfordelingen.

### Opgave 6.2

Binomialfordelingen blev defineret som fordelingen af en sum af uafhængige identisk fordelte 0/1-variable (definition 1.10 side 27).

Overvej hvordan man kan generalisere denne definition til en definition af multinomialfordelingen som fordelingen af en sum af uafhængige variable.

## 7 Estimation

EN STATISTISK MODEL er et udsagn om at det foreliggende datamateriale kan opfattes som en observation fra en bestemt sandsynlighedsfordeling der er fuldstændig specificeret på nær nogle få ukendte parametre. I dette kapitel skal vi beskæftige os med *estimationsproblemet*, dvs. spørgsmålet om hvordan man ud fra model plus observationer bærer sig ad med at udregne et *skøn* eller *estimat* over modellens ukendte parametre.

Man kan ikke inden for matematikkens rammer deducere sig frem til en løsning, det er nødvendigt undervejs at inddrage et eller flere udefra kommende principper. Afhængigt af hvilke principper man vælger at gå ud fra, kan man få forskellige estimationsmetoder. I det følgende præsenterer vi den fremgangsmåde som man »plejer« at bruge her i landet (og i mange andre lande). Først noget terminologi:

- En *stikprøvefunktion* er en funktion der er defineret på observationsrummet  $\mathcal{X}$  (og som afbilder ind i  $\mathbb{R}$  eller  $\mathbb{R}^n$ ).

Hvis  $t$  er en stikprøvefunktion, er  $t(X)$  en stokastisk variabel; ofte skelner man ikke så voldsomt meget mellem  $t$  og  $t(X)$ .

- En *estimator* er en stikprøvefunktion (eller stokastisk variabel) med værdier i parameterrummet  $\Theta$ .

Det er lidt underforstået at estimatoren skal være et nogenlunde godt bud på den sande værdi af parameteren.

- Et *estimat* er en værdi som estimatoren antager, dvs. hvis  $t$  (eller  $t(X)$ ) er en estimator, så er  $t(\mathbf{x})$  et estimat.
- En *central* estimator for  $g(\boldsymbol{\theta})$  (hvor  $g$  er en funktion defineret på  $\Theta$ ) er en estimator  $t$  med den egenskab at  $E_{\boldsymbol{\theta}}(t(X)) = g(\boldsymbol{\theta})$  for ethvert  $\boldsymbol{\theta}$ , dvs. en estimator som »i middel rammer rigtigt«.

### 7.1 Maksimaliseringsestimatoren

Antag at der foreligger en observation  $\mathbf{x}$  der antages at kunne beskrives med en statistisk model der er specificeret ved modelfunktionen  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ . Hvis man skal vurdere de forskellige mulige  $\boldsymbol{\theta}$ -værdier for at finde en der kan udnævnes til at være et godt bud på »den sande værdi«, kan man basere vurderingen på værdierne af likelihoodfunktionen  $L(\boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ : hvis  $L(\boldsymbol{\theta}_1) > L(\boldsymbol{\theta}_2)$ , så er  $\boldsymbol{\theta}_1$  et bedre bud på den sande værdi end  $\boldsymbol{\theta}_2$  er; hvis man godtager dette ræsonnement, så må konsekvensen være at  $\boldsymbol{\theta}$  skal estimeres som den værdi  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  der maksimaliserer  $L$ .

## DEFINITION 7.1

Maksimaliseringsestimatoren er den funktion der til en observation  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  giver maksimumspunktet  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$  for likelihoodfunktionen svarende til  $\mathbf{x}$ .

Maksimaliseringsestimatet er den værdi som maksimaliseringsestimatoren antager.

Ovenstående definition er naturligvis noget sjusket og ufuldstændig; der er ingen der siger at likelihoodfunktionen har netop ét maksimumspunkt, man kan godt komme ud for at der er flere maksimumspunkter, eller slet ingen. En lidt bedre definition kunne se sådan ud:

## DEFINITION 7.2

Et maksimaliseringsestimat hørende til observationen  $\mathbf{x}$  er et maksimumspunkt  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$  for likelihoodfunktionen hørende til  $\mathbf{x}$ .

En maksimaliseringsestimator er en (ikke nødvendigvis overalt defineret) funktion af  $\mathcal{X}$  ind i  $\Theta$ , der til en observation  $\mathbf{x}$  leverer et maksimaliseringsestimat.

Maksimaliseringsestimatoren er et bud på en generel metode til udregning af estimators. For at vurdere om det er et fornuftigt bud, kan man stille forskellige spørgsmål og se hvordan de besvares.

1. Hvor nemt er det at anvende metoden i konkrete modeller?

Metoden går i praksis ud på at man skal bestemme maksimumspunkt/maksimumspunkter for funktionen  $L$ ; bestemmelse af maksimumspunkter for en reel funktion er en almindelig og velforstået matematisk problemstilling som kan angribes (og løses) med standardmetoder.

Det er i øvrigt oftest en fordel at bestemme  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  som maksimumspunkt for  $\log$ -likelihoodfunktionen  $\ln L$ . Hvis  $\ln L$  er en differentiabel funktion, skal maksimumspunkter i det indre af  $\Theta$  som bekendt søges blandt løsningerne til ligningen  $D \ln L(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ . Her er  $D$  differentialoperatoren der betegner differentiation med hensyn til  $\boldsymbol{\theta}$ .

2. Findes der matematiske sætninger om maksimaliseringsestimatorens egenskaber, f.eks. om eksistens og entydighed, og om hvor tæt  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  ligger på  $\boldsymbol{\theta}$ ?

Ja, det gør der. Der findes en række generelle resultater om at når visse betingelser er opfyldt, og antallet af observationer går mod uendelig, så vil sandsynligheden for at der eksisterer et entydigt maksimaliseringsestimat, gå mod 1, og  $P_{\boldsymbol{\theta}}(|\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\theta}| < \varepsilon)$  går mod 1 (for ethvert  $\varepsilon > 0$ ).

Når nogle flere betingelser er opfyldt, blandt andet skal  $\Theta$  være en åben mængde, og de tre første afledede af  $\ln L$  skal eksistere og opfylde visse regularitetsbetingelser, så gælder at for  $n \rightarrow \infty$  er  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})$  asymptotisk normalfordelt med asymptotisk middelværdi  $\boldsymbol{\theta}$  og en asymptotisk varians som er den inverse til  $E_{\boldsymbol{\theta}}(-D^2 \ln L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}))$ ; desuden gælder at  $E_{\boldsymbol{\theta}}(-D^2 \ln L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X})) = \text{Var}_{\boldsymbol{\theta}}(D \ln L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}))$ . (Ifølge den såkaldte Cramér-Rao ulighed er dette den nedre grænse for variansen af en central estimator, så i den forstand er maksimaliseringsestimatoren asymptotisk optimal.)

I situationer med en endimensional parameter  $\theta$  betyder den asymptotiske normalitet af  $\widehat{\theta}$  mere præcist at den stokastiske variabel

$$U = \frac{\widehat{\theta} - \theta}{\sqrt{E_{\theta}(-D^2 \ln L(\theta; \mathbf{X}))}}$$

er asymptotisk standardnormalfordelt når  $n \rightarrow \infty$ , og det er det samme som at sige at  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(U \leq u) = \Phi(u)$  for ethvert  $u \in \mathbb{R}$ . ( $\Phi$  er fordelingsfunktionen for standardnormalfordelingen, jf. definition 3.9 side 65.)

3. Giver metoden estimerer der ser fornuftige ud i de (få og simple) tilfælde hvor man er i stand til at overskue situationen?

Det lader sig kun afgøre ved at se på eksempler.

## 7.2 Eksempler

### Enstikprøveproblemet for 01-variable

◁ [Fortsat fra side 92.]

I denne model er log-likelihoodfunktionen og dens afledede

$$\begin{aligned}\ln L(\theta) &= x. \ln \theta + (n - x.) \ln(1 - \theta), \\ D \ln L(\theta) &= \frac{x. - n\theta}{\theta(1 - \theta)}, \\ D^2 \ln L(\theta) &= -\frac{x.}{\theta^2} - \frac{n - x.}{(1 - \theta)^2}\end{aligned}$$

når  $0 < \theta < 1$ . Hvis  $0 < x. < n$ , har ligningen  $D \ln L(\theta) = 0$  den entydige løsning  $\widehat{\theta} = x./n$ , og da den anden afledede er negativ, er dette det entydige maksimumspunkt. Hvis  $x. = n$ , er  $L$  og  $\ln L$  strengt voksende, og hvis  $x. = 0$ , er  $L$  og  $\ln L$  strengt aftagende, så også i disse tilfælde er der et entydigt maksimumspunkt der er givet ved  $\widehat{\theta} = x./n$ . Vi er således nået frem til at maksimaliseringsestimateret for  $\theta$  er den relative hyppighed af 1-er – og det er jo meget fornuftigt.

Middelværdi og varians af estimatoren  $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(\mathbf{X})$  er, jf. eksempel 1.19 side 37 og regnereglerne for middelværdi og varians,  $E_{\theta} \widehat{\theta} = \theta$  og  $\text{Var}_{\theta} \widehat{\theta} = \theta(1 - \theta)/n$ .

Den generelle teori (jf. ovenfor) oplyser at for store  $n$  er  $E_{\theta} \widehat{\theta} \approx \theta$  og  $\text{Var}_{\theta} \widehat{\theta} \approx \left(E_{\theta}(-D^2 \ln L(\theta, \mathbf{X}))\right)^{-1} = \left(E_{\theta}\left(\frac{X.}{\theta^2} + \frac{n - X.}{(1 - \theta)^2}\right)\right)^{-1} = \theta(1 - \theta)/n$ .

▷ [Læs fortsættelsen side 116.]

### Den simple binomialfordelingsmodel

◁ [Fortsat fra side 93.]

I den simple binomialfordelingsmodel er likelihoodfunktionen

$$L(\theta) = \binom{n}{y} \theta^y (1 - \theta)^{n-y}, \quad \theta \in [0; 1]$$

og log-likelihoodfunktionen

$$\ln L(\theta) = \ln \binom{n}{y} + y \ln \theta + (n - y) \ln(1 - \theta), \quad \theta \in [0; 1].$$

På nær en konstant er denne funktion magen til den tilsvarende i enstikprøveproblemet med 01-variable. Vi kan derfor straks konstatere at maksimaliserings-estimatoren er  $\hat{\theta} = Y/n$ . Da  $Y$  har samme fordeling som  $X$ , er fordelingen af maksimaliserings-estimatoren den samme i de to modeller, specielt er også her  $E_{\theta} \hat{\theta} = \theta$  og  $\text{Var}_{\theta} \hat{\theta} = \theta(1 - \theta)/n$ .

▷ [Læs fortsættelsen side 117.]

*Eksempel 7.1: Rismelsbiller I*

◁ [Fortsat fra eksempel 6.3 side 93.]

I taleksemplet med rismelsbiller er  $\hat{\theta} = 43/144 = 0.30$ . Den estimerede standardafvigelse er  $\sqrt{\hat{\theta}(1 - \hat{\theta})/144} = 0.04$ .

▷ [Eksemplet fortsætter som eksempel 8.1 side 117.]

### Enstikprøveproblemet i binomialfordelingen

◁ [Fortsat fra side 94.]

Log-likelihoodfunktionen svarende til  $\mathbf{y}$  er

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = \text{konst} + \sum_{j=1}^s (y_j \ln \theta_j + (n_j - y_j) \ln(1 - \theta_j)). \quad (7.1)$$

Det ses at  $\ln L$  er en sum af led der hver især (på nær en konstant) er en log-likelihoodfunktion fra en simpel binomialfordelingsmodel, og parameteren  $\theta_j$  optræder kun i det  $j$ -te led. Vi kan derfor uden videre opskrive maksimaliserings-estimatoren som

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_s) = \left( \frac{Y_1}{n_1}, \frac{Y_2}{n_2}, \dots, \frac{Y_s}{n_s} \right).$$

Da  $Y_1, Y_2, \dots, Y_s$  er uafhængige, bliver estimatorerne  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_s$  også uafhængige, og som i den simple binomialfordelingsmodel er  $E \hat{\theta}_j = \theta_j$  og  $\text{Var} \hat{\theta}_j = \theta_j(1 - \theta_j)/n_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

▷ [Læs fortsættelsen side 118.]

*Eksempel 7.2: Rismelsbiller II*

◁ [Fortsat fra eksempel 6.4 side 94.]

I rismelsbille-eksemplet hvor hver gruppe (koncentration) har sin egen binomialfordelingsparameter, estimeres denne som brøkdelen døde i den pågældende gruppe, dvs.  $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4) = (0.30, 0.72, 0.87, 0.96)$ .

De estimerede standardafvigelser er  $\sqrt{\hat{\theta}_j(1 - \hat{\theta}_j)/n_j}$ , dvs. 0.04, 0.05, 0.05 og 0.03.

▷ [Eksemplet fortsætter som eksempel 8.2 side 119.]

## Multinomialfordelingen

◁ [Fortsat fra side 95.]

Hvis  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_r)$  er en observation fra en multinomialfordeling med  $r$  klasser, antalsparameter  $n$  og sandsynlighedsparameter  $\boldsymbol{\theta}$ , så er log-likelihood-funktionen

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = \text{konst} + \sum_{i=1}^r y_i \ln \theta_i.$$

Parameteren  $\boldsymbol{\theta}$  skal estimeres som maksimumspunktet  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  (i  $\Theta$ ) for  $\ln L$ ; parameterområdet  $\Theta$  er mængden af talsæt  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$  for hvilke  $\theta_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , og  $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_r = 1$ . Man ville vel umiddelbart formode at  $\theta_i$  skal estimeres ved  $y_i/n$ , og det er da også det rigtige svar; men hvordan viser man det?

En mulighed er at benytte en af de generelle metoder til bestemmelse af ekstremum under bibetingelser. En anden mulighed er at vise at vores formodning er rigtig. Vi vælger den sidste mulighed og skal altså vise at hvis vi sætter  $\hat{\theta}_i = y_i/n$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , og  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)$ , så er  $\ln L(\boldsymbol{\theta}) \leq \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  for alle  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ .

Det snedige trick der skal bruges hertil, er at  $\ln t \leq t - 1$  for alle  $t$  (og med lighedstegn hvis og kun hvis  $t = 1$ ). Der gælder derfor

$$\begin{aligned} \ln L(\boldsymbol{\theta}) - \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \sum_{i=1}^r y_i \ln \frac{\theta_i}{\hat{\theta}_i} \leq \sum_{i=1}^r y_i \left( \frac{\theta_i}{\hat{\theta}_i} - 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \left( y_i \frac{\theta_i}{y_i/n} - y_i \right) = \sum_{i=1}^r (n\theta_i - y_i) = n - n = 0. \end{aligned}$$

Ulighedstegnet er skarpt medmindre  $\theta_i = \hat{\theta}_i$  for alle  $i = 1, 2, \dots, r$ .

▷ [Fortsættes side 120.]

*Eksempel 7.3: Torsk i Østersøen*

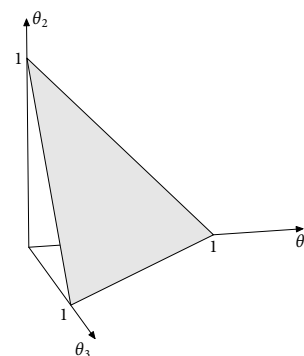
◁ [Fortsat fra eksempel 6.5 side 96.]

Hvis vi indskrænker os til at studere torske ved Lolland, er opgaven at bestemme det punkt  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  i det tredimensionale sandsynlighedssimplex som maksimaliserer log-likelihoodfunktionen

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = \text{konst} + 27 \ln \theta_1 + 30 \ln \theta_2 + 12 \ln \theta_3.$$

Ifølge det foregående er  $\hat{\theta}_1 = 27/69 = 0.39$ ,  $\hat{\theta}_2 = 30/69 = 0.43$  og  $\hat{\theta}_3 = 12/69 = 0.17$ .

▷ [Eksemplet fortsættes i eksempel 8.3 side 120.]



Sandsynlighedssimplexet i det tredimensionale rum, dvs. mængden af ikke-negative tripler  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  med  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$ .

## Enstikprøveproblemet i poissonfordelingen

◁ [Fortsat fra side 96.]

Log-likelihoodfunktionen og dens to første afledede er for  $\mu > 0$

$$\begin{aligned} \ln L(\mu) &= \text{konst} + y \cdot \ln \mu - n\mu, \\ D \ln L(\mu) &= \frac{y \cdot}{\mu} - n, \\ D^2 \ln L(\mu) &= -\frac{y \cdot}{\mu^2} \end{aligned}$$

Hvis  $y. > 0$ , har ligningen  $D \ln L(\mu) = 0$  den entydige løsning  $\hat{\mu} = y./n$ , og da  $D^2 \ln L$  er negativ, er dette det entydige maksimumspunkt. Man ser desuden at formelen  $\hat{\mu} = y./n$  også giver maksimumspunktet i den situation hvor  $y. = 0$ .

I poissonfordelingen er variansen lig med middelværdien, så ifølge de sædvanlige regneregler er middelværdi og varians af estimatoren  $\hat{\mu} = Y./n$

$$E_{\mu} \hat{\mu} = \mu, \quad \text{Var}_{\mu} \hat{\mu} = \mu/n. \quad (7.2)$$

Den generelle teori (jf. side 104) oplyser at for store  $n$  er  $E_{\mu} \hat{\mu} \approx \mu$  og  $\text{Var}_{\mu} \hat{\mu} \approx \left( E_{\mu} \left( -D^2 \ln L(\mu, Y) \right) \right)^{-1} = \left( E_{\mu} \left( \frac{Y}{\mu^2} \right) \right)^{-1} = \mu/n$ .

*Eksempel 7.4: Hestespark*

◁ [Fortsat fra eksempel 6.6 side 96.]

I hestesparkeeksemplet er  $y. = 0 \cdot 109 + 1 \cdot 65 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 122$ , så  $\hat{\mu} = 122/200 = 0.61$ .

Antallet af soldater i et givet regiment der i et givet år dør som følge af at være sparket af en hest, er altså (ifølge modellen) poissonfordelt med en parameter der estimeres til 0.61. Den estimerede standardafvigelse på estimatet er  $\sqrt{\hat{\mu}/n} = 0.06$ , jf. formel (7.2).

### Ligefordeling på et interval

◁ [Fortsat fra side 97.]

Likelihoodfunktionen er

$$L(\theta) = \begin{cases} 1/\theta^n & \text{når } x_{\max} < \theta \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Denne funktion antager ikke sit maksimum, men det er dog fristende at udnævne  $\hat{\theta} = x_{\max}$  til maksimaliseringsestimatet. – Tingene ville se pænere ud hvis vi gik over til at betragte ligefordelingen på det afsluttede interval fra 0 til  $\theta$ .

Likelihoodfunktionen er ikke differentiabel i hele sit definitionsområde (som er  $]0; +\infty[$ ); de regularitetsbetingelser der sikrer at maksimaliseringsestimatorens er asymptotisk normalfordelt (side 104), er derfor ikke opfyldt, og  $\hat{\theta} = X_{\max}$  er faktisk heller ikke asymptotisk normalfordelt (se opgave 7.4).

### Enstikprøveproblemet i normalfordelingen

◁ [Fortsat fra side 98.]

Ved at løse ligningen  $D \ln L = 0$  hvor  $\ln L$  er log-likelihoodfunktionen (6.3) på side 98, finder man maksimaliseringsestimaterne for  $\mu$  og  $\sigma^2$  til

$$\hat{\mu} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2.$$

Man plejer dog at benytte et andet estimat for variansparameteren  $\sigma^2$ , nemlig

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2,$$

hvilket kan begrundes med at  $s^2$  er en *central* estimator; det fremgår af nedenstående sætning der er et specialtilfælde af sætning 11.1 side 157, jf. også afsnit 11.2.

#### SÆTNING 7.1

Antag at  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er indbyrdes uafhængige identisk normalfordelte stokastiske variable med middelværdi  $\mu$  og varians  $\sigma^2$ . Så gælder

1. Den stokastiske variabel  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$  er normalfordelt med middelværdi  $\mu$  og varians  $\sigma^2/n$ .
2. Den stokastiske variabel  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$  er gammafordelt med formparameter  $f/2$  og skalaparameter  $2\sigma^2/f$  hvor  $f = n-1$ , eller sagt på en anden måde:  $(f/\sigma^2) s^2$  er  $\chi^2$ -fordelt med  $f$  frihedsgrader. Heraf følger blandt andet at  $E s^2 = \sigma^2$ .
3. De to stokastiske variable  $\bar{X}$  og  $s^2$  er stokastisk uafhængige.

Bemærkninger: Antallet af frihedsgrader for variansskønnet i en normalfordelingsmodel er typisk antal observationer minus antal estimerede frie middelværdiparametre; antallet af frihedsgrader fortæller noget om præcisionen af variansskønnet, jf. opgave 7.3.

▷ [Fortsættes side 120.]

Eksempel 7.5: *Lysets hastighed*

◁ [Fortsat fra eksempel 6.7 side 98.]

Hvis vi går ud fra at de 64 positive værdier i tabel 6.5 side 99 kan betragtes som observationer fra en og samme normalfordeling, så skal denne normalfordelings middelværdi estimeres til  $\bar{y} = 27.75$  og dens varians til  $s^2 = 25.8$  med 63 frihedsgrader. Det betyder at passagetidens middelværdi estimeres til  $(27.75 \times 10^{-3} + 24.8) \times 10^{-6} \text{ sek} = 24.828 \times 10^{-6} \text{ sek}$ , og passagetidens varians estimeres til  $25.8 \times (10^{-3} \times 10^{-6} \text{ sek})^2 = 25.8 \times 10^{-6} (10^{-6} \text{ sek})^2$  med 63 frihedsgrader, dvs. standardafvigelsen estimeres til  $\sqrt{25.8 \times 10^{-6} 10^{-6} \text{ sek}} = 0.005 \times 10^{-6} \text{ sek}$ .

▷ [Eksemplet fortsætter som eksempel 8.4 side 122.]

### Tostikprøveproblemet i normalfordelingen

◁ [Fortsat fra side 100.]

Denne models log-likelihoodfunktion (6.4) side 100 antager sit maksimum i punktet  $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \hat{\sigma}^2)$ , hvor  $\bar{y}_1$  og  $\bar{y}_2$  er gennemsnittene i de to grupper, og  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$  (hvor  $n = n_1 + n_2$ ). Ofte anvender man ikke  $\hat{\sigma}^2$  som estimat over  $\sigma^2$ , men derimod

$$s_0^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2.$$

Nævneren  $n-2$ , antallet af frihedsgrader, bevirker at estimatoren bliver central; det fremgår af nedenstående sætning der er et specialtilfælde af sætning 11.1 side 157, jf. også afsnit 11.3.



Tabel 7.1 C-vitamin-eksempel, beregnede størrelser.  
 $n$  står for antal observationer  $y$ ,  
 $S$  for Sum af  $y$ -er,  $\bar{y}$  for gennemsnit af  $y$ -er,  $f$  for antal frihedsgrader,  $SS$  for Sum af kvadratiske afvigelser ('Sum of Squared deviations'), og  $s^2$  for variansestimater ( $s^2 = SS/f$ ).

|                 | $n$ | $S$   | $\bar{y}$ | $f$ | $SS$    | $s^2$ |
|-----------------|-----|-------|-----------|-----|---------|-------|
| appelsinsaft    | 10  | 131.8 | 13.18     | 9   | 177.236 | 19.69 |
| kunstigt C-vit. | 10  | 80.0  | 8.00      | 9   | 68.960  | 7.66  |
| sum             | 20  | 211.8 |           | 18  | 246.196 |       |
| gennemsnit      |     |       | 10.59     |     |         | 13.68 |

### SÆTNING 7.2

Antag at de stokastiske variable  $X_{ij}$  er indbyrdes uafhængige normalfordelte med samme varians  $\sigma^2$  og med  $E X_{ij} = \mu_i$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_i$ ,  $i = 1, 2$ . Så gælder

1. De stokastiske variable  $\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ ,  $i = 1, 2$ , er normalfordelte med middelværdi  $\mu_i$  og varians  $\sigma^2/n_i$ .
2. Den stokastiske variabel  $s_0^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$  er gammafordelt med formparameter  $f/2$  og skalaparameter  $2\sigma^2/f$  hvor  $f = n - 2$  og  $n = n_1 + n_2$ , eller sagt på en anden måde:  $(f/\sigma^2) s_0^2$  er  $\chi^2$ -fordelt med  $f$  frihedsgrader. Heraf følger blandt andet at  $E s_0^2 = \sigma^2$ .
3. De tre stokastiske variable  $\bar{X}_1$ ,  $\bar{X}_2$  og  $s_0^2$  er stokastisk uafhængige.

Supplerende bemærkninger:

- Generelt er antallet af frihedsgrader for et variansskøn antal observationer minus antal estimerede middelværdiparametre.
- En størrelse som  $y_{ij} - \bar{y}_i$  der er forskellen mellem den faktiske observation og det bedst mulige »fit« under den aktuelle model, kaldes undertiden for et *residual*. Som følge deraf kaldes en størrelse som  $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$  for en *residualkvadratsum*.

▷ [Fortsættes side 122.]

### Eksempel 7.6: C-vitamin

◁ [Fortsat fra eksempel 6.8 side 100.]

Vi udregner forskellige hjælpestørrelser samt estimererne over parametrene, se tabel 7.1. Middelværdien i appelsinsaft-gruppen estimeres til 13.18 og i den gruppe der har fået det kunstige C-vitamin, til 8.00. Den fælles varians estimeres til 13.68 med 18 frihedsgrader, og da hver af grupperne har 10 observationer, er den estimerede standardafvigelse på hver af de to middelværdiestimatorer  $\sqrt{13.68/10} = 1.17$ .

▷ [Eksemplet fortsætter som eksempel 8.5 side 124.]

## Simpel lineær regression

◁ [Fortsat fra side 100.]

Vi skal bestemme estimerer for parametrene  $\alpha$ ,  $\beta$  og  $\sigma^2$  i den lineære regressions-

model. Log-likelihoodfunktionen er opskrevet i formel (6.5) på side 101. Vi kan spalte kvadratsummen på følgende måde:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (y_i - (\alpha + \beta x_i))^2 &= \sum_{i=1}^n ((y_i - \bar{y}) + (\bar{y} - \alpha - \beta \bar{x}) - \beta(x_i - \bar{x}))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + \beta^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &\quad - 2\beta \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + n(\bar{y} - \alpha - \beta \bar{x})^2,\end{aligned}$$

idet de øvrige to dobbelte produkter fra kvadreringen af den treleddede størrelse summerer til 0. Ved omskrivningen har vi opnået at  $\alpha$  kun optræder i det sidste led, og dette antager sin mindsteværdi 0 netop når  $\alpha = \bar{y} - \beta \bar{x}$ . De resterende led udgør en andengradsfunktion af  $\beta$ , og denne funktion antager sit minimum når differentialkvotienten er 0, dvs. når  $\beta = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$ . Konklusionen bliver således at maksimaliseringsestimaterne er

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{og} \quad \widehat{\alpha} = \bar{y} - \widehat{\beta} \bar{x}.$$

(Det er her forudsat at  $\sum (x_i - \bar{x})^2$  ikke er 0, dvs. at ikke alle  $x$ -erne er ens. – Hvis alle  $x$ -erne er ens, har det næppe nogen mening at prøve at estimere en funktion der skal vise hvordan  $y$  afhænger af  $x$ .) – Den *estimerede regressionslinje* er (den linje hvis ligning er)  $y = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}x$ .

Den værdi af  $\sigma^2$  der maksimaliserer log-likelihoodfunktionen, er

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}x_i))^2.$$

Som oftest angiver man dog i stedet det *centrale* variansestimat

$$s_{02}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}x_i))^2.$$

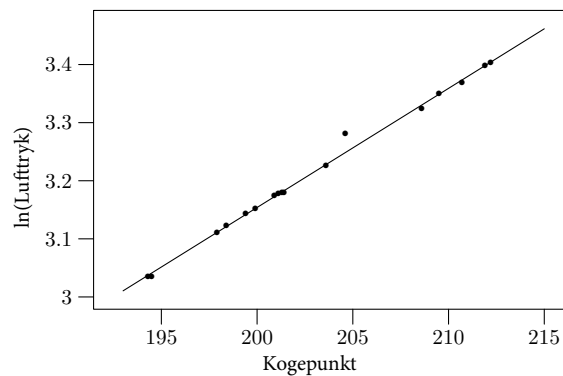
der har  $n-2$  frihedsgrader. Med betegnelsen  $SS_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  gælder følgende (jf. sætning 11.1 side 157 samt afsnit 11.6):

#### SÆTNING 7.3

Om estimatorerne  $\widehat{\alpha}$ ,  $\widehat{\beta}$  og  $s_{02}^2$  i den lineære regressionsmodel gælder:

1.  $\widehat{\beta}$  er normalfordelt med middelværdi  $\beta$  og varians  $\sigma^2/SS_x$ .
2. a)  $\widehat{\alpha}$  er normalfordelt med middelværdi  $\alpha$  og varians  $\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{SS_x}\right)$ .  
 b)  $\widehat{\alpha}$  og  $\widehat{\beta}$  er korrelerede med korrelation  $-1/\sqrt{1 + \frac{SS_x}{n\bar{x}^2}}$ .

Figur 7.1 Forbes' målinger:  
Datapunkter plus estimeret  
regressionslinje.



3. a)  $\hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{x}$  er normalfordelt med middelværdi  $\alpha + \beta\bar{x}$  og varians  $\sigma^2/n$ .  
b)  $\hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{x}$  og  $\hat{\beta}$  er ukorrelerede.
4. Variansestimatoren  $s_{02}^2$  er stokastisk uafhængig af middelværdiestimatorerne, og den er gammafordelt med formparameter  $f/2$  og skalaparameter  $2\sigma^2/f$  hvor  $f = n - 2$ , eller sagt på en anden måde:  $(f/\sigma^2) s_{02}^2$  er  $\chi^2$ -fordelt med  $f$  frihedsgrader.  
Heraf følger blandt andet at  $E s_{02}^2 = \sigma^2$ .

Eksempel 7.7: Forbes' barometriske målinger

◁ [Fortsat fra eksempel 6.9 side 101.]

Som man ser af figur 6.1, er der et enkelt punkt der ser ud til at afvige temmelig meget fra det almindelige mønster, så vi vælger at se bort fra dette punkt og altså kun regne med de 16 resterende punkter.

Man finder den estimerede regressionslinje til

$$\ln(\text{lufttryk}) = 0.0205 \cdot \text{kogepunkt} - 0.95$$

og den estimerede varians er  $s_{02}^2 = 6.84 \times 10^{-6}$  med 14 frihedsgrader. Figur 7.1 viser de observerede punkter og den estimerede linje. Umiddelbart ser det ud til at linjen beskriver punkterne udmærket.

Hvis man skal have nogen praktisk fornøjelse af sådanne kogepunktsbestemmelser, skal man også kende sammenhængen mellem højde og lufttryk. Så længe vi holder os til bjerg højder, aftager lufttrykket eksponentielt med højden, og der gælder at hvis lufttrykket ved havets overflade er  $p_0$  (f.eks. 1013.25 hPa) og lufttrykket i højden  $h$  er  $p_h$ , så er  $h \approx 8150 \text{ m} \cdot (\ln p_0 - \ln p_h)$ .

### 7.3 Opgaver

Opgave 7.1

I eksempel 4.6 side 75 argumenteres der for at antal mider på et æbleblad er negativt binomialfordelt. Opskriv modelfunktion og likelihoodfunktion, og udregn på baggrund af de foreliggende observationer estimator over parametrene i fordelingen.

*Opgave 7.2*

Find middelværdien af maksimaliseringsestimatoren  $\hat{\sigma}^2$  for variansen, når vi har at gøre med et enstikprøveproblem i normalfordelingen.

*Opgave 7.3*

Find variansen på variansestimatoren  $s^2$  i enstikprøveproblemet i normalfordelingen.

*Opgave 7.4*

På side 108 fandt vi at i den kontinuerte ligefordeling på  $]0; \theta[$  er maksimaliseringsestimatoren  $\hat{\theta} = X_{\max}$  (hvor  $X_{\max} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ).

1. Vis at tæthedsfunktionen for  $X_{\max}$  er

$$f(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} & \text{når } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Tip: find først  $P(X_{\max} \leq x)$ .

2. Find middelværdi og varians af  $\hat{\theta} = X_{\max}$  og vis at for store  $n$  er  $E\hat{\theta} \approx \theta$  og  $\text{Var}\hat{\theta} \approx \theta^2/n^2$ .

3. Vi kan nu finde den asymptotiske fordeling af  $\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\text{Var}\hat{\theta}}}$ . For store  $n$  er ifølge forrige

$$\text{punkt } \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\text{Var}\hat{\theta}}} \approx -Y \text{ hvor } Y = \frac{\theta - X_{\max}}{\theta/n} = n\left(1 - \frac{X_{\max}}{\theta}\right).$$

Vis at  $P(Y > y) = \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n$ , og konkluder herudfra at  $Y$  er asymptotisk eksponentialfordelt med skalaparameter 1.



## 8 Hypoteseprøvning

ANTAG AT MAN OPERERER MED en statistisk model som har en modelfunktion  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  hvor  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  og  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ . En *statistisk hypotese* er en påstand om at den sande parameterværdi  $\boldsymbol{\theta}$  faktisk er beliggende i delmængden  $\Theta_0$  af  $\Theta$ , formelt

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$$

hvor  $\Theta_0 \subset \Theta$ . Den statistiske hypotese postulerer altså at man kan klare sig med en simplere model.

Når man *tester* hypotesen, undersøger man hvordan hypotesen og de faktisk foreliggende observationer stemmer overens. Det foregår ved at man finder på eller vælger en endimensional stikprøvefunktion  $t$  kaldet en *teststørrelse*, som er indrettet på en måde så den »måler« afvigelsen mellem observationer og hypotese. Herefter udregner man den såkaldte *testsandsynlighed*, dvs. sandsynligheden (forudsat at hypotesen er rigtig) for at få en værdi af  $X$  der stemmer dårligere overens (målt ved hjælp af  $t$ ) med hypotesen end den foreliggende observation  $\mathbf{x}$  gør; hvis overensstemmelsen er meget dårlig, så *forkaster* man hypotesen. – Hele proceduren benævnes et *test*.

### 8.1 Kvotienttestet

Ligesom likelihoodfunktionen kunne danne udgangspunkt for konstruktion af en estimator for  $\boldsymbol{\theta}$ , kan den bruges i forbindelse med hypoteseprøvning. Man kan nemlig benytte følgende generelle metode til at konstruere et test:

1. Find maksimaliseringsestimatoren  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$  i grundmodellen og maksimaliseringsestimatoren  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$  under hypotesen, dvs.  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$  er et punkt hvor  $\ln L$  er maksimal i  $\Theta$ , og  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$  er et punkt hvor  $\ln L$  er maksimal i  $\Theta_0$ .
2. For at teste hypotesen sammenligner vi likelihoodfunktionens maksimale værdi under hypotesen med dens maksimale værdi i grundmodellen, dvs. vi sammenligner den bedste beskrivelse vi kan få af  $\mathbf{x}$  under hypotesen, med den bedste beskrivelse vi kan få i grundmodellen. Det gøres med kvotientteststørrelsen

$$Q = \frac{L(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{L(\widehat{\boldsymbol{\theta}})} = \frac{L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}.$$

Der gælder pr. definition at  $0 \leq Q \leq 1$ , og jo længere  $Q$  er fra 1, desto dårligere stemmer observationen  $\mathbf{x}$  overens med hypotesen. Ofte bruger man

## TEST

Ordet test kommer fra latin *testa* som er en lille lerkrukke af den slags som alkymisterne og sidenhen kemikerne brugte i deres undersøgelser (vel svarende til vore dages reagensglas).

På dansk er ordet test normalt fælleskøn, det hedder f.eks. *en* graviditetstest, men i statistiksammenhæng er det intetkøn, så rigtige statistikere siger *et* *F*-test, *et* *t*-test, osv.

ikke  $Q$  som teststørrelse, men derimod  $-2 \ln Q$ . Denne størrelse er altid ikke-negativ, og jo større værdi, desto dårligere stemmer observationen  $x$  overens med hypotesen.

- Testsandsynligheden  $\varepsilon$  er sandsynligheden (udregnet under forudsætning af at hypotesen er rigtig) for at få en værdi af  $X$  der passer dårligere sammen med hypotesen end den faktisk foreliggende værdi  $x$  gør, i matematik-sprog:

$$\varepsilon = P_0(Q(X) \leq Q(x)) = P_0(-2 \ln Q(X) \geq -2 \ln Q(x))$$

eller lidt kortere

$$\varepsilon = P_0(Q \leq Q_{\text{obs}}) = P_0(-2 \ln Q \geq -2 \ln Q_{\text{obs}}).$$

(Fodtegnet 0 på  $P$  skal markere at der er tale om sandsynligheden udregnet under forudsætning af at hypotesen er rigtig.)

- Hvis testsandsynligheden er lille, så forkastes hypotesen.

I praksis bruger man tit en strategi gående ud på at forkaste hypotesen hvis og kun hvis testsandsynligheden er mindre end et på forhånd fastlagt *signifikansniveau*  $\alpha$ . Typiske værdier for signifikansniveauet er 5%, 2.5% og 1%. På den måde vil man med sandsynlighed  $\alpha$  komme til at forkaste hypotesen i det tilfælde hvor den er rigtig. (Forhåbentlig vil der være en langt større sandsynlighed for at forkaste hypotesen hvis den ikke er rigtig.)

- For at kunne udregne testsandsynligheden skal man kende fordelingen af teststørrelsen når hypotesen er rigtig.

I nogle situationer, f.eks. i normalfordelingsmodeller (se side 120ff og kapitel 11), kan testsandsynligheden udregnes eksakt ved hjælp af kendte og tabellerede standardfordelinger ( $t$ -,  $\chi^2$ - og  $F$ -fordelinger).

I andre situationer kan man trække på generelle resultater der siger at under visse omstændigheder (nemlig dem der sikrer at  $\hat{\theta}$  og  $\hat{\hat{\theta}}$  er asymptotisk normalfordelte, jf. side 104) er  $-2 \ln Q$  asymptotisk  $\chi^2$ -fordelt med et antal frihedsgrader som er  $\dim \Theta - \dim \Theta_0$  (i en passende betydning af dimension, som også omfatter at  $\Theta$  kan være f.eks. en differentiabel flade). Til almindelig daglig brug kan man sige at antal frihedsgrader er lig »det faktiske antal parametre i grundmodellen minus det faktiske antal parametre under hypotesen«. – I de tilfælde hvor  $-2 \ln Q$  er asymptotisk  $\chi^2$ -fordelt, finder man testsandsynligheden ved opslag i en tabel over  $\chi^2$ -fordelingen (en lille  $\chi^2$ -tabel ses på side 190).

## 8.2 Eksempler

### Enstikprøveproblemet for 01-variable

◁ [Fortsat fra side 105.]

Antag at det af den faglige problemstilling fremgår at parameteren  $\theta$  egentlig burde have værdien  $\theta_0$ , og at det derfor er interessant at teste den statistiske hypotese

$H_0 : \theta = \theta_0$ . (Hvis man vil opskrive hypotesen lidt mere i overensstemmelse med den generelle formulering, må det blive som  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  hvor  $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ .)

Idet  $\hat{\theta} = x./n$ , bliver kvotientteststørrelsen

$$Q = \frac{L(\theta_0)}{L(\hat{\theta})} = \frac{\theta_0^{x.} (1 - \theta_0)^{n-x.}}{\hat{\theta}^{x.} (1 - \hat{\theta})^{n-x.}} = \left( \frac{n\theta_0}{x.} \right)^{x.} \left( \frac{n - n\theta_0}{n - x.} \right)^{n-x.}$$

og

$$-2 \ln Q = 2 \left( x. \ln \frac{x.}{n\theta_0} + (n - x.) \ln \frac{n - x.}{n - n\theta_0} \right).$$

Testsandsynligheden kan derfor udregnes eksakt som

$$\varepsilon = P_{\theta_0}(-2 \ln Q \geq -2 \ln Q_{\text{obs}}),$$

og den kan bestemmes approksimativt som sandsynligheden for i  $\chi^2$ -fordelingen med  $1 - 0 = 1$  frihedsgrad at få værdier større end  $-2 \ln Q_{\text{obs}}$ ; approksimationen kan benyttes når de »forventede« antal  $n\theta_0$  og  $n - n\theta_0$  er mindst 5.

### Den simple binomialfordelingsmodel

◁ [Fortsat fra side 105.]

Antag at man i den simple binomialfordelingsmodel ønsker at teste en statistisk hypotese  $H_0 : \theta = \theta_0$ . Da likelihoodfunktionen i den simple binomialfordelingsmodel på nær en konstant faktor er lig likelihoodfunktionen i enstikprøveproblemet for 01-variable, se ovenfor, bliver  $Q$  og  $-2 \ln Q$  de samme i de to modeller, altså specielt

$$-2 \ln Q = 2 \left( y \ln \frac{y}{n\theta_0} + (n - y) \ln \frac{n - y}{n - n\theta_0} \right).$$

Testsandsynlighederne udregnes ligeledes på præcis samme måde i de to modeller.

#### Eksempel 8.1: Rismelsbiller I

◁ [Fortsat fra eksempel 7.1 side 106.]

Antag at det i rismelsbilleeksemplet er sådan [men det er ikke sådan; denne del af eksemplet er opdigtet til lejligheden] at man har en referencegift hvorom man véd at når man doserer den på samme måde som den afprøvede gift, så dør 23% af billerne. Spørgsmålet er om den afprøvede gift virker på samme måde som referencegiften. I forhold til den statistiske model svarer dette spørgsmål til den statistiske hypotese  $H_0 : \theta = 0.23$ .

Når  $n = 144$  og  $\theta_0 = 0.23$ , bliver  $n\theta_0 = 33.12$  og  $n - n\theta_0 = 110.88$ , så  $-2 \ln Q$  som funktion af  $y$  er  $-2 \ln Q(y) = 2 \left( y \ln \frac{y}{33.12} + (144 - y) \ln \frac{144 - y}{110.88} \right)$  og dermed  $-2 \ln Q_{\text{obs}} = -2 \ln Q(43) = 3.60$ . Den eksakte testsandsynlighed er

$$\varepsilon = P_0(-2 \ln Q(Y) \geq 3.60) = \sum_{y: -2 \ln Q(y) \geq 3.60} \binom{144}{y} 0.23^y 0.77^{144-y}.$$

Ved almindelig udregning finder man at uligheden  $-2 \ln Q(y) \geq 3.60$  er opfyldt for  $y = 0, 1, 2, \dots, 23$  og for  $y = 43, 44, 45, \dots, 144$ . Endvidere finder man at  $P_0(Y \leq 23) = 0.0249$ , og at  $P_0(Y \geq 43) = 0.0344$ , så  $\varepsilon = 0.0249 + 0.0344 = 0.0593$ .



Hvis man vil slippe for en del af regneriet, kan man benytte  $\chi^2$ -approximationen til fordelingen af  $-2 \ln Q$  for at finde testsandsynligheden; man skal bruge  $\chi^2$ -fordelingen med  $1 - 0 = 1$  frihedsgrad: grundmodellen har 1 ukendt parameter, og under hypotesen er der 0 ukendte parametre. I en tabel over fraktiler i  $\chi^2$ -fordelingen med 1 frihedsgrad (se f.eks. side 190) finder man at 90%-fraktilen er 2.71 og 95%-fraktilen 3.84, så der er et sted mellem 5% og 10% sandsynlighed for at få værdier større end 3.60; computeren siger at i  $\chi^2$ -fordelingen med 1 frihedsgrad er der en sandsynlighed på 5.78% for at få værdier større end 3.60, altså ganske tæt på den eksakte værdi 5.93%.

Da testsandsynligheden er over 5%, vil man – hvis man bruger den sædvanlige tommelfingerregel med et 5% signifikansniveau – ikke kunne afvise hypotesen; de foreliggende observationer er således ikke i modstrid med hypotesen om at giften virker på samme måde som referencegiften.

### Enstikprøveproblemet i binomialfordelingen

◁ [Fortsat fra side 106.]

Antag at man ønsker at undersøge om det kan antages at  $s$  forskellige binomialfordelinger har samme sandsynlighedsparameter. Dette formuleres som den statistiske hypotese  $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_s$ , eller lidt mere præcist som  $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$  hvor  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$  og hvor parameterrummet  $\Theta_0$  er givet som

$$\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} \in [0; 1]^s : \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_s\}.$$

For at teste  $H_0$  skal vi først finde maksimaliseringsestimatorene under  $H_0$ , dvs. vi skal finde maksimumspunktet for restriktionen af  $\ln L$  til  $\Theta_0$ . Log-likelihood-funktionen er givet ved formel (7.1) på side 106, og når alle  $\theta$ -erne er ens, er

$$\begin{aligned} \ln L(\theta, \theta, \dots, \theta) &= \text{konst} + \sum_{j=1}^s (y_j \ln \theta + (n_j - y_j) \ln(1 - \theta)) \\ &= \text{konst} + y. \ln \theta + (n. - y.) \ln(1 - \theta) \end{aligned}$$

der antager sit maksimum i punktet  $\hat{\theta} = y./n.$ ; her er  $y. = y_1 + y_2 + \dots + y_s$  og  $n. = n_1 + n_2 + \dots + n_s$ . Derfor bliver teststørrelsen

$$\begin{aligned} -2 \ln Q &= -2 \ln \frac{L(\hat{\theta}, \hat{\theta}, \dots, \hat{\theta})}{L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_s)} \\ &= 2 \sum_{j=1}^s \left( y_j \ln \frac{\hat{\theta}_j}{\hat{\theta}} + (n_j - y_j) \ln \frac{1 - \hat{\theta}_j}{1 - \hat{\theta}} \right) \\ &= 2 \sum_{j=1}^s \left( y_j \ln \frac{y_j}{\hat{y}_j} + (n_j - y_j) \ln \frac{n_j - y_j}{n_j - \hat{y}_j} \right) \end{aligned} \quad (8.1)$$

hvor  $\hat{y}_j = n_j \hat{\theta}$  er det »forventede antal« gunstige i gruppe  $j$  under  $H_0$ , altså når grupperne har samme sandsynlighedsparameter. Det sidste udtryk for  $-2 \ln Q$  viser hvordan teststørrelsen sammenligner de observerede antal gunstige hhv. ugunstige udfald (antallene  $y_1, y_2, \dots, y_s$  og  $n_1 - y_1, n_2 - y_2, \dots, n_s - y_s$ ) med

|                 | koncentration |      |      |      |
|-----------------|---------------|------|------|------|
|                 | 0.20          | 0.32 | 0.50 | 0.80 |
| antal døde      | 85.4          | 40.9 | 32.0 | 29.7 |
| antal ikke døde | 58.6          | 28.1 | 22.0 | 20.3 |
| i alt           | 144           | 69   | 54   | 50   |

Tabel 8.1 Rismelsbillers overlevelse ved forskellige gift doser: forventede antal hvis giften virker på samme måde for alle fire koncentrationer.

de »forventede antal« gunstige hhv. ugunstige udfald (tallene  $\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \dots, \widehat{y}_s$  og  $n_1 - \widehat{y}_1, n_2 - \widehat{y}_2, \dots, n_s - \widehat{y}_s$ ). Testsandsynligheden er

$$\varepsilon = P_0(-2 \ln Q \geq -2 \ln Q_{\text{obs}})$$

hvor fodtegnet 0 på P angiver at sandsynligheden skal udregnes under antagelse af at hypotesen er rigtig.\* I givet fald er  $-2 \ln Q$  asymptotisk  $\chi^2$ -fordelt med  $s - 1$  frihedsgrader. Som tommelfingerregel kan man benytte  $\chi^2$ -approksimationen når alle de  $2s$  »forventede« antal er 5 eller derover.

#### Eksempel 8.2: Rismelsbiller II

◁ [Fortsat fra eksempel 7.2 side 106.]

Formålet med undersøgelsen er at finde ud af om giften virker forskelligt i forskellige koncentrationer. Det gøres på den måde at man ser efter om tallene tyder på at man kan tillade sig at antage at der *ikke* er forskel på virkningerne af de forskellige koncentrationer. Det svarer i modellens termer til at teste den statistiske hypotese

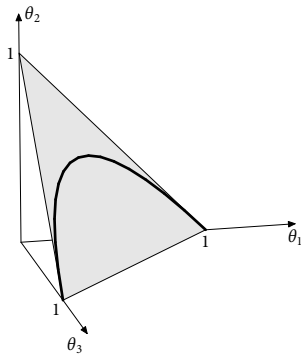
$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4.$$

For at gøre det skal vi først udregne estimatet over den af  $H_0$  postulerede fælles parameter-værdi; det er  $\widehat{\theta}_{\text{fælles}} = y./n. = 188/317 = 0.59$ . Derefter udregner vi de »forventede« antal  $\widehat{y}_j = n_j \widehat{\theta}$  og  $n_j - \widehat{y}_j$  og får tallene i tabel 8.1. Kvotientteststørrelsen  $-2 \ln Q$  (formel (8.1)) sammenligner nu disse tal med de observerede antal (tabel 6.2 side 95):

$$\begin{aligned} -2 \ln Q_{\text{obs}} &= 2 \left( 43 \ln \frac{43}{85.4} + 50 \ln \frac{50}{40.9} + 47 \ln \frac{47}{32.0} + 48 \ln \frac{48}{29.7} \right. \\ &\quad \left. 101 \ln \frac{101}{58.6} + 19 \ln \frac{19}{28.1} + 7 \ln \frac{7}{22.0} + 2 \ln \frac{2}{20.3} \right) \\ &= 113.1. \end{aligned}$$

Grundmodellen har fire ukendte parametre, og hvis  $H_0$  er rigtig, er der én ukendt parameter, så  $-2 \ln Q$ -værdien skal sammenlignes med  $\chi^2$ -fordelingen med  $4 - 1 = 3$  frihedsgrader. I denne fordeling er 99.9%-fraktilen lig 16.27 (se f.eks. tabellen side 190), så der er langt under 0.01% sandsynlighed for at få en værre  $-2 \ln Q$ -værdi hvis hypotesen er rigtig. På den baggrund må vi forkaste hypotesen og dermed konkludere at der er signifikant forskel på virkningen af de fire giftkoncentrationer.

\* Dette er ikke helt så uskyldigt som det måske kunne se ud til, for selv når hypotesen er rigtig, er der stadig en ukendt parameter inde i billedet, nemlig den fælles værdi af  $\theta$ -erne.



Det tonede område er sandsynlighedssimplexet, dvs. mængden af tripler  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  af ikke-negative tal der summerer til 1. Den indtegnede kurve er  $\Theta_0$ , dvs. de  $\theta$  der kan optræde hvis der er Hardy-Weinberg ligevægt.

## Multinomialfordelingen

◁ [Fortsat fra side 107.]

Det kan tænkes at den faglige problemstilling indebærer at sandsynlighedsparameteren  $\theta$  i virkeligheden kun kan variere i en vis delmængde  $\Theta_0$  af parameterrummet. Hvis  $\Theta_0$  er en differentiabel kurve eller flade, så er problemet »pænt« set fra den matematiske statistiks synspunkt.

Eksempel 8.3: Torsk i Østersøen

◁ [Fortsat fra eksempel 7.3 side 107.]

Ved simple ræsonnementer – som dog er af mindre interesse i nærværende sammenhæng – kan man vise at hvis torskeene parrer sig med tilfældigt uden hensyntagen til genotype, og hvis populationen er lukket og i ligevægt, så vil de tre genotyper optræde med sandsynlighederne  $\theta_1 = \beta^2$ ,  $\theta_2 = 2\beta(1 - \beta)$  og  $\theta_3 = (1 - \beta)^2$ , hvor  $\beta$  er brøkdelen af A-gener i populationen ( $\beta$  er sandsynligheden for at et tilfældigt valgt gen er A.) – Denne situation omtales som Hardy-Weinberg ligevægt.

Man kan nu undersøge om de foreliggende observationer tyder på at de tre torskepopulationer hver især er i Hardy-Weinberg ligevægt; her indskrænker vi os til Lollandspopulationen. På baggrund af observationen  $y_L = (27, 30, 12)$  fra en trinomialfordeling med sandsynlighedsparameter  $\theta_L$  skal vi derfor teste den statistiske hypotese  $H_0 : \theta_L \in \Theta_0$  hvor  $\Theta_0$  er billedet ved afbildningen  $\beta \mapsto (\beta^2, 2\beta(1 - \beta), (1 - \beta)^2)$  af  $[0; 1]$  ind i sandsynlighedssimplexet, altså  $\Theta_0 = \{(\beta^2, 2\beta(1 - \beta), (1 - \beta)^2) : \beta \in [0; 1]\}$ .

Før vi kan teste hypotesen, skal vi estimere  $\beta$ . Under  $H_0$  er log-likelihoodfunktionen

$$\begin{aligned} \ln L_0(\beta) &= \ln L(\beta^2, 2\beta(1 - \beta), (1 - \beta)^2) \\ &= \text{konst} + 2 \cdot 27 \ln \beta + 30 \ln(1 - \beta) + 2 \cdot 12 \ln(1 - \beta) \\ &= \text{konst} + (2 \cdot 27 + 30) \ln \beta + (30 + 2 \cdot 12) \ln(1 - \beta) \end{aligned}$$

som har maksimum i  $\hat{\beta} = \frac{2 \cdot 27 + 30}{2 \cdot 69} = \frac{84}{138} = 0.609$  (dvs.  $\beta$  estimeres som det observerede antal A-gener divideret med det samlede antal gener). Teststørrelsen er

$$-2 \ln Q = -2 \ln \frac{L(\hat{\beta}^2, 2\hat{\beta}(1 - \hat{\beta}), (1 - \hat{\beta})^2)}{L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3)} = 2 \sum_{i=1}^3 y_i \ln \frac{y_i}{\hat{y}_i}$$

hvor  $\hat{y}_1 = 69 \cdot \hat{\beta}^2 = 25.6$ ,  $\hat{y}_2 = 69 \cdot 2\hat{\beta}(1 - \hat{\beta}) = 32.9$  og  $\hat{y}_3 = 69 \cdot (1 - \hat{\beta})^2 = 10.6$  er de »forventede« antal under  $H_0$ .

I grundmodellen er der 2 frie parametre (der er tre  $\theta$ -er, men de summerer til 1); under  $H_0$  er der 1 fri parameter, nemlig  $\beta$ ;  $-2 \ln Q$  får derfor  $2 - 1 = 1$  frihedsgrad.

Man finder at  $-2 \ln Q = 0.52$ , der med 1 frihedsgrad svarer til en testsandsynlighed på ca. 47%, så man kan sagtens antage at torskebestanden ved Lolland er i Hardy-Weinberg ligevægt.

## Enstikprøveproblemet i normalfordelingen

◁ [Fortsat fra side 109.]

Antag at man ønsker at teste en hypotese om at middelværdien i normalfordelingen har en bestemt værdi; i det formelle sprog bliver det til at man ønsker at teste hypotesen  $H_0 : \mu = \mu_0$ . Under  $H_0$  er der én ukendt parameter, nemlig  $\sigma^2$ . Maksimaliseringsestimatet for  $\sigma^2$  under  $H_0$  findes som maksimumspunktet for

log-likelihoodfunktionen (6.3) side 98, nu opfattet som en funktion af  $\sigma^2$  alene (idet  $\mu$  fikseres til  $\mu_0$ ), altså

$$\ln L(\mu_0, \sigma^2) = \text{konst} - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (y_j - \mu_0)^2$$

der antager sit maksimum når  $\sigma^2$  har værdien  $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - \mu_0)^2$ . Kvotienttest-

størrelsen er  $Q = \frac{L(\mu_0, \widehat{\sigma}^2)}{L(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2)}$ . Standardomskrivninger giver at

$$-2 \ln Q = 2(\ln L(\bar{y}, \widehat{\sigma}^2) - \ln L(\mu_0, \widehat{\sigma}^2)) = n \ln \left( 1 + \frac{t^2}{n-1} \right)$$

hvor

$$t = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}. \quad (8.2)$$

Hypotesen forkastes for store værdier af  $-2 \ln Q$ , d: for store værdier af  $|t|$ .

Standardafvigelsen på  $\bar{Y}$  er lig  $\sqrt{\sigma^2/n}$  (sætning 7.1 side 109), så  $t$ -teststørrelsen kan siges at måle forskellen mellem  $\bar{y}$  og  $\mu_0$  i forhold til den estimerede standardafvigelse på  $\bar{Y}$ . Kvotienttestet er altså ækvivalent med et test baseret på den »umiddelbart forståelige« teststørrelse  $t$ .

Testsandsynligheden kan udregnes som  $\varepsilon = P_0(|t| > |t_{\text{obs}}|)$ . Om fordelingen af  $t$  under  $H_0$  gælder

#### SÆTNING 8.1

Antag at  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er indbyrdes uafhængige identisk normalfordelte stokastiske variable med middelværdi  $\mu_0$  og varians  $\sigma^2$ , og sæt  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  og  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ . Så følger den stokastiske variabel  $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$  en  $t$ -fordeling med  $n-1$  frihedsgrader.

Supplerende bemærkninger:

- Det er en særlig – og væsentlig – pointe at fordelingen af  $t$  under  $H_0$  ikke afhænger af den ukendte parameter  $\sigma^2$  (og heller ikke af  $\mu_0$ ). Endvidere er  $t$  en dimensionsløs størrelse (– det bør teststørrelser altid være). Se også opgave 8.1.
- $t$ -fordelingen er symmetrisk omkring 0, og testsandsynligheden kan derfor udregnes som  $P(|t| > |t_{\text{obs}}|) = 2 P(t > |t_{\text{obs}}|)$ .

I visse situationer kan man argumentere for det fornuftige i kun at forkaste hypotesen hvis  $t$  er stor og positiv (svarende til at  $\bar{y}$  er større end  $\mu_0$ ); det kan for eksempel komme på tale hvis man på forhånd kan sige at hvis ikke  $\mu = \mu_0$ , så er  $\mu > \mu_0$ . I så fald skal testsandsynligheden udregnes som  $\varepsilon = P(t > t_{\text{obs}})$ .

$t$ -FORDELINGEN.

$t$ -fordelingen med  $f$  frihedsgrader er den kontinuerte fordeling som har tæthedsfunktion

$$\frac{1}{\sqrt{\pi f}} \frac{\Gamma(\frac{f+1}{2})}{\Gamma(\frac{f}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}},$$

hvor  $x \in \mathbb{R}$ .

WILLIAM SEALY GOSSET (1876-1937).

Brygger ved Guinness-bryggeriet i Dublin, med interesser (og evner) for den nye statistiske videnskab. Han udviklede  $t$ -testet i forbindelse med kvalitetskontrolproblemer i bryggeprocessen, og fandt fordelingen af  $t$ -teststørrelsen (1908). Han publicerede sine statistiske arbejder under pseudonymet *Student*, fordi bryggeriet ikke ønskede at reklamere alt for meget med at dets medarbejdere beskæftigede sig med så suspekte emner som statistik.

Tilsvarende, hvis man kun vil forkaste hypotesen når  $t$  er stor og negativ, skal testsandsynligheden udregnes som  $\varepsilon = P(t < t_{\text{obs}})$ .

Et  $t$ -test der forkaster hypotesen når  $|t|$  er stor, kaldes et *tosidet*  $t$ -test, og et test der forkaster hypotesen når  $t$  er stor og positiv [eller stor og negativ], kaldes et *ensidet* test.

- Fraktiler i  $t$ -fordelingen fås ud af computeren eller fra et statistisk tabelværk, se evt. side 196.

Da fordelingen er symmetrisk om 0, vil tabelværkerne ofte kun indeholde fraktiler for sandsynligheder større end 0.5

- $t$ -teststørrelsen kaldes undertiden for *Student's*  $t$  til ære for W.S. Gosset som i 1908 publicerede den første artikel om  $t$ -testet, og som skrev under pseudonymet *Student*.
- Se også afsnit 11.2 side 159.

#### Eksempel 8.4: Lysets hastighed

◁ [Fortsat fra eksempel 7.5 side 109.]

I vore dage er en meter pr. definition den strækning som lyset i vakuum gennemløber på  $1/299\,792\,458$  sekund, så lyset har den kendte hastighed  $299\,792\,458$  meter pr. sekund, og det vil derfor bruge  $\tau_0 = 2.48238 \times 10^{-5}$  sekunder på at tilbagelægge en strækning på 7442 meter. Størrelsen  $\tau_0$  svarer til en tabelværdi på  $((\tau_0 \times 10^6) - 24.8) \times 10^3 = 23.8$ , så det ville være interessant at undersøge om de foreliggende data er forenelige med hypotesen om at den ukendte middelværdi  $\mu$  har værdien  $\mu_0 = 23.8$ . Vi vil derfor teste den statistiske hypotese  $H_0 : \mu = 23.8$ .

Vi har tidligere fundet at  $\bar{y} = 27.75$  og  $s^2 = 25.8$ , så  $t$ -teststørrelsen er

$$t = \frac{27.75 - 23.8}{\sqrt{25.8/64}} = 6.2.$$

Testsandsynligheden er sandsynligheden for at få  $t$ -værdier som enten er større end 6.2 eller mindre end  $-6.2$ . Ved tabelopslag kan man finde at i  $t$ -fordelingen med 63 frihedsgrader er 99.95%-fraktilen lidt over 3.4, dvs. der er mindre end 0.05% sandsynlighed for at få en værdi som er større end 6.2, og testsandsynligheden er dermed mindre  $2 \times 0.05\% = 0.1\%$ . En så lille testsandsynlighed betyder at man må forkaste hypotesen. Newcombs målinger af lysets passagetid stemmer altså ikke overens med hvad vi i dag véd om lysets hastighed.

Vi ser at Newcombs passagetider er en smule for store, og da den lyshastighed vi her har benyttet, er lysets hastighed i vakuum, kan noget af forklaringen eventuelt være at lyset bevæger sig en smule langsommere i luft end i vakuum.

### Tostikprøveproblemet i normalfordelingen

◁ [Fortsat fra side 110.]

Antag at man ønsker at teste hypotesen  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  om at de to stikprøver stammer fra samme normalfordeling (variansen er pr. antagelse den samme). Parameterestimerne i grundmodellen blev fundet på side 109. Under  $H_0$  er der kun to ukendte parametre, nemlig den fælles middelværdi  $\mu$  og den fælles varians  $\sigma^2$ , og da  $H_0$  svarer til den situation der er studeret under overskriften enstikprøveproblemet i normalfordelingen, kan vi uden videre opskrive estimerne:

for middelværdien  $\mu$  er det totalgennemsnittet  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$ , og for

variansen  $\sigma^2$  er det  $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2$ . Kvotientteststørrelsen for  $H_0$  er

$Q = \frac{L(\bar{y}, \bar{y}, \widehat{\sigma}^2)}{L(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \widehat{\sigma}^2)}$ . Standardomskrivninger giver at

$$-2 \ln Q = 2(\ln L(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \widehat{\sigma}^2) - \ln L(\bar{y}, \bar{y}, \widehat{\sigma}^2)) = n \ln \left( 1 + \frac{t^2}{n-2} \right)$$

hvor

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{s_0^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}. \quad (8.3)$$

Hypotesen forkastes for store værdier af  $-2 \ln Q$ , dvs. for store værdier af  $|t|$ .

Ifølge regnereglerne for varianser er  $\text{Var}(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) = \sigma^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$ , så  $t$ -størrelsen måler forskellen mellem de to middelværdiestimater i forhold til den estimerede standardafvigelse på denne forskel. Kvotientteststørrelsen er således ækvivalent med et test hvor teststørrelsen er »umiddelbart forståelig«.

Testsandsynligheden kan udregnes som  $\varepsilon = P_0(|t| > |t_{\text{obs}}|)$ . Om fordelingen af  $t$  under  $H_0$  gælder

#### SÆTNING 8.2

Antag at de stokastiske variable  $X_{ij}$  er indbyrdes uafhængige normalfordelte med samme varians  $\sigma^2$  og med  $E X_{ij} = \mu_i$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_i$ ,  $i = 1, 2$ . Sæt

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad \text{og}$$

$$s_0^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

Så er den stokastiske variabel

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_0^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

$t$ -fordelt med  $n-2$  frihedsgrader ( $n = n_1 + n_2$ ).

Supplerende bemærkninger:

- Hvis hypotesen  $H_0$  om ens middelværdier godkendes, er der ikke tale om to forskellige stikprøver med hver sin middelværdi, men om én stikprøve med  $n_1 + n_2$  observationer. I konsekvens heraf skal middelværdi og varians estimeres som i et enstikprøveproblem, dvs. som  $\bar{y}$  og  $s_{01}^2$ , hvor

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \quad \text{og} \quad s_{01}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2.$$

- Fordelingen af  $t$  under  $H_0$  afhænger ikke af de to ukendte parametre  $\sigma^2$  og den fælles værdi af middelværdierne.

- $t$ -fordelingen er symmetrisk omkring 0, og testsandsynligheden kan derfor udregnes som  $P(|t| > |t_{\text{obs}}|) = 2 P(t > |t_{\text{obs}}|)$ .

I visse situationer kan man argumentere for det fornuftige i kun at forkaste hypotesen hvis  $t$  er stor og positiv (svarende til at  $\bar{y}_1$  er større end  $\bar{y}_2$ ); det kan for eksempel komme på tale hvis man på forhånd kan sige at hvis ikke  $\mu_1 = \mu_2$ , så er  $\mu_1 > \mu_2$ . I så fald skal testsandsynligheden udregnes som  $\varepsilon = P(t > t_{\text{obs}})$ .

Tilsvarende, hvis man kun vil forkaste hypotesen når  $t$  er stor og negativ, skal testsandsynligheden udregnes som  $\varepsilon = P(t < t_{\text{obs}})$ .

- Fraktiler i  $t$ -fordelingen fås ud af computeren eller fra et statistisk tabelværk, se evt. side 196.

Da fordelingen er symmetrisk om 0, vil tabelværkerne ofte kun indeholde fraktiler for sandsynligheder større end 0.5

- Se også afsnit 11.3 side 160.

#### Eksempel 8.5: C-vitamin

◁ [Fortsat fra eksempel 7.6 side 110.]

Da metoden til sammenligning af middelværdierne i de to grupper forudsætter at de to grupper har samme varians, kan man eventuelt også teste hypotesen om varianshomogenitet (se opgave 8.2). Testet er baseret på varianskvotienten

$$R = \frac{s_{\text{appelsinsaft}}^2}{s_{\text{kunstigt}}^2} = \frac{19.69}{7.66} = 2.57.$$

Denne værdi skal sammenholdes med  $F$ -fordelingen med  $(9, 9)$  frihedsgrader i et tosidet test. Tabelopslag (f.eks. side 192ff) viser at 95%-fraktilen er 3.18 og 90%-fraktilen 2.44; der er derfor mellem 10 og 20 procents chance for at få en værre  $R$ -værdi selvom hypotesen er rigtig, og på dette grundlag vil vi ikke afvise antagelsen om varianshomogenitet. Den fælles varians estimeres til  $s_0^2 = 13.68$  med 18 frihedsgrader.

Vi kan nu gå over til det egentlige, nemlig at teste om der er signifikant forskel på to gruppers niveauer. Til det formål udregnes  $t$ -teststørrelsen

$$t = \frac{13.18 - 8.00}{\sqrt{13.68(\frac{1}{10} + \frac{1}{10})}} = \frac{5.18}{1.65} = 3.13.$$

Den fundne værdi skal sammenholdes med  $t$ -fordelingen med 18 frihedsgrader. I denne fordeling er 99.5%-fraktilen 2.878, så der er mindre end 1% chance for at få en værdi numerisk større end 3.13. Konklusionen bliver derfor at der er en klart signifikant forskel mellem de to grupper. – Som det ses af tallene, består forskellen i at den »kunstige« gruppe har mindre odontoblastvækst end appelsingruppen. Kunstigt C-vitamin synes altså ikke at virke så godt som det naturlige.

## 8.3 Opgaver

### Opgave 8.1

Antag at  $x_1, x_2, \dots, x_n$  er en stikprøve fra normalfordelingen med middelværdi  $\xi$  og varians  $\sigma^2$ , og at man ønsker at teste hypotesen  $H_{0x} : \xi = \xi_0$ . Det gøres med et  $t$ -test. – Man kunne

imidlertid også gøre følgende: Tag to tal  $a$  og  $b \neq 0$  og sæt

$$\begin{aligned}\mu &= a + b\xi, \\ \mu_0 &= a + b\xi_0, \\ y_i &= a + bx_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

Hvis  $x$ -erne er en stikprøve fra normalfordelingen med parametre  $\xi$  og  $\sigma^2$ , så er  $y$ -erne en stikprøve fra normalfordelingen med parametre  $\mu$  og  $b^2\sigma^2$  (sætning 3.11 side 65), og hypotesen  $H_{0x} : \xi = \xi_0$  er ensbetydende med hypotesen  $H_{0y} : \mu = \mu_0$ . Vis at  $t$ -teststørrelsen for at teste  $H_{0x}$  er lig med  $t$ -teststørrelsen for at teste  $H_{0y}$  (det vil sige  $t$ -testet er invariant ved affine transformationer).

#### Opgave 8.2

I behandlingen af tostikprøveproblemet i normalfordelingen (side 99ff) antages uden videre at de to stikprøver har samme varians. Man kan imidlertid godt udføre et test for om de to grupper kan antages at have samme varians. For at gøre det udvider vi modellen til følgende:  $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n_1}$  er observationer fra normalfordelingen med parametre  $\mu_1$  og  $\sigma_1^2$ , og  $y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n_2}$  er observationer fra normalfordelingen med parametre  $\mu_2$  og  $\sigma_2^2$ . I denne model tester vi så hypotesen  $H : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ .

Gør det! Dvs. opskriv likelihoodfunktionen, find maksimaliseringsestimaterne, og opskriv kvotientteststørrelsen  $Q$ .

Vis at  $Q$  kan udtrykkes ved  $R = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ , hvor  $s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$  er det centrale variansskøn i gruppe  $i$ ,  $i = 1, 2$ .

Man kan udlede fordelingen af  $R$  når antagelsen om om varianshomogenitet er rigtig; den er en  $F$ -fordeling (se evt. side 158) med  $(n_1 - 1, n_2 - 1)$  frihedsgrader.





## 9 Nogle eksempler

### 9.1 Rismelsbiller

Dette eksempel viser blandt andet hvordan man kan udbygge en binomialfordelingsmodel sådan at sandsynlighedsparameteren tillades at afhænge af nogle baggrundsvariable; derved fås en såkaldt logistisk regressionsmodel.

I en undersøgelse (jf. Pack and Morgan (1990)) af insekters reaktion på insektgiften pyrethrum har man udsat nogle rismelsbiller, *Tribolium castaneum*, for forskellige mængder gift og derpå set hvor mange der var døde efter 13 dages forløb. Forsøget udførtes med fire forskellige giftkoncentrationer, dels på han-biller, dels på hun-biller. Resultaterne (i reduceret form) ses i tabel 9.1.

#### Grundmodellen

Der indgår  $144 + 69 + 54 + \dots + 47 = 641$  biller i forsøget. Hver bille har et bestemt køn (to muligheder) og bliver udsat for en bestemt giftosis (fire muligheder), og i løbet af forsøget er billen enten død eller har overlevet.

Første skridt i modelleringsprocessen består i at gøre sig klart hvilken status de forskellige størrelser skal have i modellen:

- Størrelserne dosis og køn er baggrundsvariable der er benyttet til at inddele billerne i  $2 \cdot 4 = 8$  grupper, idet man forestiller sig at dosis og køn kan have betydning for billens overlevelse; det kan endda tænkes at selve talværdierne af dosis har betydning.
- Totalantallene (144, 69, 54, 50, 152, 81, 44, 47) er kendte konstanter, nemlig antal biller i de enkelte grupper.
- Antal døde (43, 50, 47, 48, 26, 34, 27, 43) er observerede værdier af stokastiske variable.

For at få en idé om talmaterialets beskaffenhed kan man lave nogle simple udregninger og tegninger (f.eks. tabel 9.1 og figur 9.1).

For hver af de otte grupper er det nærliggende at foreslå at beskrive »antal døde« som en observation fra en binomialfordeling med en antalsparameter der er det samlede antal biller i den pågældende gruppe, og med en (ukendt) sandsynlighedsparameter der skal fortolkes som sandsynligheden for at en bille af det pågældende køn dør af giften doseret i den pågældende koncentration. Her er det ikke så interessant blot at få at vide om der er en signifikant forskel på grupperne eller ej, det ville være langt mere spændende hvis man kunne give en nærmere beskrivelse af hvordan sandsynligheden for at dø afhænger af

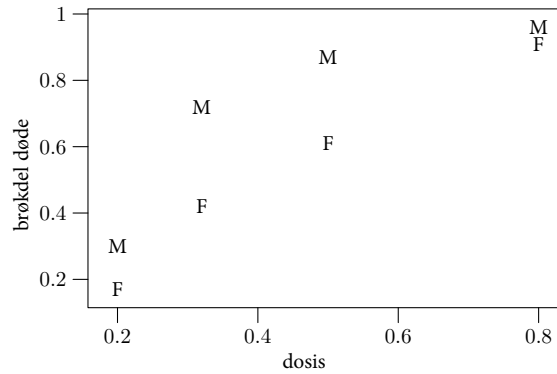
Tabel 9.1 Rismelsbiller:

For hvert køn og hver dosis er angivet antal døde/totalantal = obs. dødssandsynlighed. Dosis er anført i  $\text{mg}/\text{cm}^2$ .

| dosis | M             | F             |
|-------|---------------|---------------|
| 0.20  | 43/144 = 0.30 | 26/152 = 0.17 |
| 0.32  | 50/ 69 = 0.72 | 34/ 81 = 0.42 |
| 0.50  | 47/ 54 = 0.87 | 27/ 44 = 0.61 |
| 0.80  | 48/ 50 = 0.96 | 43/ 47 = 0.91 |

Figur 9.1 Rismelsbiller:

Observeret dødssandsynlighed (relativ hyppighed) som funktion af dosis, for hvert køn.



giftkoncentrationen, og hvis man kunne udtale sig om hvorvidt giften virker ens på hanner og hunner. Vi indfører noget notation og præciserer *grundmodellen*:

1. I den gruppe der svarer til dosis  $d$  og køn  $k$ , er der  $n_{dk}$  biller hvoraf  $y_{dk}$  døde; her er  $k \in \{M, F\}$  og  $d \in \{0.20, 0.32, 0.50, 0.80\}$ .
2. Det antages at  $y_{dk}$  er en observation af en stokastisk variabel  $Y_{dk}$  som er binomialfordelt med kendt antalsparameter  $n_{dk}$  og med sandsynlighedsparameter  $p_{dk}$ .
3. Det antages desuden at de enkelte  $Y_{dk}$ -er er stokastisk uafhængige.

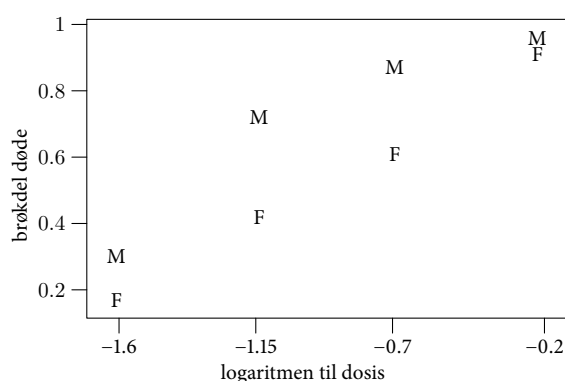
Likelihoodfunktionen i grundmodellen er

$$\begin{aligned}
 L &= \prod_k \prod_d \binom{n_{dk}}{y_{dk}} p_{dk}^{y_{dk}} (1 - p_{dk})^{n_{dk} - y_{dk}} \\
 &= \prod_k \prod_d \binom{n_{dk}}{y_{dk}} \cdot \prod_k \prod_d \left( \frac{p_{dk}}{1 - p_{dk}} \right)^{y_{dk}} \cdot \prod_k \prod_d (1 - p_{dk})^{n_{dk}} \\
 &= \text{konst} \cdot \prod_k \prod_d \left( \frac{p_{dk}}{1 - p_{dk}} \right)^{y_{dk}} \cdot \prod_k \prod_d (1 - p_{dk})^{n_{dk}},
 \end{aligned}$$

og log-likelihoodfunktionen er

$$\begin{aligned}
 \ln L &= \text{konst} + \sum_k \sum_d y_{dk} \ln \frac{p_{dk}}{1 - p_{dk}} + \sum_k \sum_d n_{dk} \ln(1 - p_{dk}) \\
 &= \text{konst} + \sum_k \sum_d y_{dk} \text{logit}(p_{dk}) + \sum_k \sum_d n_{dk} \ln(1 - p_{dk}).
 \end{aligned}$$

De otte parametre  $p_{dk}$  varierer uafhængigt af hinanden, og  $\hat{p}_{dk} = y_{dk}/n_{dk}$ . Opgaven i det følgende er nu at modellere  $p$ 's afhængighed af  $d$  og  $k$ .



Figur 9.2 Rismelsbiller: Observeret døds sandsynlighed (relativ hyppighed) som funktion af logaritmen til dosis, for hvert køn.

LOGIT-FUNKTIONEN.  
Funktionen

$$\text{logit}(p) = \ln \frac{p}{1-p}.$$

afbilder intervallet  $]0, 1[$  bijektivt på den reelle akse  $\mathbb{R}$ . Den omvendte funktion er

$$p = \frac{\exp(z)}{1 + \exp(z)}.$$

Når  $p$  er sandsynligheden for en bestemt hændelse (f.eks. at dø), så er  $p/(1-p)$  forholdet mellem sandsynligheden for hændelsen og sandsynligheden for den modsatte hændelse; dette tal kaldes med et udtryk hentet fra spillebranchen for *odds* for den pågældende hændelse. Vi kan dermed sige at logit-funktionen udregner logaritmen til odds.

### En dosis-respons model

Hvordan er sammenhængen mellem giftkoncentrationen (dosis)  $d$  og sandsynligheden  $p_d$  for at en bille dør ved denne dosis? Hvis man vidste en hel masse om hvordan netop dette giftstof virker i billeorganismen, kunne man formentlig give et velbegrundet forslag til hvordan sandsynligheden afhænger af dosis. Men den statistiske modelbyggeres tilgang til problemet er af langt mere jordbunden og pragmatisk karakter, som vi nu skal se.

I eksemplet har eksperimentator valgt nogle tilsyneladende mærkværdige dosis-værdier (0.20, 0.32, 0.50 og 0.80). Hvis man ser nærmere efter, opdager man dog at der (næsten) er tale om en kvotientrække, idet kvotienten mellem et tal og det næste er (næsten) den samme, nemlig 1.6. Det tager den statistiske modelbygger som et fingerpeg om at dosis antagelig skal måles på en logaritmisk skala, dvs. man skal interessere sig for hvordan sandsynligheden for at dø afhænger af logaritmen til dosis. Derfor tegner vi figur 9.1 en gang til, idet vi nu afsætter logaritmen til dosis ud ad abscisseaksen; resultatet ses i figur 9.2.

Vi skal modellere sandsynlighedernes afhængighed af baggrundsvariablen  $\ln d$ . En af de simpleste former for afhængighed er *lineær* afhængighed. Imidlertid ville det være en dårlig idé at foreslå at  $p_d$  skulle afhænge lineært af  $\ln d$  (altså at  $p_d = \alpha + \beta \ln d$  for passende valgte konstanter  $\alpha$  og  $\beta$ ) fordi dette ville være uforeneligt med kravet om at sandsynlighederne skal ligge mellem 0 og 1. Ofte gør man så det at man omregner  $p_d$  til en ny skala og postulerer at » $p_d$  på den ny skala«  
afhænger lineært af  $\ln d$ . Omregningen kan foregå ved hjælp af logit-funktionen.

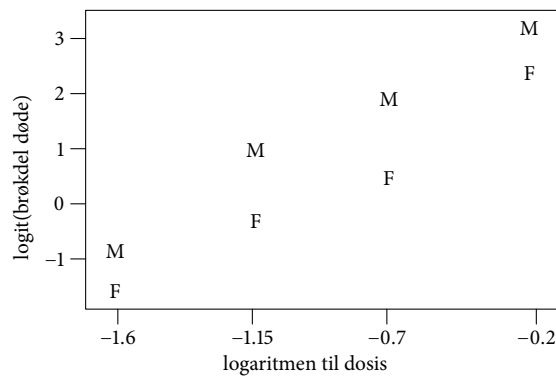
Vi vil foreslå/postulere følgende ofte anvendte model for sammenhængen mellem dosis og sandsynligheden for at dø: For hvert af de to køn afhænger  $\text{logit}(p_d)$  lineært af  $x = \ln d$ , eller mere udførligt: Der findes fire konstanter  $\alpha_M$ ,  $\beta_M$  og  $\alpha_F$ ,  $\beta_F$  således at

$$\text{logit}(p_{dM}) = \alpha_M + \beta_M \ln d$$

$$\text{logit}(p_{dF}) = \alpha_F + \beta_F \ln d.$$

En sådan model kaldes en *logistisk regressionsmodel*.

Figur 9.3 Rismelsbiller:  
Logit til estimeret dødssandsyn-  
lighed (relativ hyppighed) som  
funktion af logaritmen til dosis,  
for hvert køn.



I figur 9.3 er logit til de relative hyppigheder afsat mod logaritmen til dosis; hvis modellen er rigtig, skal hvert af de to punktsæt fordele sig tilfældigt omkring en ret linje, og det ser jo ikke helt urimeligt ud; der behøves dog en nærmere undersøgelse for at afgøre om modellen giver en tilstrækkeligt god beskrivelse af datamaterialet.

I de følgende afsnit skal vi se hvordan man estimerer de ukendte parametre, hvordan man undersøger om modellen er god nok, og hvordan man sammenligner giftens virkning på han- og hunbiller.

### Estimation

Likelihoodfunktionen  $L_0$  i den logistiske model fås ved i grundmodellens likelihoodfunktion at opfatte  $p$ -erne som funktioner af  $\alpha$ -erne og  $\beta$ -erne. Vi får

$$\begin{aligned} \ln L_0(\alpha_M, \alpha_K, \beta_M, \beta_K) &= \text{konst} + \sum_k \sum_d y_{dk}(\alpha_k + \beta_k \ln d) + \sum_k \sum_d n_{dk} \ln(1 - p_{dk}) \\ &= \text{konst} + \sum_k \left( \alpha_k y_{\cdot k} + \sum_d y_{dk} \ln d + \sum_d n_{dk} \ln(1 - p_{dk}) \right), \end{aligned}$$

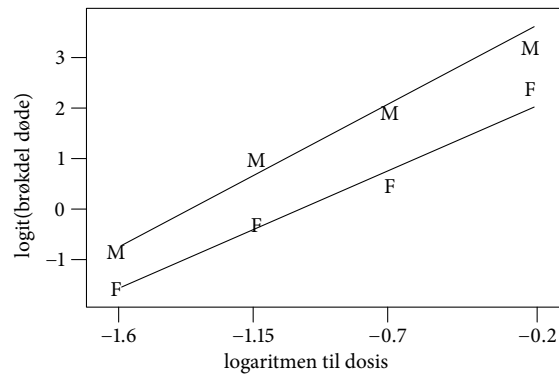
så log-likelihoodfunktionen består altså af to separate bidrag, et for hanbillerne og et for hunbillerne. Parameterrummet er  $\mathbb{R}^4$ .

Hvis man differentierer  $\ln L_0$  med hensyn til hver af de fire variable og sætter de partielle afledede lig 0, får man efter lidt omskrivning de fire ligninger

$$\begin{aligned} \sum_d y_{dM} &= \sum_d n_{dM} p_{dM}, & \sum_d y_{dK} &= \sum_d n_{dK} p_{dK}, \\ \sum_d y_{dM} \ln d &= \sum_d n_{dM} p_{dM} \ln d, & \sum_d y_{dK} \ln d &= \sum_d n_{dK} p_{dK} \ln d, \end{aligned}$$

hvor  $p_{dk} = \frac{\exp(\alpha_k + \beta_k \ln d)}{1 + \exp(\alpha_k + \beta_k \ln d)}$ . Man kan ikke løse disse ligninger eksplicit, så vi må klare os med en numerisk løsning.

Et almindeligt statistik-computerprogram kan finde følgende estimater:  $\hat{\alpha}_M = 4.27$  (med en standardafvigelse på 0.53) og  $\hat{\beta}_M = 3.14$  (standardafvigelse 0.39),



Figur 9.4 Rismelsbiller: Logit til estimeret dødssandsynlighed (relativ hyppighed) som funktion af logaritmen til dosis, for hvert køn, samt de estimerede regressionslinjer.

og for hunbillerne er de  $\hat{\alpha}_F = 2.56$  (standardafvigelse 0.38) og  $\hat{\beta}_F = 2.58$  (standardafvigelse 0.30).

Hvis vi i figur 9.3 indtegner de estimerede regressionslinjer, får vi figur 9.4.

### Modelkontrol

Vi har nu estimeret parametrene i den model der siger at

$$\text{logit}(p_{dk}) = \alpha_k + \beta_k \ln d$$

eller

$$p_{dk} = \frac{\exp(\alpha_k + \beta_k \ln d)}{1 + \exp(\alpha_k + \beta_k \ln d)}.$$

En nærliggende form for modelkontrol er derfor at indtegne graferne for de to funktioner

$$x \mapsto \frac{\exp(\alpha_M + \beta_M x)}{1 + \exp(\alpha_M + \beta_M x)} \quad \text{og} \quad x \mapsto \frac{\exp(\alpha_F + \beta_F x)}{1 + \exp(\alpha_F + \beta_F x)}$$

i figur 9.2 hvorved man får figur 9.5. Den viser at modellen ikke er helt hen i vejret. Man kan desuden ved hjælp af likelihoodmetoden konstruere et numerisk test baseret på

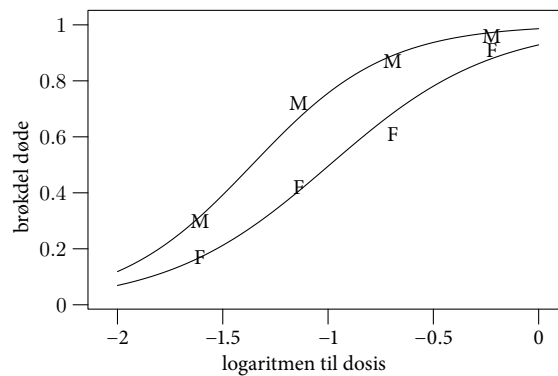
$$Q = \frac{L(\hat{\alpha}_M, \hat{\alpha}_F, \hat{\beta}_M, \hat{\beta}_F)}{L_{\max}} \quad (9.1)$$

hvor  $L_{\max}$  er likelihoodfunktionens maksimale værdi i grundmodellen (side 128).

Med betegnelserne  $\hat{p}_{dk} = \text{logit}^{-1}(\hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k \ln d)$  og  $\hat{y}_{dk} = n_{dk} \hat{p}_{dk}$  bliver

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\prod_k \prod_d \binom{n_{dk}}{y_{dk}} \hat{p}_{dk}^{y_{dk}} (1 - \hat{p}_{dk})^{n_{dk} - y_{dk}}}{\prod_k \prod_d \binom{n_{dk}}{y_{dk}} \left(\frac{y_{dk}}{n_{dk}}\right)^{y_{dk}} \left(1 - \frac{y_{dk}}{n_{dk}}\right)^{n_{dk} - y_{dk}}} \\ &= \prod_k \prod_d \left(\frac{\hat{y}_{dk}}{y_{dk}}\right)^{y_{dk}} \left(\frac{n_{dk} - \hat{y}_{dk}}{n_{dk} - y_{dk}}\right)^{n_{dk} - y_{dk}} \end{aligned}$$

Figur 9.5 Rismelsbiller:  
To forskellige kurver, samt de observerede relative hyppigheder.



og

$$-2 \ln Q = 2 \sum_k \sum_d \left( y_{dk} \ln \frac{y_{dk}}{\hat{y}_{dk}} + (n_{dk} - y_{dk}) \ln \frac{n_{dk} - y_{dk}}{n_{dk} - \hat{y}_{dk}} \right).$$

Store værdier af  $-2 \ln Q$  (eller små værdier af  $Q$ ) er tegn på at der er for stor uoverensstemmelse mellem de observerede antal ( $y_{kd}$  og  $n_{kd} - y_{kd}$ ) og de forudsagte antal ( $\hat{y}_{kd}$  og  $n_{kd} - \hat{y}_{kd}$ ) til at modellen kan siges at være god nok. I det konkrete tilfælde er  $-2 \ln Q_{\text{obs}} = 3.36$ , og testsandsynligheden, dvs. sandsynligheden (når den testede model er rigtig) for at få en  $-2 \ln Q$ -værdi som er større end  $-2 \ln Q_{\text{obs}}$ , kan bestemmes ved at udnytte at når modellen er rigtig, er  $-2 \ln Q$  asymptotisk  $\chi^2$ -fordelt med  $8 - 4 = 4$  frihedsgrader; man finder at testsandsynligheden er ca. 0.50. (Antallet af frihedsgrader er antal frie parametre i grundmodellen minus antal frie parametre i den testede model.)

Da der således er henvend 50% chance for at få et sæt observationer der harmonerer dårligere med den postulerede model, må vi konkludere at modellen ser ud til at være anvendelig.

### Hypoteser om parametrene

Vi har opstillet en model som indeholder fire parametre, og som ser ud til at give en ganske god beskrivelse af observationerne. Næste punkt på dagsordenen er at undersøge om modellen kan forsimples.

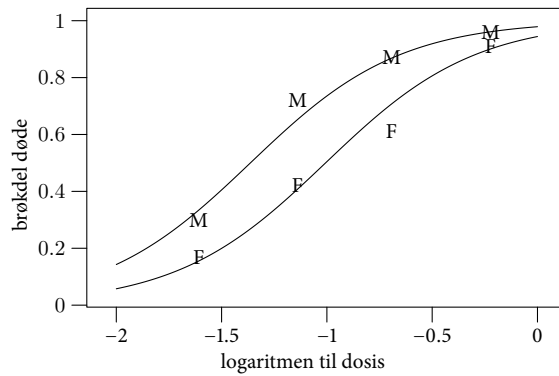
Eksempelvis kan man undersøge om de to kurver er parallelle, og hvis det kan accepteres, kan man derefter undersøge om kurverne er sammenfaldende. Vi formulerer derfor to statistiske hypoteser:

1. Hypotesen om parallelle kurver:  $H_1 : \beta_M = \beta_F$ , eller mere udførligt: Der findes konstanter  $\alpha_M$ ,  $\alpha_F$  og  $\beta$  således at

$$\text{logit}(p_{dM}) = \alpha_M + \beta \ln d \quad \text{og} \quad \text{logit}(p_{dF}) = \alpha_F + \beta \ln d.$$

2. Hypotesen om sammenfaldende kurver:  $H_2 : \alpha_M = \alpha_F$  og  $\beta_M = \beta_F$ , eller mere udførligt: Der findes konstanter  $\alpha$  og  $\beta$  således at

$$\text{logit}(p_{dM}) = \alpha + \beta \ln d \quad \text{og} \quad \text{logit}(p_{dF}) = \alpha + \beta \ln d.$$



Figur 9.6 Rismelsbiller:  
Den endelige model.

Vi undersøger først hypotesen  $H_1$  om parallelle kurver. Maksimaliseringsestimaterne er  $\hat{\alpha}_M = 3.84$  (med en standardafvigelse på 0.34),  $\hat{\alpha}_F = 2.83$  (standardafvigelse 0.31) og  $\hat{\beta} = 2.81$  (standardafvigelse 0.24). Hypotesen testes med det sædvanlige kvotienttest hvor man sammenligner den maksimale likelihoodfunktion under antagelse af  $H_1$  med den maksimale likelihoodfunktion i den senest accepterede model:

$$\begin{aligned} -2 \ln Q &= -2 \ln \frac{L(\hat{\alpha}_M, \hat{\alpha}_F, \hat{\beta}, \hat{\beta})}{L(\hat{\alpha}_M, \hat{\alpha}_F, \hat{\beta}_M, \hat{\beta}_F)} \\ &= 2 \sum_k \sum_d \left( y_{dk} \ln \frac{\hat{y}_{dk}}{\hat{\hat{y}}_{dk}} + (n_{dk} - y_{dk}) \ln \frac{n_{dk} - \hat{y}_{dk}}{n_{dk} - \hat{\hat{y}}_{dk}} \right) \end{aligned}$$

hvor  $\hat{\hat{y}}_{dk} = n_{dk} \frac{\exp(\hat{\alpha}_k + \hat{\beta} \ln d)}{1 + \exp(\hat{\alpha}_k + \hat{\beta} \ln d)}$ . Man får at  $-2 \ln Q_{\text{obs}} = 1.31$ , der skal sammenlignes med  $\chi^2$ -fordelingen med  $4 - 3 = 1$  frihedsgrader (ændring i antal parametre). Testsandsynligheden (s: sandsynligheden for at få værdier større end 1.31) er ca. 25%, så værdien 1.31 er ikke usædvanligt stor. Modellen med parallelle kurver giver således ikke en signifikant dårligere beskrivelse af observationerne end den hidtidige model gør.

Efter således at have accepteret hypotesen  $H_1$  kan vi gå videre med hypotesen  $H_2$  om sammenfaldende kurver. (Hvis  $H_1$  var blevet forkastet, ville man ikke gå videre til  $H_2$ .) Når man tester  $H_2$  i forhold til  $H_1$ , får man  $-2 \ln Q_{\text{obs}} = 27.50$  der skal sammenlignes med  $\chi^2$ -fordelingen med et antal frihedsgrader på  $3 - 2 = 1$ ; sandsynligheden for at få værdier større end 27.50 er lig nul med adskillige betydende cifre, hvilket viser at modellen med sammenfaldende kurver giver en væsentligt dårligere beskrivelse af observationerne end den forrige model gør. Vi må derfor forkaste hypotesen om sammenfaldende kurver.

Konklusionen på det hele er således at vi kan beskrive sammenhængen mellem dosis  $d$  og sandsynligheden  $p$  for at dø på den måde at for hvert køn afhænger logit  $p$  lineært af  $\ln d$ ; de to kurver er parallelle, men ikke sammenfaldende. De



estimerede kurver er

$$\text{logit}(p_{dM}) = 3.84 + 2.81 \ln d \quad \text{og} \quad \text{logit}(p_{dF}) = 2.83 + 2.81 \ln d ,$$

svarende til at

$$p_{dM} = \frac{\exp(3.84 + 2.81 \ln d)}{1 + \exp(3.84 + 2.81 \ln d)} \quad \text{og} \quad p_{dF} = \frac{\exp(2.83 + 2.81 \ln d)}{1 + \exp(2.83 + 2.81 \ln d)} .$$

Figur 9.6 illustrerer situationen.

## 9.2 Lungekræft i Fredericia

Dette er et eksempel på en såkaldt multiplikativ poissonmodel. I øvrigt er eksemplet interessant på den måde at man tilsyneladende kan nå frem til modstridende konklusioner blot ved at ændre en smule på fremgangsmåden ved analysen af modellen.

### Situationen

I midten af 1970-erne var der en større debat om hvorvidt der var særlig stor risiko for at få lungekræft når man boede i byen Fredericia. Grunden til at der kunne være en større risiko, var at Fredericia havde en betydelig mængde forurenende industri midt inde i byen. For at belyse spørgsmålet indsamlede man data om lungekræfthypigheden i perioden 1968-71, dels for Fredericia, dels for byerne Horsens, Kolding og Vejle. De tre sidste byer skulle tjene som sammenligningsgrundlag, idet det på nær den mistænkte industri var byer af nogenlunde samme art som Fredericia.

Lungekræft opstår tit som et resultat af daglige påvirkninger af skadelige stoffer gennem mange år. En eventuel større risiko i Fredericia kunne måske derfor vise sig ved at lungekræftpatienterne fra Fredericia var yngre end dem fra kontrolbyerne; desuden er det under alle omstændigheder tilfældet at lungekræft optræder med meget forskellig hyppighed i forskellige aldersklasser. Det er derfor ikke nok at se på totalantallene af lungekræfttilfælde, man skal se på antallene af tilfælde i forskellige aldersklasser. De foreliggende tal er vist i tabel 9.2. Da antallene af lungekræfttilfælde i sig selv ikke siger noget så længe man ikke kender risikogruppernes størrelse, må man også rapportere antal indbyggere i de forskellige aldersklasser og byer, se tabel 9.3.

Det er nu statistikerens opgave at beskrive tallene i tabel 9.2 ved hjælp af en statistisk model hvori der indgår parametre der i en passende forstand beskriver risikoen for at få lungekræft når man tilhører en bestemt aldersgruppe og bor i en bestemt by. Endvidere ville det være formålstjenligt hvis man kunne udskille nogle parametre der beskrev »byvirkninger« (dvs. forskelle mellem byer) efter at man på en eller anden måde havde taget højde for forskellene mellem aldersgrupperne.

| aldersklasse | Fredericia | Horsens | Kolding | Vejle | i alt |
|--------------|------------|---------|---------|-------|-------|
| 40-54        | 11         | 13      | 4       | 5     | 33    |
| 55-59        | 11         | 6       | 8       | 7     | 32    |
| 60-64        | 11         | 15      | 7       | 10    | 43    |
| 65-69        | 10         | 10      | 11      | 14    | 45    |
| 70-74        | 11         | 12      | 9       | 8     | 40    |
| 75+          | 10         | 2       | 12      | 7     | 31    |
| i alt        | 64         | 58      | 51      | 51    | 224   |

Tabel 9.2 Lungekræfttilfælde i fire byer fordelt på aldersklasser (fra Andersen, 1977).

| aldersklasse | Fredericia | Horsens | Kolding | Vejle | i alt |
|--------------|------------|---------|---------|-------|-------|
| 40-54        | 3059       | 2879    | 3142    | 2520  | 11600 |
| 55-59        | 800        | 1083    | 1050    | 878   | 3811  |
| 60-64        | 710        | 923     | 895     | 839   | 3367  |
| 65-69        | 581        | 834     | 702     | 631   | 2748  |
| 70-74        | 509        | 634     | 535     | 539   | 2217  |
| 75+          | 605        | 782     | 659     | 619   | 2665  |
| i alt        | 6264       | 7135    | 6983    | 6026  | 26408 |

Tabel 9.3 Antal indbyggere i de forskellige aldersklasser i de fire byer (fra Andersen, 1977).

### Modelopstilling

Den statistiske model skal ikke modellere variationen i antallet af indbyggere i de forskellige byer og aldersklasser, så derfor vil vi anse disse antal for givne konstanter. Det er antallene af lungekræfttilfælde der skal opfattes som observerede værdier af stokastiske variable, og det er fordelingen af disse stokastiske variable der skal specificeres af den statistiske model. Vi indfører noget notation:

$y_{ij}$  = antal tilfælde i aldersgruppe  $i$  i by  $j$ ,

$r_{ij}$  = antal personer i aldersgruppe  $i$  i by  $j$ ,

hvor  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  nummererer aldersgrupperne, og  $j = 1, 2, 3, 4$  nummererer byerne. Observationerne  $y_{ij}$  opfattes som observerede værdier af stokastiske variable  $Y_{ij}$ .

Hvilken fordeling skal  $Y$ -erne have? I første omgang ville man måske foreslå at  $Y_{ij}$  skulle være binomialfordelt med antalsparameter  $r_{ij}$ ; nu er sandsynligheden for at få lungekræft temmelig lille, så med henvisning til sætningen om approksimation af binomialfordelinger med poissonfordelinger (sætning 2.15 side 53) vil vi i stedet foreslå at  $Y_{ij}$  skal være poissonfordelt med en parameter  $\mu_{ij}$  der afhænger af aldersgruppe og by (modellen skal ikke indeholde observationsperiodens længde da denne er konstant lig 4 år). Hvis vi skriver  $\mu_{ij}$  som  $\mu_{ij} = \lambda_{ij}r_{ij}$ , så kan intensiteten  $\lambda_{ij}$  fortolkes som »antal lungekræfttilfælde pr. person i aldersgruppe  $i$  i by  $j$  i den betragtede fireårsperiode«, dvs.  $\lambda$  er den *alders- og byspecifikke cancer-incidens*. Endvidere vil vi gå ud fra at de enkelte  $Y_{ij}$ -er er stokastisk uafhængige. Vi får dermed følgende grundmodel:

De stokastiske variable  $Y_{ij}$  er stokastisk uafhængige og poissonfor-

delte således at  $Y_{ij}$  har parameter  $\lambda_{ij}r_{ij}$  hvor  $\lambda_{ij}$ -erne er ukendte positive parametre.

Det er let at estimere parametrene i grundmodellen. Eksempelvis estimeres intensiteten  $\lambda_{21}$  for 55-59-årige i Fredericia til  $11/800 = 0.014$  (dvs. 0.014 tilfælde pr. person pr. 4 år). Den generelle opskrift er  $\hat{\lambda}_{ij} = y_{ij}/r_{ij}$ .

Nu var det jo tanken at vi gerne ville blive i stand til at sammenligne byerne efter at have taget højde for deres forskellige aldersfordelinger, og det kan ikke uden videre lade sig gøre i grundmodellen. Derfor vil vi undersøge om det lader sig gøre at beskrive data med en anden model, nemlig en model hvor  $\lambda_{ij}$  er spaltet op i et produkt  $\alpha_i\beta_j$  af en *aldersvirkning*  $\alpha_i$  og en *byvirkning*  $\beta_j$ . Hvis dette lader sig gøre, er vi heldigt stillede, for så kan vi sammenligne byerne ved at sammenligne byparametrene  $\beta_j$ . Vi vil derfor i første omgang teste den statistiske hypotese

$$H_0 : \lambda_{ij} = \alpha_i\beta_j$$

hvor  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  er ukendte parametre. Mere udførligt er hypotesen at findes parametre  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{R}_+$  således at der for by  $j$  og aldersgruppe  $i$  gælder at lungekræfttrikoen  $\lambda_{ij}$  fås som  $\lambda_{ij} = \alpha_i\beta_j$ . – Hypotesen  $H_0$  specificerer en *multiplikativ* model, fordi aldersparametre og byparametre indgår multiplikativt.

### En detalje vedrørende parametriseringen

Der er det særlige ved parametriseringen af modellen under  $H_0$  at den ikke er injektiv: afbildningen

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \mapsto (\alpha_i\beta_j)_{i=1,\dots,6; j=1,\dots,4}$$

fra  $\mathbb{R}_+^{10}$  til  $\mathbb{R}^{24}$  er ikke injektiv, idet billedmængden er faktisk kun en 9-dimensionel flade. (Man overbeviser sig let om at  $\alpha_i\beta_j = \alpha_i^*\beta_j^*$  for alle  $i$  og  $j$ , hvis og kun hvis der findes et  $c > 0$  således at  $\alpha_i = c\alpha_i^*$  for alle  $i$  og  $\beta_j = c\beta_j^*$  for alle  $j$ .)

De 10 parametre skal derfor pålægges ét bånd for at få en injektiv parametrisering. Et sådant bånd kan være at  $\alpha_1 = 1$ , eller at  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_6 = 1$ , eller at  $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_6 = 1$ , eller det tilsvarende for  $\beta$ , osv. I det aktuelle eksempel vil vi benytte betingelsen  $\beta_1 = 1$ , dvs. vi fikserer Fredericia-parameteren til 1. Modellen indeholder herefter ni ukendte parametre.

### Estimation i den multiplikative model

I den multiplikative model lader det sig ikke gøre at opskrive eksplicitte udtryk for estimatorne, man er henvist til i de konkrete tilfælde at benytte numeriske metoder, f.eks. i form af hensigtsmæssige computerprogrammer. Likelihoodfunktionen i grundmodellen er

$$L = \prod_{i=1}^6 \prod_{j=1}^4 \frac{(\lambda_{ij}r_{ij})^{y_{ij}}}{y_{ij}!} \exp(-\lambda_{ij}r_{ij}) = \text{konst} \cdot \prod_{i=1}^6 \prod_{j=1}^4 \lambda_{ij}^{y_{ij}} \exp(-\lambda_{ij}r_{ij}).$$

Når man maksimiserer med hensyn til  $\lambda_{ij}$ -erne, får man som allerede nævnt at maksimaliseringsestimaterne i grundmodellen er  $\hat{\lambda}_{ij} = y_{ij}/r_{ij}$ .

Når vi i udtrykket for  $L$  erstatter  $\lambda_{ij}$  med  $\alpha_i \beta_j$ , får vi likelihoodfunktionen  $L_0$  under  $H_0$ :

$$\begin{aligned} L_0 &= \text{konst} \cdot \prod_{i=1}^6 \prod_{j=1}^4 \alpha_i^{y_{ij}} \beta_j^{r_{ij}} \exp(-\alpha_i \beta_j r_{ij}) \\ &= \text{konst} \cdot \left( \prod_{i=1}^6 \alpha_i^{y_{i\cdot}} \right) \left( \prod_{j=1}^4 \beta_j^{y_{\cdot j}} \right) \exp\left(-\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 \alpha_i \beta_j r_{ij}\right), \end{aligned}$$

og log-likelihoodfunktionen er

$$\ln L_0 = \text{konst} + \left( \sum_{i=1}^6 y_{i\cdot} \ln \alpha_i \right) + \left( \sum_{j=1}^4 y_{\cdot j} \ln \beta_j \right) - \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 \alpha_i \beta_j r_{ij}.$$

Vi skal bestemme det parametersæt  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4, \hat{\alpha}_5, \hat{\alpha}_6, 1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4)$  der maksimiserer  $\ln L_0$ . De partielle afledede er

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L_0}{\partial \alpha_i} &= \frac{y_{i\cdot}}{\alpha_i} - \sum_j \beta_j r_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \frac{\partial \ln L_0}{\partial \beta_j} &= \frac{y_{\cdot j}}{\beta_j} - \sum_i \alpha_i r_{ij}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Det ses at de partielle afledede er lig 0 hvis og kun hvis

$$y_{i\cdot} = \sum_j \alpha_i \beta_j r_{ij} \quad \text{for alle } i \quad \text{og} \quad y_{\cdot j} = \sum_i \alpha_i \beta_j r_{ij} \quad \text{for alle } j.$$

Vi noterer til senere brug at der heraf følger at

$$y_{\cdot\cdot} = \sum_i \sum_j \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j r_{ij}. \quad (9.2)$$

Man finder følgende maksimaliseringsestimater i den multiplikative model:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= 0.0036 & \hat{\beta}_1 &= 1 \\ \hat{\alpha}_2 &= 0.0108 & \hat{\beta}_2 &= 0.719 \\ \hat{\alpha}_3 &= 0.0164 & \hat{\beta}_3 &= 0.690 \\ \hat{\alpha}_4 &= 0.0210 & \hat{\beta}_4 &= 0.762 \\ \hat{\alpha}_5 &= 0.0229 & & \\ \hat{\alpha}_6 &= 0.0148. & & \end{aligned}$$

Tabel 9.4 *Estimerede alders- og byspecifikke lungekræftintensiteter i perioden 1986-71 under forudsætning af den multiplikative poissonmodel. Værdierne er antal pr. 1000 indbyggere pr. 4 år.*

| aldersklasse | Fredericia | Horsens | Kolding | Vejle |
|--------------|------------|---------|---------|-------|
| 40-54        | 3.6        | 2.6     | 2.5     | 2.7   |
| 55-59        | 10.8       | 7.8     | 7.5     | 8.2   |
| 60-64        | 16.4       | 11.8    | 11.3    | 12.5  |
| 65-69        | 21.0       | 15.1    | 14.5    | 16.0  |
| 70-74        | 22.9       | 16.5    | 15.8    | 17.4  |
| 75+          | 14.8       | 10.6    | 10.2    | 11.3  |

### Den multiplikative models beskrivelse af data

Herefter vil vi undersøge hvor god en beskrivelse den multiplikative model faktisk giver af datamaterialet. Det vil vi gøre ved at teste multiplikativitetshypotesen  $H_0$  i forhold til grundmodellen, og det foregår med et almindeligt kvotienttest: Man udregner

$$-2 \ln Q = -2 \ln \frac{L_0(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4, \hat{\alpha}_5, \hat{\alpha}_6, 1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4)}{L(\hat{\lambda}_{11}, \hat{\lambda}_{12}, \dots, \hat{\lambda}_{63}, \hat{\lambda}_{64})}.$$

Store værdier af  $-2 \ln Q$  er signifikante, dvs. tyder på at  $H_0$  ikke giver en tilstrækkelig god beskrivelse af data. For at afgøre om  $-2 \ln Q_{\text{obs}}$  er signifikant stor, skal vi se på testsandsynligheden  $\varepsilon = P_0(-2 \ln Q \geq -2 \ln Q_{\text{obs}})$ , altså sandsynligheden for at få en større  $-2 \ln Q$ -værdi forudsat at  $H_0$  er rigtig. Når  $H_0$  er rigtig, er  $-2 \ln Q$  approksimativt  $\chi^2$ -fordelt med  $f = 24 - 9 = 15$  frihedsgrader (forudsat at de forventede antal alle er mindst 5). Det betyder at testsandsynligheden kan udregnes som  $\varepsilon = P(\chi_{15}^2 \geq -2 \ln Q_{\text{obs}})$ .

Ved almindelige omskrivninger, hvor man undervejs skal benytte (9.2), finder man at

$$Q = \prod_{i=1}^6 \prod_{j=1}^4 \left( \frac{\hat{y}_{ij}}{\hat{y}_{ij}} \right)^{y_{ij}},$$

og dermed

$$-2 \ln Q = 2 \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 y_{ij} \ln \frac{y_{ij}}{\hat{y}_{ij}}.$$

hvor  $\hat{y}_{ij} = \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j r_{ij}$  er det forventede antal lungekræfttilfælde i aldersklasse  $i$  i by  $j$ .

Som led i beregningerne af  $\hat{y}_{ij}$  udregnes de estimerede alders- og by-specifikke lungekræftintensiteter  $\hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j$ . Værdierne af 1000  $\hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j$ , dvs. de forventede antal tilfælde pr. 1000 indbyggere, ses i tabel 9.4. Selve de forventede antal  $\hat{y}_{ij}$  i de forskellige byer og aldersklasser ses i tabel 9.5, og den konkrete værdi af  $-2 \ln Q$  bliver  $-2 \ln Q_{\text{obs}} = 22.6$ . I  $\chi^2$ -fordelingen med  $f = 24 - 9 = 15$  frihedsgrader er 90%-fraktilen 22.3 og 95%-fraktilen 25.0; den opnåede værdi  $-2 \ln Q_{\text{obs}} = 22.6$  svarer altså til en testsandsynlighed  $\varepsilon$  på godt 5%, og der er dermed ikke alvorlig evidens imod modellens brugbarhed. Vi tillader os at gå ud fra at modellen faktisk er anvendelig,  $\therefore$  lungekræfttrisikoen afhænger multiplikativt af by og alder.

| aldersklasse | Fredericia | Horsens | Kolding | Vejle | i alt  |
|--------------|------------|---------|---------|-------|--------|
| 40-54        | 11.01      | 7.45    | 7.80    | 6.91  | 33.17  |
| 55-59        | 8.64       | 8.41    | 7.82    | 7.23  | 32.10  |
| 60-64        | 11.64      | 10.88   | 10.13   | 10.48 | 43.13  |
| 65-69        | 12.20      | 12.59   | 10.17   | 10.10 | 45.06  |
| 70-74        | 11.66      | 10.44   | 8.45    | 9.41  | 39.96  |
| 75+          | 8.95       | 8.32    | 6.73    | 6.98  | 30.98  |
| i alt        | 64.10      | 58.09   | 51.10   | 51.11 | 224.40 |

Tabel 9.5 De forventede antal  $\hat{y}_{ij}$  af lungekræfttilfælde under den multiplikative poissonmodel.

Hermed er vi nået frem til en statistisk model der beskriver data ved hjælp af nogle by-parametre ( $\beta$ -erne) og nogle alders-parametre ( $\alpha$ -erne), men uden parametre svarende til en vekselvirkning mellem by og alder. Det betyder at den forskel der er mellem byerne, er den samme for alle aldersklasser, og at den forskel der er mellem aldersklasserne, er den samme i alle byer. Når vi skal sammenligne byerne, kan vi derfor gøre det ved udelukkende at betragte  $\beta$ -erne.

### Ens byer?

Det hele går ud på at undersøge om der er signifikant forskel på byerne. Hvis der ikke er nogen forskel på byerne, er byparametrene ens, dvs.  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$ , og da  $\beta_1 = 1$ , må den fælles værdi være 1. Vi vil derfor teste den statistiske hypotese

$$H_1 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1.$$

Hypotesen skal testes i forhold til den aktuelle grundmodel  $H_0$ , så teststørrelsen bliver

$$-2 \ln Q = -2 \ln \frac{L_1(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4, \hat{\alpha}_5, \hat{\alpha}_6)}{L_0(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4, \hat{\alpha}_5, \hat{\alpha}_6, 1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4)}$$

hvor  $L_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6) = L_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6, 1, 1, 1, 1)$  er likelihoodfunktionen under  $H_1$ , og  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_6$  er estimerne under  $H_1$ , dvs.  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_6)$  er maksimumspunktet for  $L_1$ .

Funktionen  $L_1$  er et produkt af seks funktioner med hver sit  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} L_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6) &= \text{konst} \cdot \prod_{i=1}^6 \prod_{j=1}^4 \alpha_i^{y_{ij}} \exp(-\alpha_i r_{ij}) \\ &= \text{konst} \cdot \prod_{i=1}^6 \alpha_i^{y_{i\cdot}} \exp(-\alpha_i r_{i\cdot}). \end{aligned}$$

Maksimaliseringsestimaterne findes derfor til  $\hat{\alpha}_i = \frac{y_{i\cdot}}{r_{i\cdot}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Talværdierne bliver

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= 33/11600 = 0.002845 & \hat{\alpha}_4 &= 45/2748 = 0.0164 \\ \hat{\alpha}_2 &= 32/3811 = 0.00840 & \hat{\alpha}_5 &= 40/2217 = 0.0180 \\ \hat{\alpha}_3 &= 43/3367 = 0.0128 & \hat{\alpha}_6 &= 31/2665 = 0.0116. \end{aligned}$$

Tabel 9.6 De forventede antal  $\widehat{y}_{ij}$  af lungekræfttilfælde under antagelsen om at der ikke er forskel på byerne.

| aldersklasse | Fredericia | Horsens | Kolding | Vejle | i alt  |
|--------------|------------|---------|---------|-------|--------|
| 40-54        | 8.70       | 8.19    | 8.94    | 7.17  | 33.00  |
| 55-59        | 6.72       | 9.10    | 8.82    | 7.38  | 32.02  |
| 60-64        | 9.09       | 11.81   | 11.46   | 10.74 | 43.10  |
| 65-69        | 9.53       | 13.68   | 11.51   | 10.35 | 45.07  |
| 70-74        | 9.16       | 11.41   | 9.63    | 9.70  | 39.90  |
| 75+          | 7.02       | 9.07    | 7.64    | 7.18  | 30.91  |
| i alt        | 50.22      | 63.26   | 58.00   | 52.52 | 224.00 |

Almindelige omskrivninger giver at

$$Q = \frac{L_1(\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\alpha}_3, \widehat{\alpha}_4, \widehat{\alpha}_5, \widehat{\alpha}_6)}{L_0(\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\alpha}_3, \widehat{\alpha}_4, \widehat{\alpha}_5, \widehat{\alpha}_6, 1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\beta}_3, \widehat{\beta}_4)} = \prod_{i=1}^6 \prod_{j=1}^4 \left( \frac{\widehat{y}_{ij}}{\widehat{y}_{ij}} \right)^{y_{ij}}$$

og dermed

$$-2 \ln Q = 2 \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 y_{ij} \ln \frac{\widehat{y}_{ij}}{\widehat{y}_{ij}};$$

her er  $\widehat{y}_{ij} = \widehat{\alpha}_i r_{ij}$  og som før  $\widehat{y}_{ij} = \widehat{\alpha}_i \widehat{\beta}_j r_{ij}$ . De forventede antal  $\widehat{y}_{ij}$  er vist i tabel 9.6.

Store værdier af  $-2 \ln Q$  er signifikante. Man skal sammenholde  $-2 \ln Q$  med  $\chi^2$ -fordelingen med  $f = 9 - 6 = 3$  frihedsgrader.

Man finder at  $-2 \ln Q_{\text{obs}} = 5.67$ . I  $\chi^2$ -fordelingen med  $f = 9 - 6 = 3$  frihedsgrader er 80%-fraktilen 4.64 og 90%-fraktilen 6.25, således at testsandsynligheden er næsten 20%. De foreliggende observationer er altså udmærket forenelige med hypotesen  $H_1$  om at der ikke er nogen forskel på byerne. Sagt på en anden måde, *der er ikke nogen signifikant forskel på byerne*.

### En anden mulighed

Det er sjældent sådan at der kun er én bestemt måde at undersøge en praktisk problemstilling på ved hjælp af en statistisk model og nogle statistiske hypoteser. Det aktuelle spørgsmål om der er en øget risiko for lungekræft ved at bo i Fredericia, blev i forrige afsnit belyst ved at vi testede hypotesen  $H_1$  om ens byparametre. Det viste sig at  $H_1$  kunne accepteres, og man kan således sige at der ikke er nogen signifikant forskel på de fire byer.

Nu kunne man imidlertid angribe problemet på en anden måde. Man kunne sige at det hele drejer sig om at vurdere om det er farligere at bo i Fredericia end i de øvrige byer. Dermed er det indirekte forudsat at de tre øvrige byer stort set er ens, hvilket man kan og bør teste. Man kunne derfor anlægge følgende strategi for formulering og test af hypoteser:

1. Vi benytter stadig den multiplikative poissonmodel  $H_0$  som grundmodel.

2. Først undersøges om det kan antages at de tre byer Horsens, Kolding og Vejle er ens, dvs. vi tester hypotesen

$$H_2 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4.$$

3. Hvis  $H_2$  bliver accepteret, er der et fælles niveau  $\beta$  for de tre »kontrolbyer«. Vi kan derefter sammenligne Fredericia med dette fælles niveau ved at teste om  $\beta_1 = \beta$ . Da  $\beta_1$  pr. definition er lig 1, er den hypotese der skal testes,

$$H_3 : \beta = 1.$$

### Sammenligning af de tre kontrolbyer

Vi skal teste hypotesen  $H_2 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$  om ens kontrolbyer i forhold til den multiplikative model  $H_0$ . Det gøres med teststørrelsen

$$Q = \frac{L_2(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_6, \tilde{\beta})}{L_0(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_6, 1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_4)}$$

hvor  $L_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6, \beta) = L_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6, 1, \beta, \beta, \beta)$  er likelihoodfunktionen under  $H_2$ , og  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_6, \tilde{\beta}$  er maksimaliseringsestimaterne under  $H_2$ .

Når  $H_2$  er rigtig, er  $-2 \ln Q$  approksimativt  $\chi^2$ -fordelt med  $f = 9 - 7 = 2$  frihedsgrader.

Modellen  $H_2$  svarer til en multiplikativ poissonmodel med to byer (nemlig Fredericia og resten) og seks aldersklasser, og der er derfor ingen principielt nye problemer forbundet med at estimere parametrene under  $H_2$ . Man finder

$$\begin{array}{lll} \tilde{\alpha}_1 = 0.00358 & \tilde{\alpha}_4 = 0.0210 & \tilde{\beta}_1 = 1 \\ \tilde{\alpha}_2 = 0.0108 & \tilde{\alpha}_5 = 0.0230 & \tilde{\beta} = 0.7220 \\ \tilde{\alpha}_3 = 0.0164 & \tilde{\alpha}_6 = 0.0148 & \end{array}$$

Endvidere bliver

$$-2 \ln Q = 2 \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 y_{ij} \ln \frac{\hat{y}_{ij}}{\tilde{y}_{ij}}$$

hvor  $\hat{y}_{ij} = \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j r_{ij}$ , se tabel 9.5, og

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{i1} &= \tilde{\alpha}_i r_{i1} \\ \tilde{y}_{ij} &= \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta} r_{ij}, \quad j = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

De forventede antal  $\tilde{y}_{ij}$  ses i tabel 9.7. Man finder at  $-2 \ln Q_{\text{obs}} = 0.40$ ; denne værdi skal sammenholdes med  $\chi^2$ -fordelingen med  $f = 9 - 7 = 2$  frihedsgrader. I denne fordeling er 20%-fraktilen 0.446, så testsandsynligheden er altså godt 80%, og det betyder at  $H_2$  er udmærket forenelig med de foreliggende data. Vi kan altså sagtens tillade os at gå ud fra at der ikke er nogen signifikant forskel mellem de tre byer.



Tabel 9.7 De forventede antal  $\tilde{y}_{ij}$  af lungekræfttilfælde under  $H_2$ .

| aldersklasse | Fredericia | Horsens | Kolding | Vejle | i alt  |
|--------------|------------|---------|---------|-------|--------|
| 40-54        | 10.95      | 7.44    | 8.12    | 6.51  | 33.02  |
| 55-59        | 8.64       | 8.44    | 8.19    | 6.85  | 32.12  |
| 60-64        | 11.64      | 10.93   | 10.60   | 9.93  | 43.10  |
| 65-69        | 12.20      | 12.65   | 10.64   | 9.57  | 45.06  |
| 70-74        | 11.71      | 10.53   | 8.88    | 8.95  | 40.07  |
| 75+          | 8.95       | 8.36    | 7.04    | 6.61  | 30.96  |
| i alt        | 64.09      | 58.35   | 53.47   | 48.42 | 224.33 |

Herefter kan vi gå over til at teste  $H_3$ , der siger at alle fire byer er ens, og at der er de seks forskellige aldersgrupper med hver sin parameter  $\alpha_i$ . Under forudsætning af  $H_2$  er  $H_3$  identisk med hypotesen  $H_1$  fra tidligere, så estimererne over aldersparametrene er  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_6$  fra side 139.

I denne omgang skal vi teste  $H_3 (= H_1)$  i forhold til den nu gældende grundmodel  $H_2$ . Teststørrelsen er  $-2 \ln Q$  hvor

$$Q = \frac{L_1(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_6)}{L_2(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_6, \tilde{\beta})} = \frac{L_0(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_6, 1, 1, 1, 1)}{L_0(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_6, 1, \tilde{\beta}, \tilde{\beta}, \tilde{\beta})}$$

der let omformes til

$$Q = \prod_{i=1}^6 \prod_{j=1}^4 \left( \frac{\hat{y}_{ij}}{\tilde{y}_{ij}} \right)^{y_{ij}}$$

så at

$$-2 \ln Q = 2 \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 y_{ij} \ln \frac{\hat{y}_{ij}}{\tilde{y}_{ij}}.$$

Store værdier af  $-2 \ln Q$  er signifikante. Når  $H_3$  er rigtig, er  $-2 \ln Q$  approksimativt  $\chi^2$ -fordelt med  $f = 7 - 6 = 1$  frihedsgrad (forudsat at alle de indgående forventede antal er mindst fem).

Ved at indsætte værdierne fra tabel 9.2, tabel 9.6 og tabel 9.7 i det seneste udtryk for  $-2 \ln Q$  fås  $-2 \ln Q_{\text{obs}} = 5.27$ . I  $\chi^2$ -fordelingen med 1 frihedsgrad er 97.5%-fraktilen 5.02 og 99%-fraktilen 6.63, så testsandsynligheden er omkring 2%. På det grundlag vil man almindeligvis forkaste hypotesen  $H_3 (= H_1)$ . Konklusionen bliver altså at *der ikke er signifikant forskel på lungekræfthypigheden i de tre byer Horsens, Kolding og Vejle, hvorimod Fredericia har en signifikant anderledes lungekræfthypighed.*

Den relative lungekræfthypighed i de tre ens byer i forhold til Fredericia estimeres til  $\tilde{\beta} = 0.7$ , så lungekræfthypigheden i Fredericia er altså signifikant større end i kontrolbyerne.

Se det var jo en pæn og klar konklusion, der blot er stik modsat den vi nåede frem til på side 140!

| Model/Hypotese                                  | $-2 \ln Q$ | $f$           | $\varepsilon$ |
|-------------------------------------------------|------------|---------------|---------------|
| M: vilkårlige parametre<br>H: multiplikativitet | 22.65      | $24 - 9 = 15$ | godt 5%       |
| M: multiplikativitet<br>H: fire ens byer        | 5.67       | $9 - 6 = 3$   | ca. 20%       |

*Oversigt over den første fremgangsmåde.*

| Model/Hypotese                                  | $-2 \ln Q$ | $f$           | $\varepsilon$ |
|-------------------------------------------------|------------|---------------|---------------|
| M: vilkårlige parametre<br>H: multiplikativitet | 22.65      | $24 - 9 = 15$ | godt 5%       |
| M: multiplikativitet<br>H: de tre byer ens      | 0.40       | $9 - 7 = 2$   | godt 80%      |
| M: de tre byer ens<br>H: de fire byer ens       | 5.27       | $7 - 6 = 1$   | ca. 2%        |

*Oversigt over den anden fremgangsmåde.*

### Sammenligning af de to fremgangsmåder

Vi har benyttet to fremgangsmåder der kun var en smule forskellige, men gav helt modsatte resultater. De to fremgangsmåder er begge opbygget over følgende skema:

1. Find en passende grundmodel.
2. Formuler en hypotese der giver en forsimpning af den aktuelle grundmodel.
3. Test hypotesen i forhold til den aktuelle grundmodel.
4.
  - a) Hvis hypotesen accepteres, har vi derved fået en ny aktuel grundmodel (nemlig den gamle med de simplifikationer som den accepterede hypotese giver). Fortsæt med punkt 2
  - b) Hvis hypotesen forkastes, så slut. Data beskrives da ved den senest anvendte grundmodel.

Begge de anvendte fremgangsmåder tager udgangspunkt i den samme poisson-model, de adskiller sig udelukkende ved valgene af hypoteser i punkt 2. I den første fremgangsmåde tages skridtet fra den multiplikative model til »fire ens« på én gang, hvilket giver en teststørrelse på 5.67, som, da den kan fordeles på 3 frihedsgrader, ikke er signifikant. I den anden fremgangsmåde spalter vi op i de to skridt »multiplikativitet  $\rightarrow$  tre ens« og »tre ens  $\rightarrow$  fire ens«, og det viser sig da at de 5.67 med 3 frihedsgrader spaltes op i 0.40 med 2 frihedsgrader og 5.27 med 1 frihedsgrad, hvoraf den sidste er temmelig signifikant.

Det kan undertiden være hensigtsmæssigt at foretage en sådan trinvis testning. Man bør dog ikke stræbe efter at spalte op i så mange tests som muligt, men kun teste hypoteser der er rimelige i den foreliggende faglige sammenhæng.

Tabel 9.8 Fordelingen af 647 kvinder efter antallet  $y$  af ulykkestilfælde i en fem ugers periode (fra Greenwood and Yule (1920)).

| $y$ | antal kvinder<br>med $y$ ulykker |
|-----|----------------------------------|
| 0   | 447                              |
| 1   | 132                              |
| 2   | 42                               |
| 3   | 21                               |
| 4   | 3                                |
| 5   | 2                                |
| 6+  | 0                                |
|     | 647                              |

### Om teststørrelser

Læseren vil måske have bemærket visse fælles træk ved de  $-2 \ln Q$ -udtryk der forekommer i afsnittene 9.1 og 9.2. De er alle af formen

$$-2 \ln Q = 2 \sum \text{obs. antal} \cdot \ln \frac{\text{modellens forventede antal}}{\text{hypotesens forventede antal}}$$

og er (tilnærmelsesvis)  $\chi^2$ -fordelt med et antal frihedsgrader som er »antal frie parametre under modellen« minus »antal frie parametre under hypotesen«. Dette gælder faktisk helt generelt når man tester hypoteser om poissonfordelte observationer (dog under forudsætning af at summen af de forventede antal er lig summen af de observerede antal).

### 9.3 Ulykker på en granatfabrik

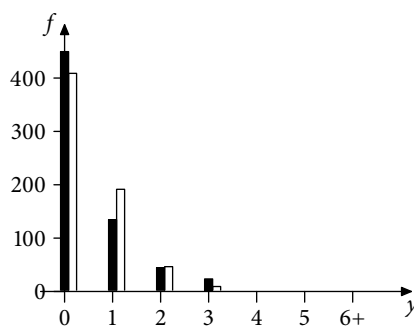
I dette eksempel virker det oplagt at forsøge sig med en poissonfordelingsmodel. Det viser sig imidlertid at den ikke passer særlig godt, så man må finde på noget andet.

#### Situationen

Man har undersøgt hvor mange ulykkestilfælde hver enkelt arbejder på en granatfabrik i England kom ud for i løbet af en fem ugers periode. Det hele foregik under første verdenskrig, så de pågældende arbejdere var kvinder (mens mændene var soldater). I tabel 9.8 ses fordelingen af  $n = 647$  kvinder efter antallet  $y$  af ulykkestilfælde i en fem ugers periode. Man søger en statistisk model der kan beskrive dette talmateriale. (Eksemplet stammer fra Greenwood and Yule (1920) og er her i landet især kendt via sin forekomst i Hald (1948, 1968) der gennem mere end en menneskealder har været en toneangivende dansk lærebog i statistik.)

Lad  $y_i$  betegne antal ulykker som kvinde nr.  $i$  kommer ud for. Vi benytter betegnelsen  $f_y$  for antallet af kvinder der har været ude for netop  $y$  ulykker, dvs. i det foreliggende tilfælde er  $f_0 = 447$ ,  $f_1 = 132$ , osv. Det samlede antal ulykker er

| $y$ | $f_y$ | $\hat{f}_y$ |
|-----|-------|-------------|
| 0   | 447   | 406.3       |
| 1   | 132   | 189.0       |
| 2   | 42    | 44.0        |
| 3   | 21    | 6.8         |
| 4   | 3     | 0.8         |
| 5   | 2     | 0.1         |
| 6+  | 0     | 0.0         |
|     | 647   | 647.0       |



Tabel 9.9 Model 1: Tabel og graf med de observerede antal  $f_y$  (sorte søjler) og de forventede antal  $\hat{f}_y$  (hvide søjler).

$$0f_0 + 1f_1 + 2f_2 + \dots = \sum_{y=0}^{\infty} yf_y = 301.$$

Vi går ud fra at  $y_i$  er observation af en stokastisk variabel  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , og vi vil antage at de stokastiske variable  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  er indbyrdes uafhængige, omend dette måske er en lidt diskutabel antagelse.

### Model 1

I første omgang kan man forsøge sig med en model gående ud på at  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  er uafhængige og identisk poissonfordelte med parameter  $\mu$ , dvs.

$$P(Y_i = y) = \frac{\mu^y}{y!} \exp(-\mu).$$

Poissonfordelingen kommer ind i billedet ud fra en forestilling om at ulykkerne sker »helt tilfældigt«, og man kan sige at parameteren  $\mu$  beskriver kvindernes »ulykkestilbøjelighed«.

Poissonparameteren  $\mu$  estimeres ved  $\hat{\mu} = \bar{y} = 301/647 = 0.465$  (der sker 0.465 ulykker pr. kvinde pr. fem uger). Det forventede antal kvinder med  $y$  ulykker er  $\hat{f}_y = n \frac{\hat{\mu}^y}{y!} \exp(-\hat{\mu})$ ; værdierne heraf ses i tabel 9.9. Der er tilsyneladende ikke nogen særlig god overensstemmelse mellem de observerede og de forventede antal. Man kan udregne det centrale variansestimater  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (y_i - \bar{y})^2$  til  $s^2 = 0.692$ , og det er næsten halvanden gange  $\bar{y}$ ; da poissonfordelingen har den egenskab at middelværdien er lig variansen, har vi således endnu et tegn på at poissonmodellen er dårlig. Man må derfor overveje en anden model.

### Model 2

Man kan udvide model 1 på følgende måde:

- Det antages stadig at  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  er uafhængige og poissonfordelte, men nu tillader vi at de har hver sin middelværdi, så nu er  $Y_i$  poissonfordelt med parameter  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Hvis modelopstillingen gjorde holdt her, ville der være en parameter for hver person; derved kunne man få et perfekt fit (med  $\hat{\mu}_i = y_i$ ,  $i =$

$1, 2, \dots, n$ ), men man ville i høj grad være i strid med Fisher's maksime om at statistikens formål er datareduktion (jf. side 90). Men der endnu et trin i modelopbygningen:

- Det antages endvidere at  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  er uafhængige observationer fra en og samme sandsynlighedsfordeling. Denne sandsynlighedsfordeling skal være en kontinuert fordeling på den positive halvakse, og det viser sig bekvemt at benytte en gammafordeling med, lad os sige, formparameter  $\kappa$  og skalaparameter  $\beta$ , altså med tæthedsfunktion

$$g(\mu) = \frac{1}{\Gamma(\kappa)\beta^\kappa} \mu^{\kappa-1} \exp(-\mu/\beta), \quad \mu > 0.$$

- Den betingede sandsynlighed for at en kvinde kommer ud for netop  $y$  ulykker, givet at hun har et bestemt  $\mu$ , er  $\frac{\mu^y}{y!} \exp(-\mu)$ . Den ubetingede sandsynlighed fås ved at blande de betingede sandsynligheder med hensyn til  $\mu$ 's fordeling:

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mu^y}{y!} \exp(-\mu) \cdot g(\mu) d\mu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\mu^y}{y!} \exp(-\mu) \frac{1}{\Gamma(\kappa)\beta^\kappa} \mu^{\kappa-1} \exp(-\mu/\beta) d\mu \\ &= \frac{\Gamma(y + \kappa)}{y! \Gamma(\kappa)} \left( \frac{1}{\beta + 1} \right)^\kappa \left( \frac{\beta}{\beta + 1} \right)^y, \end{aligned}$$

hvor det sidste lighedstegn følger af definitionen på gammafunktionen (benyt f.eks. formlen sidst i sidebemærkningen side 63). Hvis  $\kappa$  er et naturligt tal, er  $\Gamma(\kappa) = (\kappa - 1)!$ , og så er

$$\binom{y + \kappa - 1}{y} = \frac{\Gamma(y + \kappa)}{y! \Gamma(\kappa)}.$$

Her er højresiden imidlertid defineret for alle  $\kappa > 0$ , og vi kan derfor bruge ligningen som en definitionsligning der definerer symbolet på venstre side af lighedstegnet for alle  $\kappa > 0$  og alle  $y \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Idet vi desuden indfører betegnelsen  $p = 1/(\beta + 1)$ , kan vi alt i alt skrive den fundne sandsynlighed for  $y$  ulykker som

$$P(Y = y) = \binom{y + \kappa - 1}{y} p^\kappa (1 - p)^y, \quad y = 0, 1, 2, \dots \quad (9.3)$$

Vi ser at  $Y$  er *negativt binomialfordelt* med formparameter  $\kappa$  og sandsynlighedsparameter  $p = 1/(\beta + 1)$  (jf. definition 2.9 side 51).

I den negative binomialfordeling er der to parametre man kan »skrue på«, og man kan håbe at det derved er muligt at få denne model til at passe bedre til observationerne end model 1 gjorde.

I den nye model er (jf. eksempel 4.5 side 73)

$$E(Y) = \kappa(1-p)/p = \kappa\beta,$$

$$\text{Var}(Y) = \kappa(1-p)/p^2 = \kappa\beta(\beta+1).$$

Heraf ses blandt andet at variansen er  $(\beta+1)$  gange større end middelværdien. – I det foreliggende talmateriale fandt vi netop at variansen var større end middelværdien, så foreløbig kan det ikke udelukkes at den negative binomialfordelingsmodel er brugbar.

### Estimation af parametrene i Model 2

Vi benytter som altid likelihoodmetoden til estimation af de ukendte parametre. Likelihoodfunktionen er et produkt af sandsynligheder af formen (9.3):

$$\begin{aligned} L(\kappa, p) &= \prod_{i=1}^n \binom{y_i + \kappa - 1}{y_i} p^\kappa (1-p)^{y_i} \\ &= p^{n\kappa} (1-p)^{y_1 + y_2 + \dots + y_n} \prod_{i=1}^n \binom{y_i + \kappa - 1}{y_i} \\ &= \text{konst} \cdot p^{n\kappa} (1-p)^y \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (\kappa + k - 1)^{f_k + f_{k+1} + f_{k+2} + \dots} \end{aligned}$$

hvor  $f_k$  stadig betegner antal observationer som har værdien  $k$ . Logaritmen til likelihoodfunktionen bliver derfor (på nær en konstant)

$$\ln L(\kappa, p) = n\kappa \ln p + y \ln(1-p) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{j=k}^{\infty} f_j \right) \ln(\kappa + k - 1)$$

der i det konkrete eksempel antager det mere uskyldige udseende

$$\begin{aligned} \ln L(\kappa, p) &= 647\kappa \ln p + 301 \ln(1-p) \\ &\quad + 200 \ln \kappa + 68 \ln(\kappa + 1) + 26 \ln(\kappa + 2) \\ &\quad + 5 \ln(\kappa + 3) + 2 \ln(\kappa + 4). \end{aligned}$$

Denne funktion kan man let bestemme maksimum for med sædvanlige numeriske metoder til bestemmelse af ekstremumpunkter, for eksempel en generel simplexmetode. Disse numeriske metoder itererer sig frem til løsningen, og man kan finde et godt udgangspunkt for iterationen ved at løse de to ligninger

$$\text{teoretisk middelværdi} = \text{empirisk middelværdi}$$

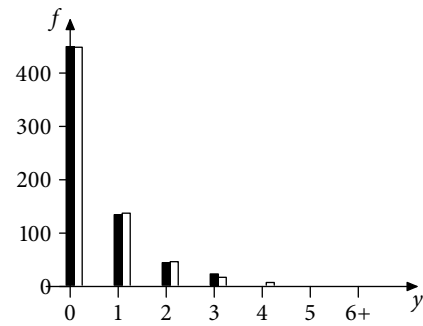
$$\text{teoretisk varians} = \text{empirisk varians}$$

der i det foreliggende tilfælde bliver  $\kappa\beta = 0.465$  og  $\kappa\beta(\beta+1) = 0.692$ , hvor  $\beta = (1-p)/p$ . Ligningerne har løsningen  $(\tilde{\kappa}, \tilde{p}) = (0.953, 0.672)$  (og dermed  $\tilde{\beta} = 0.488$ ). De fundne værdier benyttes som startværdier i en iteration der leder frem til likelihoodfunktionens maksimumspunkt; man finder estimatorne

$$\begin{aligned} \hat{\kappa} &= 0.8651 \\ \hat{p} &= 0.6503 \quad (\text{og dermed } \hat{\beta} = 0.5378). \end{aligned}$$

Tabel 9.10 Model 2: Tabel og graf med de observerede antal  $f_y$  (sorte søjler) og forventede antal  $\widehat{\widehat{f}}_y$  (hvide søjler).

| $y$ | $f_y$ | $\widehat{\widehat{f}}_y$ |
|-----|-------|---------------------------|
| 0   | 447   | 445.9                     |
| 1   | 132   | 134.9                     |
| 2   | 42    | 44.0                      |
| 3   | 21    | 14.7                      |
| 4   | 3     | 5.0                       |
| 5   | 2     | 1.7                       |
| 6+  | 0     | 0.9                       |
|     | 647   | 647.1                     |



I tabel 9.10 ses de tilsvarende forventede antal

$$\widehat{\widehat{f}}_y = n \binom{y + \widehat{\kappa} - 1}{y} \widehat{p}^{\widehat{\kappa}} (1 - \widehat{p})^y$$

beregnet ud fra den estimerede negative binomialfordeling. På baggrund heraf tillader vi os at konkludere at den negative binomialfordelingsmodel beskriver observationerne godt nok.

## 10 Den flerdimensionale normalfordeling

STATISTISKE MODELLER for normalfordelte observationer kan, som vi skal se i kapitel 11, formuleres meget overskueligt og elegant ved brug af terminologi fra lineær algebra, og bestemmelse af estimatorer og teststørrelser og udledning af deres fordelinger kan med stor fordel foregå inden for disse rammer.

Inden vi for alvor kan gå i gang med normalfordelingsmodellerne, er der nogle forberedende ting der skal overstås, og undervejs vil læseren måske have glæde af at se i tillægget om lineær algebra (side 185ff). I afsnit 10.1 præciseres enkelte ting i forbindelse med flerdimensionale fordelinger, blandt andet om middelværdi og varians. Derefter (i afsnit 10.2) skal vi definere den flerdimensionale normalfordeling, hvilket viser sig at være besværligere end man måske umiddelbart skulle tro.

### 10.1 Flerdimensionale stokastiske variable

En  $n$ -dimensional stokastisk variabel  $\mathbf{X}$  kan opfattes som et sæt bestående af  $n$  endimensionale stokastiske variable, eller som en stokastisk vektor (i vektorrummet  $V = \mathbb{R}^n$ ) hvis koordinater i standardkoordinatsystemet er  $n$  endimensionale stokastiske variable. *Middelværdien* af den  $n$ -dimensionale stokastiske variabel

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \text{ er vektoren } E\mathbf{X} = \begin{bmatrix} E X_1 \\ E X_2 \\ \vdots \\ E X_n \end{bmatrix}, \text{ altså talsættet bestående af middelværdierne af de enkelte koordinater – forudsat at alle de optrædende endimensionale stokastiske variable har middelværdi.}$$

*Variansen* af  $\mathbf{X}$  er den symmetriske positivt semidefinitte  $n \times n$ -matrix  $\text{Var } \mathbf{X}$  hvis  $(i, j)$ -te element er  $\text{Cov}(X_i, X_j)$ :

$$\begin{aligned} \text{Var } \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \text{Var } X_1 & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var } X_2 & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \text{Var } X_n \end{bmatrix} \\ &= E((\mathbf{X} - E\mathbf{X})(\mathbf{X} - E\mathbf{X})'), \end{aligned}$$

forudsat at alle de optrædende endimensionale stokastiske variable har en varians.

Ud fra definitionerne viser man let



## SÆTNING 10.1

Lad  $\mathbf{X}$  være en  $n$ -dimensional stokastisk variabel, og antag at  $\mathbf{X}$  har middelværdi og varians. Hvis  $A$  er en lineær afbildning fra  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^p$  [eller  $A$  er en  $p \times n$ -matrix], og  $\mathbf{b}$  er en konstant vektor i  $\mathbb{R}^p$  [eller  $\mathbf{b}$  er en  $p \times 1$ -matrix], så er

$$E(\mathbf{AX} + \mathbf{b}) = A(E\mathbf{X}) + \mathbf{b} \quad (10.1)$$

$$\text{Var}(\mathbf{AX} + \mathbf{b}) = A(\text{Var}\mathbf{X})A'. \quad (10.2)$$

## Eksempel 10.1: Multinomialfordelingen

Multinomialfordelingen (side 95) er et eksempel på en flerdimensional fordeling. Hvis

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_r \end{bmatrix} \text{ er multinomialfordelt med parametre } n \text{ og } \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_r \end{bmatrix}, \text{ så er } E\mathbf{X} = \begin{bmatrix} np_1 \\ np_2 \\ \vdots \\ np_r \end{bmatrix} \text{ og}$$

$$\text{Var}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} np_1(1-p_1) & -np_1p_2 & \cdots & -np_1p_r \\ -np_2p_1 & np_2(1-p_2) & \cdots & -np_2p_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -np_rp_1 & -np_rp_2 & \cdots & np_r(1-p_r) \end{bmatrix}.$$

Summen af  $X$ -erne er altid  $n$ , dvs.  $\mathbf{AX} = n$ , hvor  $A$  er den lineære afbildning

$$A: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \mapsto [1 \ 1 \ \dots \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = x_1 + x_2 + \cdots + x_r,$$

Derfor er  $\text{Var}(\mathbf{AX}) = 0$ . Da  $\text{Var}(\mathbf{AX}) = A(\text{Var}\mathbf{X})A'$  (formel (10.2)), har vi her et eksempel hvor  $\text{Var}\mathbf{X}$  ikke er positivt definit (men kun positivt semidefinit).

## 10.2 Definition og egenskaber

I dette afsnit definerer vi den flerdimensionale normalfordeling og viser den flerdimensionale udgave af sætning 3.11 side 65: hvis  $\mathbf{X}$  er  $n$ -dimensionalt normalfordelt med parametre  $\boldsymbol{\mu}$  og  $\Sigma$ , og hvis  $A$  er en  $p \times n$ -matrix og  $\mathbf{b}$  en  $p \times 1$ -matrix, så er  $\mathbf{AX} + \mathbf{b}$   $p$ -dimensionalt normalfordelt med parametre  $A\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}$  og  $A\Sigma A'$ . Det er imidlertid ikke helt trivielt at definere den  $n$ -dimensionale normalfordeling med parametre  $\boldsymbol{\mu}$  og  $\Sigma$  i det tilfælde hvor  $\Sigma$  ikke er regulær. Derfor går vi frem i en række skridt.

DEFINITION 10.1:  $n$ -DIMENSIONAL STANDARDNORMALFORDELING

Den  $n$ -dimensionale standardnormalfordeling er den  $n$ -dimensionale kontinuerte fordeling som har tæthedsfunktion

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (10.3)$$

Bemærkninger til definitionen:

1. For  $n = 1$  stemmer definitionen overens med den tidligere definition af standardnormalfordeling (definition 3.9 side 65).

2. Den  $n$ -dimensionale stokastiske variabel  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$  er  $n$ -dimensionalt

standardnormalfordelt hvis og kun hvis  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uafhængige og endimensionalt standardnormalfordelte. Det følger af at

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2\right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_i^2\right)$$

(jf. sætning 3.2 side 59).

3. Hvis  $\mathbf{X}$  er standardnormalfordelt, så er  $E \mathbf{X} = \mathbf{0}$  og  $\text{Var } \mathbf{X} = \mathbf{I}$ ; det følger af punkt 2.

#### SÆTNING 10.2

Hvis  $A$  er en isometrisk lineær afbildning af  $\mathbb{R}^n$  ind i sig selv, og  $\mathbf{X}$  er  $n$ -dimensionalt standardnormalfordelt, så bliver  $A\mathbf{X}$  igen  $n$ -dimensionalt standardnormalfordelt.

#### BEVIS

Ifølge sætningen om transformation af tætheder (sætning 3.5 side 60) har  $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$  tæthedsfunktionen  $f(A^{-1}\mathbf{y}) |\det A^{-1}|$  hvor  $f$  er givet ved (10.3). Da  $f$  kun afhænger af  $\mathbf{x}$  gennem  $\|\mathbf{x}\|$ , og da  $\|A^{-1}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{y}\|$  fordi  $A$  er en isometri, er  $f(A^{-1}\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})$ ; desuden er  $\det A^{-1} = 1$ , igen fordi  $A$  er en isometri. Altså er  $f(A^{-1}\mathbf{y}) |\det A^{-1}| = f(\mathbf{y})$ .  $\square$

#### KOROLLAR 10.3

Hvis  $\mathbf{X}$  er  $n$ -dimensionalt standardnormalfordelt og  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  er en ortonormalbasis for  $\mathbb{R}^n$ , så er  $\mathbf{X}$ 's koordinater  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i denne basis uafhængige og endimensionalt standardnormalfordelte.

Koordinaterne for  $\mathbf{X}$  i basen  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  er som bekendt  $X_i = \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_i \rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

#### BEVIS

Da koordinattransformationsmatricen er en isometri, følger påstanden af sætning 10.2 og bemærkning 2 til definition 10.1.  $\square$

#### DEFINITION 10.2: REGULÆR NORMALFORDELING

Antag at  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$  og at  $\Sigma$  er en positivt definit lineær afbildning af  $\mathbb{R}^n$  ind i sig selv [eller at  $\boldsymbol{\mu}$  er en  $n$ -dimensional søjlevektor og  $\Sigma$  en positivt definit  $n \times n$ -matrix].

Den  $n$ -dimensionale regulære normalfordeling med middelværdi  $\boldsymbol{\mu}$  og varians  $\Sigma$  er den  $n$ -dimensionale kontinuerte fordeling hvis tæthedsfunktion er

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det \Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Bemærkninger til definitionen:

1. For  $n = 1$  fås den sædvanlige (endimensionale) normalfordeling med middelværdi  $\mu$  og varians  $\sigma^2$  (= det ene element i  $\Sigma$ ).
2. Hvis  $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ , reducerer tæthedsfunktionen til

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Med andre ord er  $\mathbf{X}$   $n$ -dimensionalt regulært normalfordelt med parametre  $\boldsymbol{\mu}$  og  $\sigma^2 \mathbf{I}$ , hvis og kun hvis  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uafhængige og endimensionalt normalfordelte sådan at  $X_i$  har middelværdi  $\mu_i$  og varians  $\sigma^2$ .

3. Definitionen omtaler rask væk parametrene  $\boldsymbol{\mu}$  og  $\Sigma$  som middelværdi og varians. Strengt taget burde man i første omgang have givet dem nogle neutrale navne og sidenhen vise at de faktisk er henholdsvis middelværdi og varians.

Man kan vise at de virkelig er middelværdi og varians: Ifølge bemærkning 3 til definition 10.1 er påstanden rigtig når  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  og  $\Sigma = \mathbf{I}$ . I det generelle tilfælde ser vi på  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \Sigma^{1/2} \mathbf{U}$ , hvor  $\mathbf{U}$  er  $n$ -dimensionalt standardnormalfordelt og  $\Sigma^{1/2}$  er som i sætning B.5 side 186 (med  $A = \Sigma$ ). Ifølge nedenstående sætning 10.4 er  $\mathbf{X}$  regulært normalfordelt med parametre  $\boldsymbol{\mu}$  og  $\Sigma$ , og ifølge sætning 10.1 er  $E \mathbf{X} = \boldsymbol{\mu}$  og  $\text{Var } \mathbf{X} = \Sigma$ .

#### SÆTNING 10.4

Hvis  $\mathbf{X}$  er  $n$ -dimensionalt regulært normalfordelt med parametre  $\boldsymbol{\mu}$  og  $\Sigma$ , hvis  $A$  er en bijektiv lineær afbildning af  $\mathbb{R}^n$  ind i sig selv, og hvis  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  er en konstant vektor, så er  $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \mathbf{b}$   $n$ -dimensionalt regulært normalfordelt med parametre  $A\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}$  og  $A\Sigma A'$ .

#### BEVIS

Ifølge sætningen om transformation af tætheder (sætning 3.5 side 60) har  $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \mathbf{b}$  tæthedsfunktionen  $f_Y(\mathbf{y}) = f(A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})) |\det A^{-1}|$  hvor  $f$  er som i definition 10.2. Ved almindelig udregning fås dette til

$$\begin{aligned} f_Y(\mathbf{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det \Sigma|^{1/2} |\det A|} \exp\left(-\frac{1}{2} (A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\mu})\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det(A\Sigma A')|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - (A\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}))' (A\Sigma A')^{-1} (\mathbf{y} - (A\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}))\right) \end{aligned}$$

som ønsket. □

#### Eksempel 10.2

Lad os prøve med et simpelt eksempel med  $n = 2$ . Antag at  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$  er todimensionalt regulært normalfordelt med parametre  $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$  og  $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Vi vil finde fordelingen af  $\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + X_2 \\ X_1 - X_2 \end{bmatrix}$ , dvs.  $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$  hvor  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

Ifølge sætning 10.4 er  $Y$  todimensionalt regulært normalfordelt med  $EY = \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_1 - \mu_2 \end{bmatrix}$  og varians  $\sigma^2 AA' = 2\sigma^2 I$ , dvs.  $X_1 + X_2$  og  $X_1 - X_2$  er uafhængige og normalfordelte med middelværdi hhv.  $\mu_1 + \mu_2$  og  $\mu_1 - \mu_2$ , og med samme varians  $2\sigma^2$ .

Vi vil definere den generelle  $n$ -dimensionale normalfordeling på følgende måde:

**DEFINITION 10.3:** DEN  $n$ -DIMENSIONALE NORMALFORDELING

Antag at  $\mu \in \mathbb{R}^n$  og at  $\Sigma$  er en positivt semidefinit lineær afbildning af  $\mathbb{R}^n$  ind i sig selv [eller  $\mu$  er en  $n$ -dimensional søjlevektor og  $\Sigma$  en positivt semidefinit  $n \times n$ -matrix]. Lad  $p$  betegne rangen af  $\Sigma$ .

Den  $n$ -dimensionale normalfordeling med middelværdi  $\mu$  og varians  $\Sigma$  er fordelingen af  $\mu + BU$  hvor  $U$  er  $p$ -dimensionalt standardnormalfordelt og  $B$  er en injektiv lineær afbildning af  $\mathbb{R}^p$  ind i  $\mathbb{R}^n$  sådan at  $BB' = \Sigma$ .

Bemærkninger:

1. Vi ved fra sætning B.6 side 187 at der altid findes et  $B$  med de omtalte egenskaber, og at  $B$  er entydigt bestemt på nær isometri. Da standardnormalfordelingen er invariant ved isometrier (sætning 10.2), følger det nu at fordelingen af  $\mu + BU$  ikke afhænger af hvordan man har valgt  $B$ , blot  $B$  er injektiv og  $BB' = \Sigma$ .
2. Definitionen generaliserer definition 10.2; det følger af sætning 10.4.

**SÆTNING 10.5**

Hvis  $X$  er  $n$ -dimensionalt normalfordelt med parametre  $\mu$  og varians  $\Sigma$ , og hvis  $A$  er en lineær afbildning af  $\mathbb{R}^n$  ind i  $\mathbb{R}^m$ , så er  $Y = AX$   $m$ -dimensionalt normalfordelt med parametre  $A\mu$  og  $A\Sigma A'$ .

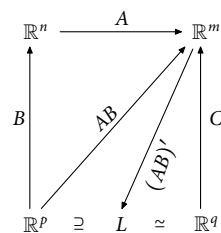
**BEVIS**

Lad os sige at  $X = \mu + BU$  hvor  $U$  er  $p$ -dimensionalt standardnormalfordelt og  $B$  er en injektiv lineær afbildning af  $\mathbb{R}^p$  ind i  $\mathbb{R}^n$ . Så er  $Y = A\mu + ABU$ . Det vi skal vise, er at  $ABU$  har samme fordeling som  $CV$ , hvor  $C$  er en velvalgt injektiv lineær afbildning af  $\mathbb{R}^q$  ind i  $\mathbb{R}^m$ , og  $V$  er  $q$ -dimensionalt standardnormalfordelt; her er  $q$  rangen af  $AB$ .

Vi sætter  $L = \mathcal{R}((AB)')$ , altså billedrummet for  $(AB)'$ , og vi sætter  $q = \dim L$ . Ideen i beviset er at vi som  $C$  kan bruge restriktionen af  $AB$  til  $L \simeq \mathbb{R}^q$ . Ifølge sætning B.1 side 185 er  $L$  det ortogonale komplement til  $\mathcal{N}(AB)$ , nulrummet for  $AB$  (hvoraf følger at restriktionen af  $AB$  til  $L$  er injektiv). Vi kan derfor vælge en ortonormalbasis  $e_1, e_2, \dots, e_p$  for  $\mathbb{R}^p$  sådan at  $e_1, e_2, \dots, e_q$  er en basis for  $L$ , og resten af  $e$ -erne er en basis for  $\mathcal{N}(AB)$ . Lad  $U_1, U_2, \dots, U_p$  betegne  $U$ 's koordinater i forhold til denne basis, altså  $U_i = \langle U, e_i \rangle$ . Da  $e_{q+1}, e_{q+2}, \dots, e_p \in \mathcal{N}(AB)$ , er

$$ABU = AB \sum_{i=1}^p U_i e_i = \sum_{i=1}^q U_i AB e_i.$$

Ifølge korollar 10.3 er  $U_1, U_2, \dots, U_p$  endimensionalt standardnormalfordelte; derfor er også  $U_1, U_2, \dots, U_q$  uafhængige endimensionalt standardnormalfordelte, så hvis vi definerer  $V$  til at være den  $q$ -dimensionale stokastiske variabel som



består af koordinaterne  $U_1, U_2, \dots, U_q$ , så er  $V$   $q$ -dimensionalt standardnormalfordelt.

Hvis vi definerer den lineære afbildning  $C$  af  $\mathbb{R}^q$  ind i  $\mathbb{R}^n$  som den afbildning der afbilder  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_q \end{bmatrix}$  over i  $\sum_{i=1}^q v_i A \mathbf{e}_i$ , har vi nu angivet et  $V$  og et  $C$  med de ønskede egenskaber.  $\square$

#### SÆTNING 10.6: SPALTNINGSSÆTNINGEN

Antag at  $\mathbf{X}$  er  $n$ -dimensionalt normalfordelt med middelværdi  $\mathbf{0}$  og varians  $\sigma^2 \mathbf{I}$ . Hvis  $\mathbb{R}^n = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$  er en ortogonal opspaltning og  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k$  de tilhørende projektktioner, så er de stokastiske variable  $\mathbf{p}_1 \mathbf{X}, \mathbf{p}_2 \mathbf{X}, \dots, \mathbf{p}_k \mathbf{X}$  uafhængige;  $\mathbf{p}_j \mathbf{X}$  er  $n$ -dimensionalt normalfordelt med middelværdi  $\mathbf{0}$  og varians  $\sigma^2 \mathbf{p}_j$ , og  $\|\mathbf{p}_j \mathbf{X}\|^2$  er  $\chi^2$ -fordelt med skalaparameter  $\sigma^2$  og  $f_j = \dim L_j$  frihedsgrader.

#### BEVIS

Det er nok at se på tilfældet  $\sigma^2 = 1$ . – Man kan vælge en ortonormalbasis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  hvor hver basisvektor ligger i et af underrummene  $L_i$ . De stokastiske variable  $X_i = \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_i \rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , er uafhængige endimensionalt standardnormalfordelte ifølge korollar 10.3. Projektionen  $\mathbf{p}_j \mathbf{X}$  af  $\mathbf{X}$  på  $L_j$  er summen af led af formen  $X_i \mathbf{e}_i$  hvor der summeres over alle  $i$  for hvilke  $\mathbf{e}_i \in L_j$ , dvs.  $f_j$  led. Derved bliver  $\mathbf{p}_j \mathbf{X}$  iht. definition 10.3  $n$ -dimensionalt normalfordelt med de påståede parametre. Da de enkelte  $\mathbf{p}_j \mathbf{X}$ -er er funktioner af hver deres  $X_i$ -er, bliver de uafhængige af hinanden. Da  $\|\mathbf{p}_j \mathbf{X}\|^2$  er summen af de  $f_j$   $X_i^2$ -er for hvilke  $\mathbf{e}_i \in L_j$ , er den  $\chi^2$ -fordelt med  $f_j$  frihedsgrader (sætning 3.13 side 66).  $\square$

## 10.3 Opgaver

### Opgave 10.1

På side 149 hævdes det at  $\text{Var } \mathbf{X}$  er positivt semidefinit. Vis at dette faktisk er tilfældet. – Tip: Benyt regnereglerne for kovarianser (sætning 1.30 side 35 – sætningen er rigtig for alle typer reelle stokastiske variable med varians) til at vise at  $\text{Var}(\mathbf{a}' \mathbf{X} \mathbf{a}) = \mathbf{a}' (\text{Var } \mathbf{X}) \mathbf{a}$  hvor  $\mathbf{a}$  er en  $n \times 1$ -matrix ( $\mathbf{a}$ : en søjlevektor).

### Opgave 10.2

Udfyld detaljerne i argumentationen for bemærkning 2 til definitionen af den  $n$ -dimensionale standardnormalfordeling.

### Opgave 10.3

Antag at  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$  er todimensionalt normalfordelt. Vis at  $X_1$  og  $X_2$  er uafhængige hvis og kun hvis deres kovarians er 0. (Sammenlign med sætning 1.31 side 35 der gælder for alle slags stokastiske variable (med varians).)

### Opgave 10.4

Lad  $t$  være funktionen givet ved  $t(x) = -x$  når  $|x| < a$  og  $t(x) = x$  ellers; her er  $a$

en positiv konstant. Lad  $X_1$  være en en-dimensional standardnormalfordelt stokastisk variabel, og sæt  $X_2 = t(X_1)$ .

Er  $X_1$  og  $X_2$  uafhængige? Vis at man kan vælge  $a$  på en sådan måde at  $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ . Hvordan harmonerer det med opgave 10.3? (En lignende problemstilling behandlede i opgave 1.21.)



## 11 Lineære normale modeller

DETTE KAPITEL præsenterer de klassiske lineære normalfordelingsmodeller som variansanalyse og regressionsanalyse formuleret i lineær algebra-sprog.

### 11.1 Estimation og test, generelt

Vi vil studere den generelle lineære normale model gående ud på at  $\mathbf{y}$  er en observation af en  $n$ -dimensionalt normalfordelt stokastisk variabel  $\mathbf{Y}$  med middelværdivektor  $\boldsymbol{\mu}$  og variansmatrix  $\sigma^2 \mathbf{I}$ ; det antages at parameteren  $\boldsymbol{\mu}$  er et punkt i underrummet  $L$  af  $V = \mathbb{R}^n$ , og at  $\sigma^2 > 0$ , dvs. parameterområdet er  $L \times ]0; +\infty[$ . Modellen kaldes en *lineær normal model*, fordi middelværdien tilhører et lineært underrum  $L$ .

Likelihoodfunktionen svarende til observationen  $\mathbf{y}$  er

$$L(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2}\right), \quad \boldsymbol{\mu} \in L, \quad \sigma^2 > 0.$$

#### Estimation

Lad  $\mathbf{p}$  betegne ortogonalprojektion af  $V = \mathbb{R}^n$  på  $L$ . For et vilkårligt  $\mathbf{z} \in V$  er  $\mathbf{z} = (\mathbf{z} - \mathbf{p}\mathbf{z}) + \mathbf{p}\mathbf{z}$  hvor  $\mathbf{z} - \mathbf{p}\mathbf{z} \perp \mathbf{p}\mathbf{z}$ , og dermed er  $\|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{z} - \mathbf{p}\mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{p}\mathbf{z}\|^2$  (Pythagoras); anvendt på  $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}$  giver det at

$$\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{p}\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{p}\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}\|^2,$$

hvoraf følger at  $L(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2) \leq L(\mathbf{p}\mathbf{y}, \sigma^2)$  for ethvert  $\sigma^2$ , dvs. maksimaliseringsestimaten for  $\boldsymbol{\mu}$  er  $\mathbf{p}\mathbf{y}$ . Ved sædvanlige metoder finder man at  $L(\mathbf{p}\mathbf{y}, \sigma^2)$  maksimaliseres med hensyn til  $\sigma^2$  når  $\sigma^2$  er lig  $\frac{1}{n} \|\mathbf{y} - \mathbf{p}\mathbf{y}\|^2$ . Maksimumsværdien  $L(\mathbf{p}\mathbf{y}, \frac{1}{n} \|\mathbf{y} - \mathbf{p}\mathbf{y}\|^2)$  findes i øvrigt ved almindelige omskrivninger at være  $a_n (\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\mathbf{y}\|^2)^{-n/2}$  hvor  $a_n$  er et tal der afhænger af  $n$ , men ikke af  $\mathbf{y}$ .

Ved nu at anvende sætning 10.6 på  $\mathbf{X} = \mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}$  og den ortogonale opspaltning  $\mathbb{R} = L \oplus L^\perp$  får vi

#### SÆTNING 11.1

I den generelle lineære model gælder

- Middelværdivektoren  $\boldsymbol{\mu}$  estimeres ved  $\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{p}\mathbf{y}$ , altså projektionen af  $\mathbf{y}$  vinkelret ned på  $L$ .
- Estimatoren  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{p}\mathbf{Y}$  er  $n$ -dimensionalt normalfordelt med middelværdi  $\boldsymbol{\mu}$  og varians  $\sigma^2 \mathbf{p}$ .



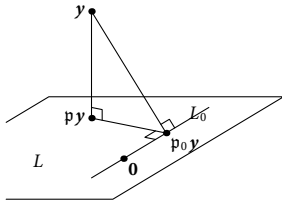
**F-FORDELINGEN**

$F$ -fordelingen med  $f_t = f_{\text{tæller}}$  og  $f_n = f_{\text{nævner}}$  frihedsgrader er den kontinuerle fordeling på  $]0; +\infty[$  som har tæthedsfunktion

$$C \frac{x^{(f_t-2)/2}}{(f_n + f_t x)^{(f_t+f_n)/2}}$$

hvor

$$C = \frac{\Gamma\left(\frac{f_t+f_n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_t}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f_n}{2}\right)} f_t^{f_t/2} f_n^{f_n/2}.$$



- Variansen  $\sigma^2$  estimeres centralt ved  $s^2 = \frac{1}{n-\dim L} \|\mathbf{y} - \mathbf{py}\|^2$ , og maksimaliseringsestimatoren for  $\sigma^2$  er  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \|\mathbf{y} - \mathbf{py}\|^2$ .
- Estimatoren  $s^2$  er  $\chi^2$ -fordelt med skalaparameter  $\sigma^2/(n-\dim L)$  og  $n-\dim L$  frihedsgrader.
- De to estimatore  $\hat{\mu}$  og  $s^2$  er stokastisk uafhængige (og de to estimatore  $\hat{\mu}$  og  $\hat{\sigma}^2$  er ligeledes stokastisk uafhængige).

Vektoren  $\mathbf{y} - \mathbf{py}$  kaldes *residualvektoren*, og størrelsen  $\|\mathbf{y} - \mathbf{py}\|^2$  kaldes *residualkvadratsummen*. Tallet  $(n - \dim L)$  er antallet af frihedsgrader for variansskønnet og/eller residualkvadratsummen. – Man kan bestemme  $\hat{\mu}$  af relationen  $\mathbf{y} - \hat{\mu} \perp L$  som i realiteten er  $\dim L$  lineære ligninger med lige så mange ubekendte; disse ligninger kaldes *normalligningerne* (de udtrykker at  $\mathbf{y} - \hat{\mu}$  er normal til  $L$ ).

**Test af hypotese om middelværdien**

Antag at der foreligger en middelværdihypotese af formen  $H_0: \mu \in L_0$  hvor  $L_0$  er et underum af  $L$ . Ifølge sætning 11.1 er maksimaliseringsestimerne for  $\mu$  og  $\sigma^2$  under  $H_0$  hhv.  $\mathbf{p}_0\mathbf{y}$  og  $\frac{1}{n-\dim L_0} \|\mathbf{y} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2$ . Kvotientteststørrelsen bliver derfor

$$Q = \frac{L(\mathbf{p}_0\mathbf{y}, \frac{1}{n} \|\mathbf{y} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2)}{L(\mathbf{py}, \frac{1}{n} \|\mathbf{y} - \mathbf{py}\|^2)} = \left( \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{py}\|^2}{\|\mathbf{y} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2} \right)^{n/2}.$$

Da  $L_0 \subseteq L$ , er  $\mathbf{py} - \mathbf{p}_0\mathbf{y} \in L$ , så  $\mathbf{y} - \mathbf{py} \perp \mathbf{py} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}$ . Ifølge Pythagoras er da  $\|\mathbf{y} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{py}\|^2 + \|\mathbf{py} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2$ . Ved hjælp heraf omskriver vi  $Q$  videre:

$$\begin{aligned} Q &= \left( \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{py}\|^2}{\|\mathbf{y} - \mathbf{py}\|^2 + \|\mathbf{py} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2} \right)^{n/2} \\ &= \left( 1 + \frac{\|\mathbf{py} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{y} - \mathbf{py}\|^2} \right)^{-n/2} = \left( 1 + \frac{\dim L - \dim L_0}{n - \dim L} F \right)^{-n/2} \end{aligned}$$

hvor

$$F = \frac{\frac{1}{\dim L - \dim L_0} \|\mathbf{py} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2}{\frac{1}{n - \dim L} \|\mathbf{y} - \mathbf{py}\|^2}$$

er den teststørrelse man i praksis benytter. – Da  $Q$  er en aftagende funktion af  $F$ , skal man forkaste for store værdier af  $F$ . Det følger af sætning 10.6 at under  $H_0$  er tælleren og nævneren i  $F$ -teststørrelsen stokastisk uafhængige og  $\chi^2$ -fordelte; tælleren er  $\chi^2$ -fordelt med skalaparameter  $\sigma^2/(\dim L - \dim L_0)$  og  $(\dim L - \dim L_0)$  frihedsgrader, og nævneren er  $\chi^2$ -fordelt med skalaparameter  $\sigma^2/(n - \dim L)$  og  $(n - \dim L)$  frihedsgrader. Fordelingen af teststørrelsen er en  $F$ -fordeling med  $(\dim L - \dim L_0)$  og  $(n - \dim L)$  frihedsgrader.

Hermed er estimations- og testproblemerne i princippet løst (og sætningerne 7.1 og 7.2 side 109/110 vist). Vi kan så gå over til at se hvordan det tager sig ud i konkrete modeller.

## 11.2 Enstikprøveproblemet

Man har observationer  $y_1, y_2, \dots, y_n$  af stokastiske variable  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  som er uafhængige og identisk (endimensionalt) normalfordelte med middelværdi  $\mu$  og varians  $\sigma^2$  hvor  $\mu \in \mathbb{R}$  og  $\sigma^2 > 0$ . Man ønsker at estimere parametrene  $\mu$  og  $\sigma^2$  og sidenhen at teste hypotesen  $H_0 : \mu = 0$ .

Vi vil opfatte  $y_i$ -erne som arrangeret i en  $n$ -dimensional vektor  $\mathbf{y}$  der opfattes som en observation af en  $n$ -dimensional stokastisk variabel  $\mathbf{Y}$  som er normalfordelt med middelværdi  $\boldsymbol{\mu}$  og varians  $\sigma^2 \mathbf{I}$ , og hvor det ifølge modellen antages at  $\boldsymbol{\mu}$  tilhører det endimensionale underrum  $L = \{\mu \mathbf{1} : \mu \in \mathbb{R}\}$  af vektorer der har den samme værdi  $\mu$  på alle pladser; her og i det følgende betegner  $\mathbf{1}$  den vektor som har værdien 1 på alle pladser.

Ifølge sætning 11.1 kan maksimaliseringsestimaten  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  findes ved at projicere  $\mathbf{y}$  vinkelret ned på  $L$ . Vi kan få en ligning til bestemmelse af  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  ved at bemærke at  $\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\mu}}$  skal stå vinkelret på enhver vektor i  $L$ , specielt på vektoren  $\mathbf{1}$ , så

$$0 = \langle \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{1} \rangle = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}) = y_{\cdot} - n\hat{\mu}$$

hvor  $y_{\cdot}$  som sædvanlig er summen af  $y_i$ -erne. Heraf ses at  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \hat{\mu} \mathbf{1}$  hvor  $\hat{\mu} = \bar{y}$ , dvs.  $\mu$  estimeres ved gennemsnittet af observationerne. Maksimaliseringsestimaten for  $\sigma^2$  er derefter

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \|\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\mu}}\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2,$$

og det centrale variansskøn er

$$s^2 = \frac{1}{n - \dim L} \|\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\mu}}\|^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

Disse estimater blev fundet på anden vis på side 108.

Vi vil herefter teste hypotesen  $H_0 : \mu = 0$  eller rettere  $\boldsymbol{\mu} \in L_0$ , hvor  $L_0 = \{\mathbf{0}\}$ . Under  $H_0$  estimeres  $\boldsymbol{\mu}$  ved projektionen af  $\mathbf{y}$  på  $L_0$ , dvs. ved  $\mathbf{0}$ . Hypotesen kan derfor testes med  $F$ -teststørrelsen

$$F = \frac{\frac{1}{1-0} \|\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{0}\|^2}{\frac{1}{n-1} \|\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\mu}}\|^2} = \frac{n \hat{\mu}^2}{s^2} = \left( \frac{\bar{y}}{\sqrt{s^2/n}} \right)^2,$$

dvs.  $F = t^2$  hvor  $t$  er den sædvanlige  $t$ -teststørrelse, jf. side 121. Man kan derfor efter behag benytte  $F$  (med 1 og  $n-1$  frihedsgrader) eller  $t$  (med  $n-1$  frihedsgrader) som teststørrelse.

Hypotesen  $\mu = 0$  er den eneste hypotese af formen  $\boldsymbol{\mu} \in L_0$  hvor  $L_0$  er et underrum af  $L$ ; men hvad gør man så hvis den interessante hypotese er af formen  $\mu = \mu_0$  hvor  $\mu_0$  ikke er 0? Svar: Træk  $\mu_0$  fra alle  $y$ -erne og benyt den netop beskrevne metode. Derved får man en  $F$ - eller  $t$ -størrelse hvor der i tælleren står  $\bar{y} - \mu_0$  i stedet for  $\bar{y}$ , alt andet er uforandret.

KRONECKERS  $\delta$   
er symbolet

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

### 11.3 Ensidede variansanalyse

Man har observationer der er delt ind i  $k$  grupper; observationerne benævnes  $y_{ij}$  hvor  $i = 1, 2, \dots, k$  er gruppenummer, og  $j = 1, 2, \dots, n_i$  nummererer observationerne inden for gruppen. Skematisk ser det sådan ud:

|            | observationer |          |          |          |          |            |
|------------|---------------|----------|----------|----------|----------|------------|
| gruppe 1   | $y_{11}$      | $y_{12}$ | $\dots$  | $y_{1j}$ | $\dots$  | $y_{1n_1}$ |
| gruppe 2   | $y_{21}$      | $y_{22}$ | $\dots$  | $y_{2j}$ | $\dots$  | $y_{2n_2}$ |
| $\vdots$   | $\vdots$      | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$   |
| gruppe $i$ | $y_{i1}$      | $y_{i2}$ | $\dots$  | $y_{ij}$ | $\dots$  | $y_{in_i}$ |
| $\vdots$   | $\vdots$      | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$   |
| gruppe $k$ | $y_{k1}$      | $y_{k2}$ | $\dots$  | $y_{kj}$ | $\dots$  | $y_{kn_k}$ |

Vi går ud fra at forskellen mellem observationerne inden for en gruppe er tilfældig, hvorimod der er en systematisk forskel mellem grupperne. Vi går endvidere ud fra at  $y_{ij}$ -erne er observerede værdier af uafhængige stokastiske variable  $Y_{ij}$ , og vi vil beskrive den tilfældige variation ved hjælp af en normalfordeling. Det skal derfor alt i alt være sådan at  $Y_{ij}$  er normalfordelt med middelværdi  $\mu_i$  og varians  $\sigma^2$ . Formuleret mere omhyggeligt: vi antager at der findes reelle tal  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  og et positivt tal  $\sigma^2$  således at  $Y_{ij}$  er normalfordelt med middelværdi  $\mu_i$  og varians  $\sigma^2$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ; desuden er alle  $Y_{ij}$ -erne uafhængige. På denne måde beskriver middelværdiparametrene  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  den systematiske variation, nemlig de enkelte gruppers niveauer, mens variansparameteren  $\sigma^2$  (samt normalfordelingen) beskriver den tilfældige variation inden for grupperne. Den tilfældige variation antages at være den samme i alle grupperne, og denne antagelse kan man undertiden teste, se afsnit 11.4.

Man ønsker at estimere parametrene  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  og  $\sigma^2$ , og man ønsker at teste hypotesen  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$  om at der ikke er forskel på de  $k$  grupper.

Vi vil opfatte  $y_{ij}$ -erne som en vektor  $\mathbf{y} \in V = \mathbb{R}^n$  hvor  $n = n_1 + \dots + n_k$  er antallet af observationer. Grundmodellen er da at  $\mathbf{y}$  er en observeret værdi af en  $n$ -dimensionalt normalfordelt stokastisk variabel  $\mathbf{Y}$  med middelværdi  $\boldsymbol{\mu}$  og varians  $\sigma^2 \mathbf{I}$  hvor  $\sigma^2 > 0$ , og hvor  $\boldsymbol{\mu}$  tilhører det underrum som man kort skriver som

$$L = \{\boldsymbol{\xi} \in V : \xi_{ij} = \mu_i\};$$

mere udførligt er  $L$  mængden af vektorer  $\boldsymbol{\xi} \in V$  for hvilke der findes et talsæt  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \in \mathbb{R}^k$  sådan at  $\xi_{ij} = \mu_i$  for alle  $i$  og  $j$ . Dimensionen af  $L$  er  $k$  (idet vi går ud fra at alle  $n_i$ -erne er større end nul).

Ifølge sætning 11.1 estimeres  $\boldsymbol{\mu}$  ved  $\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{p}\mathbf{y}$  hvor  $\mathbf{p}$  er projektionen af  $V$  på  $L$ . For at nå frem til et mere brugbart udtryk til bestemmelse af  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$  udnytter vi at der skal gælde at  $\widehat{\boldsymbol{\mu}} \in L$  og  $\mathbf{y} - \widehat{\boldsymbol{\mu}} \perp L$ , i særdeleshed skal  $\mathbf{y} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}$  stå vinkelret på de  $k$  vektorer  $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^k \in L$  som er defineret på den måde at den  $(i, j)$ -te komponent i vektoren  $\mathbf{e}^s$  er  $(\mathbf{e}^s)_{ij} = \delta_{is}$ , dvs. for  $s = 1, 2, \dots, k$  skal gælde

$$0 = \langle \mathbf{y} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{e}^s \rangle = \sum_{j=1}^{n_s} (y_{sj} - \widehat{\mu}_s) = y_{s\cdot} - n_s \widehat{\mu}_s,$$

hvoraf følger at  $\hat{\mu}_i = y_{i\cdot}/n_i = \bar{y}_i$ , dvs.  $\hat{\mu}_i$  er gennemsnittet i gruppe  $i$ .

Variansparameteren  $\sigma^2$  estimeres ved

$$s_0^2 = \frac{1}{n - \dim L} \|\mathbf{y} - \mathbf{p}\mathbf{y}\|^2 = \frac{1}{n - k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

der har  $n - k$  frihedsgrader og er stokastisk uafhængig af  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ .

Hypotesen  $H_0$  om ens grupper formuleres som  $H_0 : \boldsymbol{\mu} \in L_0$ , hvor

$$L_0 = \{\boldsymbol{\xi} \in V : \xi_{ij} = \mu\}$$

er det endimensionale underrum af vektorer hvor der står det samme på alle pladser. Fra afsnit 11.2 ved vi at projektionen af  $\mathbf{y}$  på  $L_0$  er den vektor  $\mathbf{p}_0\mathbf{y}$  hvor der på alle pladser står totalgennemsnittet  $\bar{y} = y_{\cdot\cdot}/n$ . Hypotesen  $H_0$  testes med teststørrelsen

$$F = \frac{\frac{1}{\dim L - \dim L_0} \|\mathbf{p}\mathbf{y} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2}{\frac{1}{n - \dim L} \|\mathbf{y} - \mathbf{p}\mathbf{y}\|^2} = \frac{s_1^2}{s_0^2}$$

hvor

$$\begin{aligned} s_1^2 &= \frac{1}{\dim L - \dim L_0} \|\mathbf{p}\mathbf{y} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2 \\ &= \frac{1}{k - 1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{k - 1} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \end{aligned}$$

der under  $H_0$  er  $F$ -fordelt med  $k - 1$  og  $n - k$  frihedsgrader. Man taler om at  $s_0^2$  beskriver *variationen inden for grupperne*, og at  $s_1^2$  beskriver *variationen mellem grupperne*. Teststørrelsen måler derfor variationen mellem grupper i forhold til variationen inden for grupper – heraf metodens navn: *ensidet variansanalyse*.

Hvis hypotesen accepteres, estimeres middelværdivektoren  $\boldsymbol{\mu}$  ved den vektor  $\mathbf{p}_0\mathbf{y}$  hvor der står  $\bar{y}$  på alle pladser, og variansen  $\sigma^2$  ved

$$s_{01}^2 = \frac{1}{n - \dim L_0} \|\mathbf{y} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2 = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{p}\mathbf{y} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2}{(n - \dim L) + (\dim L - \dim L_0)},$$

dvs.

$$s_{01}^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \frac{1}{n - 1} \left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \right).$$

#### Eksempel 11.1: Kvælning af hunde

I en undersøgelse af sammenhængen mellem hypoxivarighed og hypoxantinkoncentration i cerebrospinalvæsken (se en nærmere beskrivelse i eksempel 11.2 side 177) har man målt hypoxantinkoncentrationen i nogle hunde efter fire forskellige hypoxivarigheder, se tabel 11.7. Vi vil her undersøge om der er signifikant forskel på de fire grupper svarende til de fire forskellige hypoxivarigheder.

Indledningsvis udregnes forskellige hjælpestørrelser samt estimater over de ukendte parametre, se tabel 11.1. De fire middelværdiparametre estimeres således til 1.46, 5.50, 7.48

Tabel 11.1 Kvælning af hunde: Nogle hjælpestørrelser til beregningerne.

| $i$        | $n_i$ | $\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$ | $\bar{y}_i$ | $f_i$ | $\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$ | $s_i^2$ |
|------------|-------|---------------------------|-------------|-------|-------------------------------------------|---------|
| 1          | 7     | 10.2                      | 1.46        | 6     | 7.64                                      | 1.27    |
| 2          | 6     | 33.0                      | 5.50        | 5     | 14.94                                     | 2.99    |
| 3          | 5     | 37.4                      | 7.48        | 4     | 30.51                                     | 7.63    |
| 4          | 7     | 89.7                      | 12.81       | 6     | 48.23                                     | 8.04    |
| sum        | 25    | 170.3                     |             | 21    | 101.32                                    |         |
| gennemsnit |       |                           | 6.81        |       |                                           | 4.82    |

Tabel 11.2 Kvælning af hunde: Variansanalyseeskema.

$f$  står for antal frihedsgrader,  $SS$  er sum af kvadratiske afvigelser, og  $s^2 = SS/f$ .

|                                  | $f$ | $SS$   | $s^2$  | test                 |
|----------------------------------|-----|--------|--------|----------------------|
| variation inden for grupper      | 21  | 101.32 | 4.82   |                      |
| variation mellem grupper         | 3   | 465.47 | 155.16 | $155.16/4.82 = 32.2$ |
| variation omkring fælles gn.snit | 24  | 566.79 | 23.62  |                      |

og 12.81, og variansen estimeres til  $s_0^2 = 4.82$  med 21 frihedsgrader. Variansen mellem grupper estimeres til  $s_1^2 = 465.5/3 = 155.2$  med 3 frihedsgrader, så teststørrelsen for hypotesen om homogenitet mellem grupper er  $F = 155.2/4.82 = 32.2$  der er overordentlig signifikant, dvs. der er i høj grad forskel på de fire gruppers middelværdier.

Traditionelt opsummerer man udregninger og testresultater i et variansanalyseeskema, se tabel 11.2.

Variansanalysemodellen forudsætter at der er varianshomogenitet, og det kan man teste ved hjælp af Bartlett's test (afsnit 11.4). Vi indsætter  $s^2$ -værdierne fra tabel 11.1 i Bartlett's teststørrelse (11.1) og får  $B = -\left(6 \ln \frac{1.27}{4.82} + 5 \ln \frac{2.99}{4.82} + 4 \ln \frac{7.63}{4.82} + 6 \ln \frac{8.04}{4.82}\right) = 5.5$  der skal sammenlignes med  $\chi^2$ -fordelingen med  $k - 1 = 3$  frihedsgrader. Tabelopslag viser at der er over 10% chance for at få en større  $B$ -værdi end værdien 5.5 som derfor ikke er signifikant stor. Med andre ord kan vi opretholde antagelsen om varianshomogenitet.

▷ [Se også eksempel 11.2 side 177.]

### Tostikprøveproblemet, uparrede observationer

Tilfældet  $k = 2$  benævnes ikke overraskende tostikprøveproblemet. I mange lærebøger præsenterer man tostikprøveproblemet for sig selv, ofte endda før  $k$ -stikprøveproblemet. Det eneste interessante ved dette tostikprøveproblem er vel ellers at  $F$ -teststørrelsen kan skrives som  $t^2$  hvor

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)s_0^2}},$$

jf. side 123. Under  $H_0$  er  $t$   $t$ -fordelt med  $n - 2$  frihedsgrader.

### 11.4 Bartlett's test for varianshomogenitet

I normalfordelingsmodeller er det meget ofte en forudsætning at observationerne stammer fra normalfordelinger med samme varians (eller varians som er kendt på nær en ukendt faktor). I dette afsnit skal vi omtale et test der kan anvendes når man

ønsker at vurdere om et antal grupper af normalfordelte observationer kan antages at have samme varians, det vil sige vurdere om der er *varianshomogenitet*. Testet kan ikke benyttes hvis en af grupperne kun indeholder en enkelt observation, og for at man skal kunne anvende den sædvanlige  $\chi^2$ -approximation til fordelingen af  $-2 \ln Q$ , skal hver gruppe indeholde mindst seks observationer, eller rettere: i hver enkelt gruppe skal variansestimaten have mindst fem frihedsgrader.

Den generelle situation tænkes at være som i  $k$ -stikprøve-situationen (eller ensidet variansanalyse-situationen), jf. side 160, og vi ønsker altså nu at teste antagelsen om at grupperne har samme variansparameter  $\sigma^2$ .

En måde at udlede teststørrelsen på er som følger. Antag at de  $k$  grupper har hver sin middelværdiparameter og hver sin variansparameter, dvs. normalfordelingen hørende til gruppe  $i$  har middelværdi  $\mu_i$  og varians  $\sigma_i^2$ . Variansparameterne estimeres i henhold til det tidligere centralt ved  $s_i^2 = \frac{1}{f_i} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$ , hvor  $f_i = n_i - 1$  er antallet af frihedsgrader for variansskønnet, og  $n_i$  er antal observationer i gruppe  $i$ . Ifølge sætning 7.1 side 109 er  $s_i^2$  gammafordelt med formparameter  $f_i/2$  og skalaparameter  $2\sigma_i^2/f_i$ . Lad os derfor se på følgende statistiske problem: Antag at  $s_1^2, s_2^2, \dots, s_k^2$  er uafhængige observationer fra gammafordelinger således at  $s_i^2$  stammer fra gammafordelingen med formparameter  $f_i/2$  og skalaparameter  $2\sigma_i^2/f_i$  hvor  $f_i$  er et kendt tal; i denne model ønsker vi at teste hypotesen

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2.$$

For at gøre det opskrifter vi likelihoodfunktionen svarende til observationerne  $s_1^2, s_2^2, \dots, s_k^2$ ; den er

$$\begin{aligned} L(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2) &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{\Gamma\left(\frac{f_i}{2}\right) \left(\frac{2\sigma_i^2}{f_i}\right)^{f_i/2}} (s_i^2)^{f_i/2-1} \exp\left(-s_i^2 / \frac{2\sigma_i^2}{f_i}\right) \\ &= \text{konst} \cdot \prod_{i=1}^k (\sigma_i^2)^{-f_i/2} \exp\left(-\frac{f_i}{2} \frac{s_i^2}{\sigma_i^2}\right) \\ &= \text{konst} \cdot \left(\prod_{i=1}^k (\sigma_i^2)^{-f_i/2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k f_i \frac{s_i^2}{\sigma_i^2}\right). \end{aligned}$$

Maksimaliseringsestimerne for  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2$  er  $s_1^2, s_2^2, \dots, s_k^2$ . Maksimaliseringsestimaten for den fælles værdi  $\sigma^2$  under  $H_0$  er maksimumspunktet for funktionen  $\sigma^2 \mapsto L(\sigma^2, \sigma^2, \dots, \sigma^2)$ , og det er  $s_0^2 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^k f_i s_i^2$ , hvor  $f = \sum_{i=1}^k f_i$ ;  $s_0^2$  er altså det vægtede gennemsnit af de enkelte variansskøn med frihedsgradstallene som vægte. Kvotientteststørrelsen er  $Q = L(s_0^2, s_0^2, \dots, s_0^2) / L(s_1^2, s_2^2, \dots, s_k^2)$ . Man kan med fordel anvende  $-2 \ln Q$  som teststørrelse, og den betegnes i denne forbindelse ofte  $B$  og kaldes *Bartlett's teststørrelse* for varianshomogenitet; den findes let at være

$$B = - \sum_{i=1}^k f_i \ln \frac{s_i^2}{s_0^2}. \quad (11.1)$$

Teststørrelsen  $B$  er altid et positivt tal, og store værdier af  $B$  er signifikante, dvs. tyder på at hypotesen om varianshomogenitet er forkert. Hvis hypotesen er rigtig, er  $B$  approksimativt  $\chi^2$ -fordelt med  $k - 1$  frihedsgrader, dvs. man kan udregne den omtrentlige testsandsynlighed som  $\varepsilon = P(\chi_{k-1}^2 \geq B_{\text{obs}})$ . Denne  $\chi^2$ -approximation er god når alle  $f_i$ -erne er store; som tommelfingerregel siger man at de alle skal være mindst 5.

Hvis der kun er to grupper (dvs.  $k = 2$ ), kan man alternativt teste hypotesen om varianshomogenitet med et test baseret på forholdet mellem de to variansestimater; dette er omtalt i forbindelse med tostikprøveproblemet i normalfordelingen, se opgave 8.2 side 125. (Dette tostikprøvetest er ikke baseret på nogen  $\chi^2$ -approximationer, så det har ingen restriktioner på antallene af frihedsgrader.)

### 11.5 Tosidet variansanalyse

Man har nogle observationer  $y$  der er arrangeret i et tosidet skema:

|          | 1                                 | 2                                 | ... | $j$                               | ... | $s$                               |
|----------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----|-----------------------------------|-----|-----------------------------------|
| 1        | $y_{11k}$<br>$k=1,2,\dots,n_{11}$ | $y_{12k}$<br>$k=1,2,\dots,n_{12}$ | ... | $y_{1jk}$<br>$k=1,2,\dots,n_{1j}$ | ... | $y_{1sk}$<br>$k=1,2,\dots,n_{1s}$ |
| 2        | $y_{21k}$<br>$k=1,2,\dots,n_{21}$ | $y_{22k}$<br>$k=1,2,\dots,n_{22}$ | ... | $y_{2jk}$<br>$k=1,2,\dots,n_{2j}$ | ... | $y_{2sk}$<br>$k=1,2,\dots,n_{2s}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$                          | $\vdots$                          |     | $\vdots$                          |     | $\vdots$                          |
| $i$      | $y_{i1k}$<br>$k=1,2,\dots,n_{i1}$ | $y_{i2k}$<br>$k=1,2,\dots,n_{i2}$ | ... | $y_{ijk}$<br>$k=1,2,\dots,n_{ij}$ | ... | $y_{isk}$<br>$k=1,2,\dots,n_{is}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$                          | $\vdots$                          |     | $\vdots$                          |     | $\vdots$                          |
| $r$      | $y_{r1k}$<br>$k=1,2,\dots,n_{r1}$ | $y_{r2k}$<br>$k=1,2,\dots,n_{r2}$ | ... | $y_{rjk}$<br>$k=1,2,\dots,n_{rj}$ | ... | $y_{rsk}$<br>$k=1,2,\dots,n_{rs}$ |

Vi benytter betegnelsen  $y_{ijk}$  for observation nr.  $k$  i skemaets  $(i, j)$ -te *celle*, hvori der i alt er  $n_{ij}$  observationer. Den  $(i, j)$ -te celle befinder sig i skemaets  $i$ -te *række* og  $j$ -te *søjle*; der er i alt  $r$  rækker og  $s$  søjler (i engelske tekster vil der typisk være 'r rows and c columns').

Vi opstiller en statistisk model gående ud på at  $y_{ijk}$ -erne er observerede værdier af uafhængige normalfordelte stokastiske variable  $Y_{ijk}$  med samme varians  $\sigma^2$  og med en middelværdistruktur der er bestemt ud fra den måde observationerne er inddelt på – eller måske er det inddelingen der er bestemt af den formodede middelværdistruktur. Her er en præsentation af grundmodel og mulige interessante hypoteser (dog kun hypoteser om middelværdiparametrene; det er bestandigt underforstået at alle  $Y$ -er har samme ukendte varians  $\sigma^2$ ):

- *Grundmodellen*  $G$  siger at  $Y$ -er der hører til samme celle, har samme middelværdi. Mere præcist siger den at der findes tal  $\eta_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , således at  $E Y_{ijk} = \eta_{ij}$  for alle  $i, j$  og  $k$ . Vi formulerer grund-

modellen kort som

$$G : E Y_{ijk} = \eta_{ij}.$$

- *Additivitetshypotesen* eller hypotesen om *forsvindende vekselvirkning* siger at der ikke er nogen vekselvirkning mellem rækker og søjler, men at række-virkninger og søjlevirkninger indgår additivt. Mere præcist siger hypotesen at der findes tal  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  og  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  således at  $E Y_{ijk} = \alpha_i + \beta_j$  for alle  $i, j$  og  $k$ . Den korte formulering af additivitetshypotesen er

$$H_0 : E Y_{ijk} = \alpha_i + \beta_j.$$

- Hypotesen om *ens søjler* eller om *forsvindende søjlevirkning* siger at der ikke er nogen forskel på søjlerne, mere præcist siger den at der findes tal  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  således at  $E Y_{ijk} = \alpha_i$  for alle  $i, j$  og  $k$ . Den korte formulering er

$$H_1 : E Y_{ijk} = \alpha_i.$$

- Hypotesen om *ens rækker* eller om *forsvindende rækkevirkning* siger at der ikke er nogen forskel på rækkerne, mere præcist siger den at der findes tal  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  således at  $E Y_{ijk} = \beta_j$  for alle  $i, j$  og  $k$ . Den korte formulering er

$$H_2 : E Y_{ijk} = \beta_j.$$

- Hypotesen om *total homogenitet* siger at der ikke er nogen forskel på cellerne overhovedet, mere præcist siger den at der findes et tal  $\gamma$  således at  $E Y_{ijk} = \gamma$  for alle  $i, j$  og  $k$ . Den korte formulering er

$$H_3 : E Y_{ijk} = \gamma.$$

Vi vil skrive tingene op i lineær algebra-sprog. Vi opfatter da observationerne som udgørende en vektor  $y \in V = \mathbb{R}^n$ , hvor  $n = n_{..}$  er antallet af observationer; vektorerne er struktureret i et todimensionalt skema som ovenfor. Grundmodellen og de fire hypoteser kan formuleres som udsagn om at middelværdivektoren  $\mu = E Y$  tilhører bestemte underrum:

$$\begin{aligned} G : \mu \in L & \quad \text{hvor } L = \{\xi : \xi_{ijk} = \eta_{ij}\}, \\ H_0 : \mu \in L_0 & \quad \text{hvor } L_0 = \{\xi : \xi_{ijk} = \alpha_i + \beta_j\}, \\ H_1 : \mu \in L_1 & \quad \text{hvor } L_1 = \{\xi : \xi_{ijk} = \alpha_i\}, \\ H_2 : \mu \in L_2 & \quad \text{hvor } L_2 = \{\xi : \xi_{ijk} = \beta_j\}, \\ H_3 : \mu \in L_3 & \quad \text{hvor } L_3 = \{\xi : \xi_{ijk} = \gamma\}. \end{aligned}$$

Der gælder visse relationer mellem hypoteserne/underrummene:

$$\begin{array}{ccccc} & & H_1 & & \\ & \Leftarrow & \Leftarrow & \Leftarrow & \\ G & \Leftarrow & H_0 & \Leftarrow & H_3 \\ & & H_2 & & \\ & & & & L_1 \\ L & \supseteq & L_0 & \supseteq & L_2 \\ & & & & L_3 \end{array}$$



Grundmodellen samt modellerne svarende til  $H_1$  og  $H_2$  er eksempler på  $k$ -stikprøveproblemer ( $k$  er hhv.  $rs$ ,  $r$  og  $s$ ), og modellen svarende til  $H_3$  er et enstikprøveproblem. Derfor kan vi uden videre opskrive estimatorne over middelværdiparametrene i disse fire modeller:

under  $G$  er  $\hat{\eta}_{ij} = \bar{y}_{ij}$  altså gennemsnittet i celle  $(i, j)$ ,  
 under  $H_1$  er  $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.}$  altså gennemsnittet i den  $i$ -te række,  
 under  $H_2$  er  $\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j}$  altså gennemsnittet i den  $j$ -te søjle,  
 under  $H_3$  er  $\hat{\gamma} = \bar{y}_{...}$  altså totalgennemsnittet.

Det er derimod ikke nær så enkelt at estimere parametrene under additivitetshypotesen  $H_0$ . Først vil vi indføre begrebet sammenhængende model.

### Sammenhængende modeller

Hvilke krav/ønsker kan det være hensigtsmæssigt at stille til antallene af observationer i de forskellige celler, altså til nedenstående »antalstabel«?

$$\mathbf{n} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1s} \\ \hline n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2s} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline n_{r1} & n_{r2} & \cdots & n_{rs} \\ \hline \end{array}$$

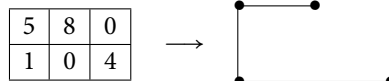
Det siger sig selv at der ikke må være hele rækker eller søjler udelukkende med 0-er, men kan der tillades 0-er på enkelte pladser?

For klarlægge problemerne ser vi på et overskueligt eksempel. Lad os sige at  $r = 2$  og  $s = 2$ , og at

$$\mathbf{n} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 9 \\ \hline 9 & 0 \\ \hline \end{array}$$

I dette tilfælde er additivitetsunderrummet  $L$  todimensionalt (der er kun de to parametre  $\eta_{12}$  og  $\eta_{21}$ ), og faktisk er  $L = L_0 = L_1 = L_2$ . I særdeleshed er  $L_1 \cap L_2 \neq L_3$ , selv om mange måske ville have troet at der altid gjaldt at  $L_1 \cap L_2 = L_3$ . Sagen er, at denne model i realiteten består af to separate delmodeller (for hhv. celle  $(1, 2)$  og celle  $(2, 1)$ ), og derfor bliver  $\dim(L_1 \cap L_2) > 1$  eller ensbetydende hermed  $\dim(L_0) < r + s - 1$  (det følger ved brug af den generelle formel  $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$  og det faktum at  $L_0 = L_1 + L_2$ ).

En model der ikke kan deles op i separate delmodeller, kaldes en *sammenhængende model*. Begrebet sammenhængende model kan præciseres på følgende måde: Ud fra antalstabellen  $\mathbf{n}$  danner vi en graf hvor knuderne er de talpar  $(i, j)$  for hvilke  $n_{ij} > 0$ , og hvor kanterne forbinder par af »naboknuder« (dvs. knuder som enten har samme  $i$  eller samme  $j$ ). Eksempel:



Vi siger at modellen er sammenhængende, hvis grafen er sammenhængende (som det er tilfældet i eksemplet).

Man overbeviser sig let om at modellen er sammenhængende hvis og kun hvis nulrummet for den lineære afbildning der afbilder den  $(r + s)$ -dimensionale vektor  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$  over i den »tilsvarende« vektor i  $L_0$ , er endimensionalt. Udtrykt på almindeligt dansk er en sammenhængende model derfor en model hvor følgende udsagn er korrekt: »hvis alle rækkeparametre er ens og alle søjleparametre er ens, så er der total homogenitet«.

I det følgende beskæftiger vi os kun med sammenhængende modeller.

### Projektionen på $L_0$

Ifølge den generelle teori estimeres middelværdivektoren  $\mu$  under  $H_0$  ved projektionen  $p_0 y$  af  $y$  på  $L_0$ . I visse tilfælde findes en nem formel til beregning af denne projektion. – Vi minder indledningsvis om at  $L_0 = L_1 + L_2$  og  $L_3 = L_1 \cap L_2$ .

Lad os *antage* at

$$(L_1 \cap L_3^\perp) \perp (L_2 \cap L_3^\perp). \quad (11.2)$$

I så fald er

$$L_0 = (L_1 \cap L_3^\perp) \oplus (L_2 \cap L_3^\perp) \oplus L_3$$

og dermed

$$p_0 = (p_1 - p_3) + (p_2 - p_3) + p_3$$

dvs.

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha_i + \beta_j} &= (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\dots}) + (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\dots}) + \bar{y}_{\dots} \\ &= \bar{y}_{i\cdot} + \bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\dots} \end{aligned}$$

Se, det er jo en meget fin formel til beregning af (koordinaterne for) projektionen på  $L_0$ . Spørgsmålet er blot hvornår forudsætningen er opfyldt. Nødvendigt og tilstrækkeligt for (11.2) er at

$$\langle p_1 e - p_3 e, p_2 f - p_3 f \rangle = 0 \quad (11.3)$$

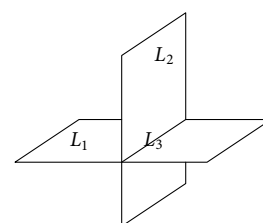
for alle  $e, f \in \mathfrak{B}$ , hvor  $\mathfrak{B}$  er en basis for  $L_0$ . Som  $\mathfrak{B}$  kan man f.eks. bruge vektorerne  $e^{\rho\sigma}$  hvor  $(e^{\rho\sigma})_{ijk} = 1$  hvis  $(i, j) = (\rho, \sigma)$ , og 0 ellers. Hvis man indsætter sådanne vektorer i (11.3), finder man at den nødvendige og tilstrækkelige betingelse for (11.2) er at

$$n_{ij} = \frac{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{n_{\dots}}, \quad i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s. \quad (11.4)$$

Når denne betingelse er opfyldt, siger man at der foreligger *det balancerede tilfælde*. Bemærk at hvis der er lige mange observationer i alle celler, så er (11.4) automatisk opfyldt.

Sammenfattende kan vi nu sige, at i det balancerede tilfælde, dvs. når (11.4) er opfyldt, kan estimatorerne under additivitetshypotesen udregnes efter opskriften

$$\widehat{\alpha_i + \beta_j} = \bar{y}_{i\cdot} + \bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\dots}. \quad (11.5)$$



$$(L_1 \cap L_3^\perp) \perp (L_2 \cap L_3^\perp)$$

### Test af hypoteser

De forskellige hypoteser om middelværdistrukturen kan nu testes; hver gang kan man benytte en  $F$ -teststørrelse hvor nævneren er variansskønnet i den aktuelle grundmodel, og tælleren er et skøn over »hypotesens variation omkring grundmodellen«. Sine to frihedsgradsantal arver  $F$  fra hhv. tæller- og nævner-variensskønnet.

1. *Additivitetshypotesen*  $H_0$  testes med  $F = s_1^2/s_0^2$  hvor

$$s_0^2 = \frac{1}{n - \dim L} \|\mathbf{y} - \mathbf{p}\mathbf{y}\|^2 = \frac{1}{n - g} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{n_{ij}} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2 \quad (11.6)$$

beskriver *variationen inden for grupper* ( $g = \dim L$  er antal ikke-tomme celler), og

$$\begin{aligned} s_1^2 &= \frac{1}{\dim L - \dim L_0} \|\mathbf{p}\mathbf{y} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2 \\ &= \frac{1}{g - (r + s - 1)} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{n_{ij}} (\bar{y}_{ij} - (\widehat{\alpha_i + \beta_j}))^2 \end{aligned}$$

beskriver *vekselvirkningsvariationen*. – I det balancerede tilfælde er

$$s_1^2 = \frac{1}{g - (r + s - 1)} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{n_{ij}} (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}_{\dots})^2.$$

Ovenstående forudsætter at  $n > g$ , dvs. der skal være celler med mere end én observation.

2. Hvis additivitetshypotesen accepteres, udnævnes den til aktuell grundmodel, og man udregner man et nyt variansskøn

$$\begin{aligned} s_{01}^2 &= \frac{1}{n - \dim L_0} \|\mathbf{y} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2 \\ &= \frac{1}{n - \dim L_0} (\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{p}\mathbf{y} - \mathbf{p}_0\mathbf{y}\|^2). \end{aligned}$$

Alt efter de konkrete omstændigheder og problemstillinger vil man derefter teste  $H_1$  og/eller  $H_2$ .

- For at teste hypotesen  $H_1$  om *forsvindende søjlevirkning* benyttes teststørrelsen  $F = s_1^2/s_{01}^2$  hvor

$$\begin{aligned} s_1^2 &= \frac{1}{\dim L_0 - \dim L_1} \|\mathbf{p}_0\mathbf{y} - \mathbf{p}_1\mathbf{y}\|^2 \\ &= \frac{1}{s - 1} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s n_{ij} (\widehat{\alpha_i + \beta_j} - \bar{y}_{i\cdot})^2. \end{aligned}$$

I det balancerede tilfælde er

$$s_1^2 = \frac{1}{s - 1} \sum_{j=1}^s n_{\cdot j} (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\dots})^2.$$

- For at teste hypotesen  $H_2$  om *forsvindende rækkevirkning* benyttes teststørrelsen  $F = s_2^2/s_{01}^2$  hvor

$$\begin{aligned} s_2^2 &= \frac{1}{\dim L_0 - \dim L_2} \|\mathbf{p}_0 \mathbf{y} - \mathbf{p}_2 \mathbf{y}\|^2 \\ &= \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s n_{ij} (\widehat{\alpha_i + \beta_j} - \bar{y}_{\cdot j})^2. \end{aligned}$$

I det balancerede tilfælde er

$$s_2^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r n_i (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\dots})^2.$$

Bemærk at  $H_1$  og  $H_2$  testes sideordnet, altså begge i forhold til  $H_0$  med variansskønnet  $s_{01}^2$ ; i det balancerede tilfælde er de to  $F$ -tællere  $s_1^2$  og  $s_2^2$  stokastisk uafhængige (fordi  $\mathbf{p}_0 \mathbf{y} - \mathbf{p}_1 \mathbf{y}$  og  $\mathbf{p}_0 \mathbf{y} - \mathbf{p}_2 \mathbf{y}$  er ortogonale).

### Et eksempel

For at opnå de optimale vækstbetingelser skal planter have de fornødne næringstoffer i de rette forhold. Dette eksempel handler om at bestemme det rette forhold mellem mængden af tilført kvælstof- og fosforgødning til kartofler. Man har dyrket nogle kartoffelmarker på seks forskellige måder, svarende til seks forskellige kombinationer af mængde tilført fosfor (0, 1 eller 2 enheder) og mængde tilført kvælstof (0 eller 1 enhed), og derefter har man målt høstudbyttet. På den måde får man nogle observationer, høstudbyttene, som er inddelt i grupper efter dyrkningsmetode således at grupperne er fastlagt ved hjælp af to kriterier, nemlig tilført fosfor og tilført kvælstof.

Et sådant dyrkningsforsøg udført i 1932 ved Ely gav de resultater der er vist i tabel 11.3.\* Opgaven er nu at undersøge hvordan de to faktorer kvælstof og fosfor virker hver for sig og sammen. Er det f.eks. sådan at virkningen af at gå fra en til to enheder fosfor afhænger af om der tilføres kvælstof eller ej? Det kan undersøges med en tosidet variansanalyse.

Man kan måske for den gode ordens skyld være interesseret i at teste grundmodellens antagelse om varianshomogenitet, og derfor beregnes for hver af de seks grupper ikke blot gennemsnit, men også variansestimater, se tabel 11.4. Man finder den samlede kvadratsum til 111817, således at den fælles varians inden for grupper estimeres ved  $s_0^2 = 111817/(36 - 6) = 3727.2$  (jf. formel (11.6)). Bartlett's teststørrelse bliver  $B_{\text{obs}} = 9.5$  der skal sammenlignes med  $\chi^2$ -fordelingen med  $6 - 1 = 5$  frihedsgrader. Tabelopslag viser at der er knap 10% chance for at få en større værdi, og der er således ikke noget der taler alvorligt imod antagelsen

\* Bemærk i øvrigt at høstudbyttene har undergået visse forandringer på deres vej til tabel 11.3. Den væsentligste er at man har taget logaritmen til tallene. Grunden hertil er at erfaringsmæssigt er høstudbyttet af kartofler ikke særlig normalfordelt, hvorimod det ser bedre ud med logaritmen til høstudbyttet. Da man havde taget logaritmen til tallene, viste det sig at alle resultaterne hed 3-komma-et-eller-andet, så for at få nogle pæne tal ud af det har man trukket 3 fra og ganget med 1000.

Tabel 11.3 Dyrkningsforsøg:  
Udbytte ved dyrkningsfor-  
søg med kartofler på 36 par-  
celler. Værdierne er  $1000 \times$   
( $\log(\text{udbytte målt i lbs}) - 3$ ).

|        |   | kvælstof |     |     |     |     |     |
|--------|---|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
|        |   | 0        |     |     | 1   |     |     |
| fosfor | 0 | 591      | 450 | 584 | 619 | 618 | 524 |
|        |   | 509      | 636 | 413 | 651 | 655 | 564 |
|        | 1 | 722      | 689 | 625 | 801 | 688 | 682 |
|        |   | 584      | 614 | 513 | 703 | 774 | 623 |
|        | 2 | 702      | 677 | 684 | 814 | 757 | 810 |
|        |   | 643      | 668 | 699 | 792 | 790 | 703 |

Tabel 11.4 Dyrkningsforsøg:  
Middeltal  $\bar{y}$  (øverst) og varians-  
estimat  $s^2$  (nederst) i hver af de  
seks grupper, jf. tabel 11.3.

|        |   | kvælstof |         |
|--------|---|----------|---------|
|        |   | 0        | 1       |
| fosfor | 0 | 530.50   | 605.17  |
|        |   | 7680.30  | 2644.57 |
|        | 1 | 624.50   | 711.83  |
|        |   | 5569.90  | 4248.57 |
|        | 2 | 678.83   | 777.67  |
|        |   | 474.97   | 1745.07 |

om varianshomogenitet. Vi kan derfor basere de videre undersøgelser på den formodede grundmodel.

Vi vil derefter gå i gang med at undersøge om talmaterialet kan beskrives med en model hvor virkningerne af de to faktorer »tilført fosfor« og »tilført kvælstof« indgår additivt. Vi betegner den  $k$ -te observation i den  $i$ -te række og  $j$ -te søjle  $y_{ijk}$ . Grundmodellen er at  $y_{ijk}$ -erne opfattes som observerede værdier af uafhængige normalfordelte stokastiske variable  $Y_{ijk}$ , hvor  $Y_{ijk}$  er normalfordelt med middelværdi  $\mu_{ij}$  og varians  $\sigma^2$ . Additivitetshypotesen kan formuleres som  $H_0 : E Y_{ijk} = \alpha_i + \beta_j$ . Da vi har at gøre med et »balanceret tilfælde« (idet formel (11.4) er opfyldt), kan estimerterne  $\widehat{\alpha_i + \beta_j}$  udregnes efter formel (11.5). Vi udregner hjælpestørrelserne

$$\begin{aligned} \bar{y}_{..} &= 654.75 & \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..} &= -86.92 & \bar{y}_{.1} - \bar{y}_{..} &= -43.47 \\ \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{..} &= 13.42 & \bar{y}_{.2} - \bar{y}_{..} &= 43.47 \\ \bar{y}_{3.} - \bar{y}_{..} &= 73.50 \end{aligned}$$

Ved hjælp heraf udregnes de estimerede gruppemiddelværdier  $\widehat{\alpha_i + \beta_j}$  under additivitetshypotesen, se tabel 11.5. Det variansestimater der benyttes hvis additivitetshypotesen er rigtig, er  $s_{01}^2 = \frac{112693.5}{36 - (3 + 2 - 1)} = 3521.7$  med  $36 - (3 + 2 - 1) = 32$  frihedsgrader.

Vi kan nu teste om der er additivitet mellem fosfor og kvælstof i kartoffeldyrkningseksemplet. Vi har tidligere fundet at  $s_0^2 = 3727.2$ . Vekselvirkningsvariansen findes til

$$s_1^2 = \frac{877}{6 - (3 + 2 - 1)} = \frac{877}{2} = 438.5.$$

|        |   | kvælstof |        |
|--------|---|----------|--------|
|        |   | 0        | 1      |
| fosfor | 0 | 530.50   | 605.17 |
|        |   | 524.36   | 611.30 |
|        | 1 | 624.50   | 711.83 |
|        |   | 624.70   | 711.64 |
|        | 2 | 678.83   | 777.67 |
|        |   | 684.78   | 771.72 |

Tabel 11.5 Dyrkningsforsøg: Gruppegennemsnit (øverst) og estimerede gruppemiddelværdier under additivitetshypotesen (nederst).

| variation             | $f$ | SS     | $s^2$ | test            |
|-----------------------|-----|--------|-------|-----------------|
| inden for grupper     | 30  | 111817 | 3727  |                 |
| vekselvirkning        | 2   | 877    | 439   | $439/3727=0.12$ |
| additivitetshypotesen | 32  | 112694 | 3522  |                 |
| mellem N-niveauer     | 1   | 68034  | 68034 | $68034/3522=19$ |
| mellem P-niveauer     | 2   | 157641 | 78820 | $78820/3522=22$ |
| omkring total-gns.    | 35  | 338369 |       |                 |

Tabel 11.6 Dyrkningsforsøg med kartofler: Variansanalyseskema.  $f$  står for antal frihedsgrader, SS for Sum af kvadratiske afvigelser,  $s^2 = SS/f$ .

Teststørrelsen er dermed

$$F = \frac{s_1^2}{s_0^2} = \frac{438.5}{3727.2} = 0.12$$

der skal sammenlignes med  $F$ -fordelingen med 2 og 30 frihedsgrader. Tabelopslag viser at testsandsynligheden er lidt under 90%, så der er næppe nogen tvivl om at additivitetshypotesen kan godkendes.

Som forbedret estimat over den fælles varians benyttes herefter

$$s_{01}^2 = \frac{112694}{36 - (3 + 2 - 1)} = 3521.7$$

med  $36 - (3 + 2 - 1) = 32$  frihedsgrader.

Nu da vi véd at den additive model giver en god beskrivelse af observationerne, og det således har mening at tale om en kvælstofvirkning og en fosforvirkning, kan det være af interesse at undersøge om der er en signifikant virkning af kvælstof hhv. fosfor.

For at undersøge om kvælstof har en virkning, testes hypotesen  $H_1$  om forsvindende kvælstofvirkning (søjlevirkning). Variansen mellem kvælstofniveauer udregnes til

$$s_2^2 = \frac{68034}{2 - 1} = 68034.$$

Variansestimateret i den additive model var  $s_{02}^2 = 3522$  med 32 frihedsgrader, og  $F$ -teststørrelsen bliver derfor

$$F_{\text{obs}} = \frac{s_2^2}{s_{02}^2} = \frac{68034}{3522} = 19$$

der skal sammenlignes med  $F_{1,32}$ -fordelingen. Værdien  $F_{\text{obs}} = 19$  er ganske utvetydigt signifikant stor, og hypotesen om forsvindende kvælstofvirkning må derfor forkastes, dvs. konklusionen bliver at det *har* en virkning at tilføre kvælstof.

Hvis man undersøger om der er en forsvindende fosforvirkning, så må også denne hypotese forkastes, dvs. det har også en signifikant virkning at tilføre fosforgødning.

Variansanalyseskemaet (tabel 11.6) giver en samlet oversigt over analysen.

## 11.6 Regressionsanalyse

Regressionsanalyse handler om at undersøge hvordan én målt størrelse afhænger af en eller flere andre. Antag at der foreligger et datamateriale som er fremkommet på den måde at man på hvert af nogle »individer« (f.eks. forsøgspersoner eller forsøgsdyr eller enkelt-laboratorieforsøg osv.) har målt værdien af et antal størrelser (variable). En af disse størrelser indtager en særstilling, idet man nemlig gerne vil »beskrive« eller »forklare« denne størrelse ved hjælp af de øvrige. Tit kalder man den variabel der skal beskrives, for  $y$ , og de variable ved hjælp af hvilke man vil beskrive, for  $x_1, x_2, \dots, x_p$ . Andre betegnelser fremgår af følgende oversigt:

| $y$                      | $x_1, x_2, \dots, x_p$  |
|--------------------------|-------------------------|
| den modellerede variabel | baggrundsvARIABLE       |
| den afhængige variabel   | de uafhængige variable  |
| den forklarede variabel  | de forklarende variable |
| responsvariabel          |                         |

Her skitseres et par eksempler:

1. Lægen observerer den tid  $y$  som patienten overlever efter at være blevet behandlet for sygdommen, men lægen har også registreret en mængde baggrundsoplysninger om patienten, såsom køn, alder, vægt, detaljer om sygdommen osv. Nogle af baggrundsoplysningerne kan måske indeholde en eller anden form for information om hvor længe patienten kan forventes at overleve.
2. I en række nogenlunde ens i-lande har man bestemt mål for lungekræftforekomst, cigaretforbrug og forbrug af fossilt brændstof, alt sammen pr. indbygger. Man kan da udnævne lungekræftforekomst til  $y$ -variabel og søge at »forklare« den ved hjælp af de to andre variable, der så får rollen som forklarende variable.
3. Man ønsker at undersøge et bestemt stofs giftighed. Derfor giver man det i forskellige koncentrationer til nogle grupper af forsøgsdyr og ser hvor mange af dyrene der dør. Her er koncentrationen  $x$  en uafhængig variabel hvis værdi eksperimentator bestemmer, og antallet  $y$  af døde er den afhængige variabel.

Regressionsanalyse går ud på at finde en statistisk model hvormed man kan beskrive en  $y$ -variabel ved hjælp af en kendt simpel funktion af nogle baggrundsvariable og nogle parametre. Parametrene er de samme for alle observationssæt, hvorimod baggrundsvariablene typisk ikke er det.

Man må naturligvis ikke forvente at den statistiske model leverer en perfekt beskrivelse, dels fordi den model man måtte finde frem til, næppe er fuldstændig rigtig, dels fordi en af pointerne med statistiske modeller jo netop er at de kun beskriver hovedtrækkene i datamaterialet og ser stort på de finere detaljer. Der vil derfor være en vis forskel mellem en observeret værdi  $y$  og den tilsvarende *fittede* værdi  $\hat{y}$ , dvs. den værdi som man ifølge regressionsmodellen skulle få med de givne værdier af baggrundsvariablene. Denne forskel kaldes *residual* og betegnes ofte  $e$ . Vi har så opspaltningen

$$y = \hat{y} + e$$

observeret værdi = fittet værdi + residual.

Residualerne er det som modellen *ikke* beskriver, og derfor er det naturligt at man (eller rettere modellen) anser dem for *tilfældige*, dvs. for at være tilfældige tal fra en vis sandsynlighedsfordeling.



Vesentlige forudsætninger for at kunne benytte regressionsanalyse er at

1. det er ikke  $x$ -erne, men kun  $y$ -erne og residualerne, der er behæftede med tilfældig variation («usikkerhed»),
2. de enkelte målinger er *stokastisk uafhængige* af hinanden, det vil sige de tilfældigheder der indvirker på én bestemt  $y$ -værdi (efter at man har taget højde for baggrundsvariablene), har ikke nogen sammenhæng med de tilfældigheder der spiller ind på de øvrige  $y$ -værdier.

Det simpleste eksempel på regressionsanalyse er det hvor der kun er én enkelt baggrundsvariabel, som vi så betegner  $x$ . Opgaven bliver da at beskrive  $y$ -erne ved hjælp af en kendt simpel funktion af  $x$ . Det simpleste ikke-trivielle bud på en sådan funktion må vel være en funktion af typen  $y = \alpha + x\beta$  hvor  $\alpha$  og  $\beta$  er to parametre, dvs. man formoder at  $y$  er en affin funktion af  $x$ . Derved får man den såkaldte *simple lineære regressionsmodel*, jf. side 100.

En lidt mere avanceret model er den *multiple lineære regressionsmodel* hvor man har  $p$  forklarende variable  $x_1, x_2, \dots, x_p$  og søger at beskrive  $y$ -værdierne med en funktion af formen  $y = \sum_{j=1}^p x_j \beta_j$ .

### Formulering af modellen

For at regressionsmodellen kan blive til en genuin statistisk model, skal man specificere den sandsynlighedsfordeling som skal beskrive  $y$ -ernes variation omkring deres middelværdi. I dette kapitel går vi ud fra at denne sandsynlighedsfordeling er en normalfordeling med varians  $\sigma^2$  (den samme for alle observationer).



Vi vil formulere modellen mere præcist på følgende måde: Der foreligger  $n$  sammenhørende værdier af en afhængig variabel  $y$  med tilhørende  $p$  baggrundsvARIABLE  $x_1, x_2, \dots, x_p$ . Det  $i$ -te sæt værdier er  $(y_i, (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}))$ . Det antages at  $y_1, y_2, \dots, y_n$  er observerede værdier af uafhængige normalfordelte stokastiske variable  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  med samme varians  $\sigma^2$  og med

$$E Y_i = \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11.7)$$

hvor  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  er ukendte parametre. Ofte vil en af de forklarende variable være konstanten 1, dvs. den har værdien 1 for alle  $i$ . I matrixnotation kan (11.7) skrives som  $E Y = X\beta$ , hvor  $Y$  er søjlevektoren bestående af de  $n$   $Y$ -er,  $X$  er en kendt  $n \times p$ -matrix (den såkaldte *designmatrix*) indeholdende  $x_{ij}$ -værdierne, og  $\beta$  søjlevektoren bestående af de  $p$  ukendte  $\beta$ -er. Man kan naturligvis også formulere det ved hjælp af underrum:  $E Y \in L_1$  hvor  $L_1 = \{X\beta \in \mathbb{R}^n : \beta \in \mathbb{R}^p\}$ . – Betegnelsen *lineær regression* skyldes at  $E Y$  er en lineær funktion af  $\beta$ .

Ovenstående kan generaliseres på flere måder. I stedet for observationer med samme varians kan man have observationer hvis varians er kendt på nær en konstant faktor, dvs.  $\text{Var } Y = \sigma^2 \Sigma$  hvor  $\Sigma > 0$  er en kendt matrix og  $\sigma^2$  en ukendt parameter; så bliver der tale om *vægtet* lineær regressionsanalyse. Man kan udskifte normalfordelingen med f.eks. binomialfordelingen, poissonfordelingen eller gammafordelingen, og samtidig generalisere (11.7) til

$$g(E Y_i) = \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

for en passende funktion  $g$ ; så bliver der tale om *generaliseret* lineær regression. Logistisk regression (afsnit 9.1, specielt side 129ff) er et eksempel på generaliseret lineær regression.

I det følgende vil vi kun beskæftige os med ordinær lineær regression.

### Estimation af parametrene

Ifølge den generelle teori estimerer man middelværdivektoren  $X\beta$  som projektionen af  $y$  vinkelret ned på  $L_1 = \{X\beta \in \mathbb{R}^n : \beta \in \mathbb{R}^p\}$ . Det betyder at  $\beta$  skal estimeres ved en vektor  $\widehat{\beta}$  med den egenskab at  $y - X\widehat{\beta} \perp L_1$ . Nu er  $y - X\widehat{\beta} \perp L_1$  ensbetydende med at  $\langle y - X\widehat{\beta}, X\beta \rangle = 0$  for alle  $\beta \in \mathbb{R}^p$ , som er ensbetydende med at  $\langle X'y - X'X\widehat{\beta}, \beta \rangle = 0$  for alle  $\beta \in \mathbb{R}^p$ , som igen er ensbetydende med at  $X'X\widehat{\beta} = X'y$ . Ligningssystemet  $X'X\widehat{\beta} = X'y$  består af  $p$  lineære ligninger med  $p$  ubekendte, og det kaldes *normalligningerne* (se også side 158). Hvis  $p \times p$ -matricen  $X'X$  er regulær, er der en entydig løsning, nemlig:

$$\widehat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y.$$

(Betingelsen at  $X'X$  er regulær, kan formuleres på mange forskellige ensbetydende måder: dimensionen af  $L_1$  er  $p$ ; rangen af  $X$  er  $p$ ; rangen af  $X'X$  er  $p$ ; søjlerne i  $X$  er lineært uafhængige; parametriseringen er injektiv.)

Variansparameteren estimeres ved

$$s^2 = \frac{\|\mathbf{y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}\|^2}{n - \dim L_1}.$$

Ved at bruge regnereglerne for variansmatricer fås i øvrigt

$$\begin{aligned} \text{Var } \hat{\boldsymbol{\beta}} &= \text{Var}((X'X)^{-1}X'Y) \\ &= ((X'X)^{-1}X') \text{Var } Y ((X'X)^{-1}X')' \\ &= ((X'X)^{-1}X') \sigma^2 I ((X'X)^{-1}X')' \\ &= \sigma^2 (X'X)^{-1} \end{aligned} \quad (11.8)$$

der estimeres ved  $s^2 (X'X)^{-1}$ . Kvadratroden af diagonalelementerne heri er estimeret over *middelfejlen* (standardafvigelsen) på de tilsvarende  $\hat{\beta}$ -er.

Ethvert ordentligt computerprogram til statistik har en indbygget funktion til løsning af normalligningerne; funktionen vil returnere parameterestimerterne og deres middelfejl, og muligvis også hele den estimerede  $\text{Var } \hat{\boldsymbol{\beta}}$ .

### Simpel lineær regression

I simpel lineær regression (jf. bl.a. side 100) er

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad X'X = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix},$$

og normalligningerne bliver

$$\begin{aligned} \alpha n + \beta \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i \\ \alpha \sum_{i=1}^n x_i + \beta \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

som det ikke er uoverkommeligt at løse. Det er dog endnu lettere simpelthen at udregne projektionen  $p\mathbf{y}$  af  $\mathbf{y}$  på  $L_1$ . Man ser umiddelbart at de to vektorer

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{bmatrix} \quad \text{er ortogonale og udspænder } L_1. \text{ Dermed bliver}$$

$$p\mathbf{y} = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} + \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \mathbf{u} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \mathbf{v},$$

således at den  $j$ -te koordinat i  $\mathbf{py}$  bliver  $(\mathbf{py})_j = \bar{y} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} (x_j - \bar{x})$ ,

jf. side 111. Ved at udregne variansmatricen (11.8) finder man de varianser og korrelationer som postuleredes i sætning 7.3 side 111.

### Hypoteseprøvning

Hypoteser af formen  $H_0 : E Y \in L_0$  hvor  $L_0$  er et underrum af  $L_1$ , testes på helt sædvanlig måde med et  $F$ -test.

Ofte vil man være interesseret i en hypotese af formen  $H : \beta_j = 0$ , svarende til at den tilsvarende forklarende variabel  $x_j$  er uden betydning. En sådan hypotese kan testes enten med et  $F$ -test eller med  $t$ -teststørrelsen

$$t = \frac{\widehat{\beta}_j}{\text{estimeret middelfejl på } \widehat{\beta}_j}.$$

### Om faktorer

Der kan være to forskellige slags baggrundsvARIABLE. I det foregående er omtalt eksempler på *kvantitative* baggrundsvARIABLE, dvs. nogle der angiver en eller anden numerisk størrelse. Man kan imidlertid også operere med kvalitative baggrundsvARIABLE, *faktorer*, der angiver tilhørsforhold til en klasse i forbindelse med en klassificering.

Eksempel: I ensidet variansanalyse optræder observationer  $y$  der er inddelt i et antal grupper, se evt. side 160; man kan opfatte data som bestående af sammenhørende værdier  $(y, f)$  af en observation  $y$  og en faktor  $f$  som simpelthen er navnet på den gruppe som  $y$  tilhører. Man kan formulere det som et regressionsproblem: Lad os sige at der er  $k$  forskellige niveauer af  $f$  (dvs. der er  $k$  grupper), og lad os kalde dem  $1, 2, \dots, k$ . Så indfører vi nogle kunstige (kvantitative) forklarende variable  $x_1, x_2, \dots, x_k$  sådan at  $x_i = 1$  hvis  $f = i$  og  $x_i = 0$  ellers. På den måde erstatter man  $(y, f)$  med  $(y, (x_1, x_2, \dots, x_p))$  hvor det er sådan at alle  $x$ -er på nær ét er lig 0, og det  $x$  som er lig 1, udpeger den gruppe som  $y$  tilhører. Ensidede variansanalyse-modellen kan nu skrives

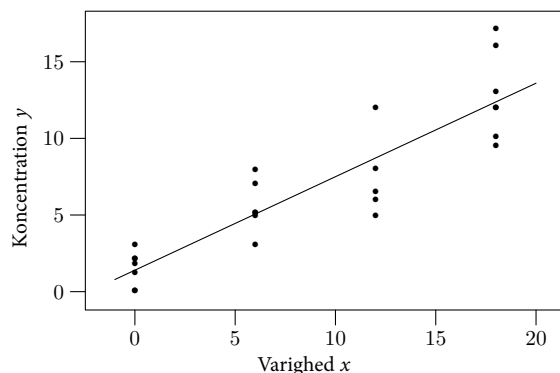
$$E Y = \sum_{j=1}^p x_j \beta_j$$

hvor  $\beta_j$  svarer til  $\mu_j$  i den oprindelige formulering af modellen.

Ved at kombinere kvantitative baggrundsvARIABLE og faktorer kan man formulere komplicerede modeller, eksempelvis med over- og underordnede grupper eller med forskellige lineære sammenhænge i forskellige delgrupper.

| varighed<br>(min) | koncentration<br>( $\mu\text{mol/l}$ ) |      |      |      |      |      |      |
|-------------------|----------------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| 0                 | 0.0                                    | 0.0  | 1.2  | 1.8  | 2.1  | 2.1  | 3.0  |
| 6                 | 3.0                                    | 4.9  | 5.1  | 5.1  | 7.0  | 7.9  |      |
| 12                | 4.9                                    | 6.0  | 6.5  | 8.0  | 12.0 |      |      |
| 18                | 9.5                                    | 10.1 | 12.0 | 12.0 | 13.0 | 16.0 | 17.1 |

Tabel 11.7 Kvælning af hunde: Målinger af hypoxantinkoncentration til de fire forskellige tidspunkter. I hver gruppe er observationerne ordnet efter størrelse.



Figur 11.1 Kvælning af hunde: Sammenhørende værdier af hypoxantinkoncentration og hypoxivarighed, samt den estimerede regressionslinje.

## Et eksempel

### Eksempel 11.2: Kvælning af hunde

Man ved at hypoxi (nedsat ilttilførsel til hjernen) kan bevirke at der dannes forskellige skadelige stoffer i hjernen, og det kan i værste fald medføre alvorlige hjerneskader. (Hypoxi kan blandt andet forekomme ved fødsler.) Man er derfor interesseret i at udvikle en simpel metode til at afgøre om der har været hypoxi og i givet fald hvor længe. Man har udført en række forsøg for at undersøge om koncentrationen af hypoxantin i cerebrospinalvæsken kan benyttes som hypoxiindikator.

Syv hunde er under bedøvelse blevet udsat for iltmangel ved sammenpresning af lufttrøret, og hypoxantinkoncentrationen målt efter 0, 6, 12 og 18 minutters forløb. Det var af forskellige grunde ikke muligt at foretage målinger på alle syv hunde til alle fire tidspunkter, og det kan heller ikke afgøres hvordan målinger og hunde hører sammen. Resultaterne af forsøget er vist i tabel 11.7.

Man kan anskue situationen på den måde at der foreligger  $n = 25$  par sammenhørende værdier af koncentration og varighed. Varighederne er kendte størrelser – de indgår i forsøgsplanen – hvorimod koncentrationerne kan betragtes som observerede værdier af stokastiske variable: tallene er ikke ens fordi der er en vis biologisk variation og en vis forsøgsusikkerhed, og det kan passende modelleres som tilfældig variation. Det er derfor nærliggende at søge at modellere tallene ved hjælp af en regressionsmodel med koncentration som  $y$ -variabel og varighed som  $x$ -variabel. Man kan naturligvis ikke på forhånd vide om varigheden i sig selv er en hensigtsmæssig forklarende variabel. Måske viser det sig at man bedre kan beskrive koncentrationen som en lineær funktion af logaritmen til varigheden end som en lineær funktion af selve varigheden, men det betyder blot at der er tale om en lineær regressionsmodel med logaritmen til varigheden som forklarende variabel.

Vi vil antage at hypoxantinkoncentrationen kan beskrives ved en lineær regressionsmodel med hypoxivarigheden som uafhængig variabel.

Vi lader  $x_1, x_2, x_3$  og  $x_4$  betegne de fire tidspunkter 0, 6, 12 og 18 min, og vi lader  $y_{ij}$  betegne den  $j$ -te koncentrationens værdi til tid  $x_i$ . Med de indførte betegnelser kan den foreslåede statistiske model for talmaterialet formuleres på den måde at de stokastiske variable  $Y_{ij}$  er uafhængige og normalfordelte med samme varians  $\sigma^2$  og med  $E Y_{ij} = \alpha + \beta x_i$ .

Estimererne over  $\alpha$  og  $\beta$  udregnes, f.eks. ved brug af formlerne på side 111, til  $\hat{\beta} = 0.61 \mu\text{mol l}^{-1} \text{ min}^{-1}$  og  $\hat{\alpha} = 1.4 \mu\text{mol l}^{-1}$ . Variansen estimeres til  $s_{02}^2 = 4.85 \mu\text{mol}^2 \text{ l}^{-2}$  med  $25 - 2 = 23$  frihedsgrader.

Middelfejlen på  $\hat{\beta}$  er  $\sqrt{s_{02}^2/SS_x} = 0.06 \mu\text{mol l}^{-1} \text{ min}^{-1}$ , og på  $\hat{\alpha}$  er den  $\sqrt{(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{SS_x})s_{02}^2} = 0.7 \mu\text{mol l}^{-1}$  (sætning 7.3). Størrelsen af de to middelfejl viser at det er passende at angive  $\hat{\beta}$  med to og  $\hat{\alpha}$  med én decimal, så vi konkluderer at den estimerede regressionslinje er

$$y = 1.4 \mu\text{mol l}^{-1} + 0.61 \mu\text{mol l}^{-1} \text{ min}^{-1} x.$$

Som en form for modelkontrol kan vi nu teste om hypoxantinkoncentrationen afhænger lineært (eller rettere affint) af hypoxiens varighed. Vi indlejrer derfor regressionsmodellen i en  $k$ -stikprøvemodell hvor grupperne bestemmes af  $x$ -erne på den måde at en gruppe består af observationer med samme  $x$ -værdi, jf. eksempel 11.1 side 161.

Vi formulerer metoden i lineær algebra-sprog. Lad  $L_1 = \{\xi : \xi_{ij} = \alpha + \beta x_i\}$  være underrummet svarende til modellen med lineær sammenhæng mellem  $x$  og  $y$ , og lad  $L = \{\xi : \xi = \mu_i\}$  være underrummet svarende til  $k$ -stikprøvemodellen. Der gælder at  $L_1 \subset L$ . Fra afsnit 11.1 ved vi at teststørrelsen for at teste  $L_1$  i forhold til  $L$  er

$$F = \frac{\frac{1}{\dim L - \dim L_1} \|\mathbf{p}y - \mathbf{p}_1y\|^2}{\frac{1}{n - \dim L} \|\mathbf{y} - \mathbf{p}y\|^2}$$

hvor  $\mathbf{p}$  og  $\mathbf{p}_1$  er projektorerne på  $L$  og  $L_1$ . Vi ved at  $\dim L - \dim L_1 = 4 - 2 = 2$  og  $n - \dim L = 25 - 4 = 21$ . I den tidligere behandling af eksemplet (side 161) fandt vi  $\|\mathbf{y} - \mathbf{p}y\|^2$  til 101.32;  $\|\mathbf{p}y - \mathbf{p}_1y\|^2$  kan f.eks. udregnes som  $\|\mathbf{y} - \mathbf{p}_1y\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{p}y\|^2 = 111.50 - 101.32 = 10.18$ . Teststørrelsen bliver dermed  $F = 5.09/4.82 = 1.06$  der skal sammenholdes med  $F$ -fordelingen med 2 og 21 frihedsgrader. Tabelopslag viser at testsandsynligheden bliver over 30%, så hypotesen godtages, dvs. der synes at være en lineær sammenhæng mellem varigheden af hypoxien og hypoxantinkoncentrationen. Det fremgår også af figur 11.1.

## 11.7 Opgaver

### Opgave 11.1: Indianere i Peru

Ændringer i menneskers livsbetingelser kan give sig udslag i fysiologiske ændringer, eksempelvis i ændret blodtryk.

En gruppe antropologer undersøgte hvordan blodtrykket ændrer sig hos peruvianske indianere der flyttes fra deres oprindelige primitive samfund i de høje Andesbjerge til den såkaldte civilisation, dvs. storbyen, der i øvrigt ligger i langt mindre højde over havets overflade end deres oprindelig bopæl (Davin (1975), her citeret efter Ryan et al. (1976)). Antropologerne udvalgte en stikprøve på 39 mænd over 21 år der havde undergået en sådan flytning. På hver af disse målte blodtrykket (det systoliske og det diastoliske) samt en række baggrundsvARIABLE, heriblandt alder, antal år siden flytningen, højde, vægt og puls. Desuden har man udregnet endnu en baggrundsvARIABLE, nemlig »brøkdelen af livet levet i de nye omgivelser«, dvs. antal år siden flytning divideret med nuværende alder. Man forestillede sig at denne baggrundsvARIABLE kunne have stor »forklaringsevne«.

| $y$ | $x_1$ | $x_2$ | $y$ | $x_1$ | $x_2$ |
|-----|-------|-------|-----|-------|-------|
| 170 | 0.048 | 71.0  | 114 | 0.474 | 59.5  |
| 120 | 0.273 | 56.5  | 136 | 0.289 | 61.0  |
| 125 | 0.208 | 56.0  | 126 | 0.289 | 57.0  |
| 148 | 0.042 | 61.0  | 124 | 0.538 | 57.5  |
| 140 | 0.040 | 65.0  | 128 | 0.615 | 74.0  |
| 106 | 0.704 | 62.0  | 134 | 0.359 | 72.0  |
| 120 | 0.179 | 53.0  | 112 | 0.610 | 62.5  |
| 108 | 0.893 | 53.0  | 128 | 0.780 | 68.0  |
| 124 | 0.194 | 65.0  | 134 | 0.122 | 63.4  |
| 134 | 0.406 | 57.0  | 128 | 0.286 | 68.0  |
| 116 | 0.394 | 66.5  | 140 | 0.581 | 69.0  |
| 114 | 0.303 | 59.1  | 138 | 0.605 | 73.0  |
| 130 | 0.441 | 64.0  | 118 | 0.233 | 64.0  |
| 118 | 0.514 | 69.5  | 110 | 0.432 | 65.0  |
| 138 | 0.057 | 64.0  | 142 | 0.409 | 71.0  |
| 134 | 0.333 | 56.5  | 134 | 0.222 | 60.2  |
| 120 | 0.417 | 57.0  | 116 | 0.021 | 55.0  |
| 120 | 0.432 | 55.0  | 132 | 0.860 | 70.0  |
| 114 | 0.459 | 57.0  | 152 | 0.741 | 87.0  |
| 124 | 0.263 | 58.0  |     |       |       |

Tabel 11.8 *Indianere i Peru:*  
Sammenhørende værdier af  
 $y$ : systolisk blodtryk (mm Hg),  
 $x_1$ : brøkdelen af livet i de nye  
omgivelser, og  $x_2$ : vægt (kg).

Her vil vi ikke se på hele talmaterialet, men kun på *blodtrykket* (det systoliske) der skal optræde som  $y$ -variabel, og på de to  $x$ -variable *brøkdelen af livet i de nye omgivelser* og *vægt*. Disse er angivet i tabel 11.8 (fra Ryan et al. (1976)).

1. Antropologerne mente at  $x_1$ , brøkdelen levnet i de nye omgivelser, var et godt mål for hvor længe personerne havde levet i de civiliserede omgivelser, og at det derfor måtte være interessant at se om  $x_1$  kunne forklare variationen i blodtrykket  $y$ . Første skridt kunne derfor være at estimere en simpel lineær regressionsmodel med  $x_1$  som forklarende variabel. Gør det!
2. Hvis man i et koordinatsystem afsætter  $y$  mod  $x_1$ , viser det sig imidlertid at det faktisk ikke virker særlig rimeligt at hævde at (middelværdien af)  $y$  afhænger lineært af  $x_1$ . Derfor må man give sig til at overveje om andre af de målte baggrundsvariable med fordel kan inddrages.  
Nu ved man at en persons *vægt* har betydning for den pågældendes blodtryk, så næste modelforslag kunne være en multipel regressionsmodel med både  $x_1$  og  $x_2$  som forklarende variable.
  - a) Estimér parametrene i denne model. Hvad sker der med variansestimaterne?
  - b) Undersøg residualerne for at vurdere modellens kvalitet.
3. Giv en tolkning af slutmodellen i forhold til de peruvianske indianere.

#### Opgave 11.2

Dette er en berømt tosidet variansanalyse-opgave fra Københavns Universitet; som man vil se, indeholder opgaveteksten en vis portion underforstået lokalkendskab:

En student cykler hver dag fra sit hjem til H.C. Ørsted Institutet og tilbage igen. Han kan cykle to forskellige veje, én som han plejer at benytte, og én som han mistænker for at

være en genvej. For at undersøge om det faktisk er en genvej, måler han nogle gange hvor lang tid han er om turen. Resultaterne fremgår af nedenstående skema hvor tiderne er opgivet med 10 sekunder som enhed og ud fra et beregningsnulpunkt på 9 minutter.

|         | genvej |    |   | sædvanlig vej |    |    |    |    |
|---------|--------|----|---|---------------|----|----|----|----|
| udtur   | 4      | -1 | 3 | 13            | 8  | 11 | 5  | 7  |
| hjemtur | 11     | 6  |   | 16            | 18 | 17 | 21 | 19 |

Da det som bekendt kan være vanskeligt at slippe væk fra H.C. Ørsted Institutet på cykel, tager hjemturen gennemsnitligt længere tid end udturen.

Havde studenten ret i sin mistanke?

*Vejledning:* Det er klart at disse resultater må kunne behandles ved tosidet variansanalyse; da cellerne imidlertid ikke indeholder lige mange observationer, kan den sædvanlige formel for projektionen på underrummet svarende til additivitetshypotesen ikke bruges.

### Opgave 11.3

Betragt den simple lineære regressionsmodel  $E Y = \alpha + x\beta$ , og antag at der foreligger et antal sammenhørende værdier  $(y_i, x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Hvordan ser designmatricen ud? Skriv normalligningerne op og løs dem.

Find formler for middelfejlene ( $\sigma$ : standardafvigelse) på  $\hat{\alpha}$  og  $\hat{\beta}$ , samt en formel for korrelationen mellem de to estimatorer. Tip: udnyt formel (11.8).

I visse typer forsøg kan eksperimentator (eller statistiker) selv bestemme  $x$ -værdierne inden for visse grænser. Hvordan skal man vælge  $x$ -erne?

## A En udledning af normalfordelingen

NORMALFORDELINGEN ER MEGET BENYTTET i statistiske modeller. Nogle gange kan man begrunde brugen af den ved henvisninger til Den Centrale Grænseværdisætning, andre gange skyldes det nærmest matematiske bekvemmelighedsgrunde. Der findes imidlertid også argumentationer af formen »hvis man har tænkt sig at analysere data på den-og-den måde, så svarer det indirekte til at antage at observationerne stammer fra den-og-den fordeling«. I dette afsnit vil vi præsentere et eksempel på en sådan argumentation; grundideen hidrører fra Gauß (1809, bog II, afsnit 3).

Den overordnede opgave er at finde et forslag til en type sandsynlighedsfordelinger der kan bruges til at beskrive hvordan observationer fordeler sig tilfældigt omkring en bestemt ukendt værdi  $\mu$ . Vi gør nogle antagelser:

*Antagelse 1:* Fordelingerne er kontinuerte fordelinger på  $\mathbb{R}$ , dvs. de har en kontinuert tæthedsfunktion.

*Antagelse 2:* Parameteren  $\mu$  kan have en vilkårlig reel værdi og er en *positionsparameter*, dvs. modelfunktionen er af formen

$$f(x - \mu), \quad (x, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

for en passende funktion  $f$  som er defineret på hele  $\mathbb{R}$  (og som er kontinuert ifølge antagelse 1).

*Antagelse 3:* Funktionen  $f$  er kontinuert differentiabel.

*Antagelse 4:* Maksimaliseringsestimatet for  $\mu$  skal være gennemsnittet af observationerne, mere præcist: for enhver stikprøve  $x_1, x_2, \dots, x_n$  fra fordelingen med tæthedsfunktion  $x \mapsto f(x - \mu)$ , skal maksimaliseringsestimatet være gennemsnittet  $\bar{x}$ .

Vi skal nu se hvad man kan deducere herudfra.

Log-likelihoodfunktionen svarende til observationerne  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bliver

$$\ln L(\mu) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i - \mu).$$

Den er differentiabel med

$$(\ln L)'(\mu) = \sum_{i=1}^n g(x_i - \mu)$$

hvor  $g = -(\ln f)'$ .



Da  $f$  er en tæthedsfunktion, gælder at  $f(x) \rightarrow 0$  for  $x \rightarrow \pm\infty$ , og derfor vil  $\ln L(\mu) \rightarrow -\infty$  for  $\mu \rightarrow \pm\infty$ ; det betyder at  $\ln L$  antager sit maksimum i (mindst) et punkt  $\hat{\mu}$ , og at dette er et stationært punkt, dvs.  $(\ln L)'(\hat{\mu}) = 0$ . Da det forlanges at  $\hat{\mu} = \bar{x}$ , er vi hermed nået frem til at der skal gælde at

$$\sum_{i=1}^n g(x_i - \bar{x}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

for alle stikprøver  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Tag nu en stikprøve med to elementer  $x$  og  $-x$ ; da gennemsnittet af disse to er 0, giver (A.1) at  $g(x) + g(-x) = 0$ , dvs.  $g(-x) = -g(x)$  for ethvert  $x$ . Specielt er  $g(0) = 0$ .

Tag dernæst en stikprøve med tre elementer  $x$ ,  $y$  og  $-(x+y)$ ; da deres gennemsnit er 0, giver (A.1) at  $g(x) + g(y) + g(-(x+y)) = 0$ , og da vi netop har vist at  $g$  er en lige funktion, kan vi konkludere at  $g(x+y) = g(x) + g(y)$  for alle  $x$  og  $y$ . Det følger nu af sætning A.1 nedenfor at funktionen  $g$  må være af formen  $g(x) = cx$  for en eller anden konstant  $c$ . Da  $g$  var defineret til at være  $-(\ln f)'$ , må  $\ln f$  derfor være af formen  $\ln f(x) = b - \frac{1}{2}cx^2$ , hvor  $b$  er en integrationskonstant, og så bliver  $f$  af formen  $f(x) = a \exp(-\frac{1}{2}cx^2)$ , hvor  $a = e^b$ . Da  $f$  skal integrere til 1, må konstanten  $c$  nødvendigvis være positiv – og man kunne så passende omdøbe den til  $\sigma^2$  – og konstanten  $a$  er entydigt bestemt (og der gælder at  $a = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ , jf. side 66). Funktionen  $f$  må altså nødvendigvis være tæthedsfunktionen for normalfordelingen med middelværdi 0 og varians  $\sigma^2$ , og den søgte type fordelinger er således normalfordelingerne med middelværdi  $\mu$  og varians  $\sigma^2$ .

## Cauchys funktionalligning

I dette afsnit vises en sætning som anvendes i det forrige, og som derudover må siges at høre med til den »matematisk almindelse«.

### SÆTNING A.1

*Antag at  $f$  er en reel funktion med den egenskab at*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (\text{A.2})$$

*for alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . Hvis  $f$  er kontinuert i et punkt  $x_0 \neq 0$ , så findes der et tal  $c \in \mathbb{R}$  sådan at  $f(x) = cx$  for alle  $x \in \mathbb{R}$ .*

### BEVIS

Vi ser først på hvad man kan deducere ud fra betingelsen  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

1. Hvis man sætter  $x = y = 0$ , fås at  $f(0) = f(0) + f(0)$ , dvs.  $f(0) = 0$ .
2. Hvis man sætter  $y = -x$ , fås at for et vilkårligt  $x \in \mathbb{R}$  er  $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$ , altså  $f(-x) = -f(x)$ .

3. Ved gentagne anvendelser af (A.2) fås at for vilkårlige  $x_1, x_2, \dots, x_n$  er

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n). \quad (\text{A.3})$$

Tag nu et reelt tal  $x \neq 0$  og naturlige tal  $p$  og  $q$ , og sæt  $a = p/q$ . Da

$$f(\underbrace{ax + ax + \dots + ax}_{q \text{ led}}) = f(\underbrace{x + x + \dots + x}_{p \text{ led}}),$$

giver (A.3) at  $qf(ax) = pf(x)$  eller  $f(ax) = af(x)$ . Vi kan konkludere at for alle rationale tal  $a$  og alle reelle tal  $x$  er

$$f(ax) = af(x). \quad (\text{A.4})$$

Indtil videre har vi ikke benyttet at  $f$  er kontinuert i  $x_0$ , men det kommer nu. Lad  $x$  være et reelt tal forskelligt fra 0. Der findes en følge  $(a_n)$  af rationale tal som konvergerer mod  $x_0/x$ , og som alle er forskellige fra 0. Da følgen  $(a_n x)$  konvergerer mod  $x_0$  og  $f$  er kontinuert i  $x_0$ , vil

$$\frac{f(a_n x)}{a_n} \rightarrow \frac{f(x_0)}{x_0/x} = \frac{f(x_0)}{x_0} x.$$

Men ifølge (A.4) er  $\frac{f(a_n x)}{a_n} = f(x)$  for ethvert  $a_n$ , så der må åbenbart gælde at

$f(x) = \frac{f(x_0)}{x_0} x$ , altså  $f(x) = cx$  hvor  $c = \frac{f(x_0)}{x_0}$ . Da  $x$  var vilkårlig (og da  $c$  ikke afhænger af  $x$ ), er sætningen hermed vist.  $\square$

Bemærkning: Kontinuitetsantagelsen i sætning A.1 er i høj grad nødvendig. Her er et meget simpelt eksempel på en funktion som opfylder (A.2), men som ikke er kontinuert nogetsteds (bortset fra i  $x = 0$ ):

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{hvis } x \text{ er rational,} \\ 2x & \text{hvis } x/\sqrt{2} \text{ er rational,} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$



## B Nogle resultater fra lineær algebra

DE NÆSTE SIDER præsenterer nogle resultater fra lineær algebra, nærmere bestemt fra teorien for endeligdimensionale reelle vektorrum med indre produkt.

### Notation og definitioner

Vektorrummet betegnes typisk  $V$ . Underrum betegnes  $L, L_1, L_2, \dots$ . Vektorer betegnes normalt med fede bogstaver ( $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$  osv.). Nulvektoren er  $\mathbf{0}$ . Når vi repræsenterer vektorerne ved hjælp af deres koordinatsæt i forhold til en valgt basis, skriver vi koordinatsættene som *søjlematricer*.

Lineære afbildninger [og deres matricer] betegnes ofte med bogstaver som  $A$  og  $B$ ; den transponerede til  $A$  betegnes  $A'$ . Nulrummet for  $A$  betegnes  $\mathcal{N}(A)$  og billedrummet  $\mathcal{R}(A)$ ; rangen af  $A$  er tallet  $\dim \mathcal{R}(A)$ . Den identiske afbildning [enhedsmatricen] betegnes  $I$ .

Skalarproduktet eller det indre produkt af  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  skrives  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  og i matrixnotation  $\mathbf{u}'\mathbf{v}$ . Længden af  $\mathbf{u}$  skrives  $\|\mathbf{u}\|$ .

To vektorer  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  er *ortogonale*, kort  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ , hvis  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ . To underrum  $L_1$  og  $L_2$  er ortogonale, kort  $L_1 \perp L_2$ , hvis enhver vektor i  $L_1$  er ortogonal på enhver vektor i  $L_2$ . I så fald defineres den ortogonale direkte sum af  $L_1$  og  $L_2$  som underrummet

$$L_1 \oplus L_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 : \mathbf{u}_1 \in L_1, \mathbf{u}_2 \in L_2\}.$$

Hvis  $\mathbf{v} \in L_1 \oplus L_2$ , så har  $\mathbf{v}$  en entydig opspaltning som  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$  hvor  $\mathbf{u}_1 \in L_1$  og  $\mathbf{u}_2 \in L_2$ . Der gælder at  $\dim L_1 \oplus L_2 = \dim L_1 + \dim L_2$ .

Det *ortogonale komplement* til underrummet  $L$  betegnes  $L^\perp$ . Der gælder at  $V = L \oplus L^\perp$ . *Ortogonalprojektion* af  $V$  på underrummet  $L$  er den lineære afbildning  $p : V \rightarrow V$  for hvilken  $p\mathbf{x} \in L$  og  $\mathbf{x} - p\mathbf{x} \in L^\perp$  for alle  $\mathbf{x} \in V$ .

En symmetrisk lineær afbildning [en symmetrisk matrix]  $A$  er *positivt semidefinit* hvis  $\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle \geq 0$  [eller  $\mathbf{x}'A\mathbf{x} \geq 0$ ] for alle  $\mathbf{x}$ ; den er *positivt definit* hvis ulighedstegnet er skarpt for alle  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Vi vil undertiden bruge skrivemåderne  $A \geq 0$  og  $A > 0$  til at angive at  $A$  er positivt semidefinit hhv. positivt definit.

### Forskellige resultater

Denne sætning turde være velkendt fra lineær algebra:

SÆTNING B.1

Lad  $A$  være en lineær afbildning af  $\mathbb{R}^p$  ind i  $\mathbb{R}^n$ . Da gælder at  $\mathcal{R}(A)$  og  $\mathcal{N}(A')$  er hinandens ortogonale komplement (i  $\mathbb{R}^n$ ), eller kort  $\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A')$ .

$$\begin{array}{cc} V & L \\ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} & \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & A \\ A' & \mathcal{N}(A) \\ & \mathcal{R}(A) \\ & I \\ & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \mathbf{u}'\mathbf{v} & \|\mathbf{u}\| \\ & \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \\ & L_1 \perp L_2 \end{array}$$

$$L_1 \oplus L_2$$

$$L^\perp$$

$$p$$

$$A \geq 0$$

$$A > 0$$

## KOROLLAR B.2

Lad  $A$  være en symmetrisk lineær afbildning af  $\mathbb{R}^n$  ind i sig selv. Da gælder at  $\mathcal{R}(A)$  og  $\mathcal{N}(A)$  er hinandens ortogonale komplementar (i  $\mathbb{R}^n$ ).

## KOROLLAR B.3

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA').$$

## BEVIS FOR KOROLLAR B.3

Ifølge sætningen kan vi vise korollaret ved at vise at  $\mathcal{N}(A') = \mathcal{N}(AA')$ , altså at  $A'u = \mathbf{0} \Leftrightarrow AA'u = \mathbf{0}$ .

Det er klart at  $A'\mathbf{0} \Rightarrow AA'u = \mathbf{0}$ . Vi behøver således kun vise at  $AA'u = \mathbf{0} \Rightarrow A'u = \mathbf{0}$ . Antag derfor at  $AA'u = \mathbf{0}$ . Da  $A(A'u) = \mathbf{0}$ , er  $A'u \in \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A')^\perp$ , og da automatisk  $A'u \in \mathcal{R}(A')$ , er  $A'u \in \mathcal{R}(A')^\perp \cap \mathcal{R}(A') = \{\mathbf{0}\}$ .  $\square$

## SÆTNING B.4

Lad  $A$  og  $B$  være injektive lineære afbildninger af  $\mathbb{R}^p$  ind i  $\mathbb{R}^n$  således at  $AA' = BB'$ . Så findes en isometri  $C$  af  $\mathbb{R}^p$  ind i sig selv med den egenskab at  $A = BC$ .

## BEVIS

Sæt  $L = \mathcal{R}(A)$ . Ifølge antagelsen og korollar B.3 er  $L = \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA') = \mathcal{R}(BB') = \mathcal{R}(B)$ .

Da  $A$  er injektiv, er  $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$ ; ifølge sætning B.1 er da  $\mathcal{R}(A') = \{\mathbf{0}\}^\perp = \mathbb{R}^p$ , dvs. til et givet  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  har ligningen  $A'\mathbf{x} = \mathbf{u}$  mindst en løsning  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , og da  $\mathcal{N}(A') = \mathcal{R}(A)^\perp = L^\perp$ , er der i  $L$  præcis én løsning  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$  til  $A'\mathbf{x} = \mathbf{u}$ .

Vi vil vise at den herved definerede afbildning  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{u})$  af  $\mathbb{R}^p$  ind i  $L$  er lineær. Lad  $\mathbf{u}_1$  og  $\mathbf{u}_2$  være to vektorer i  $\mathbb{R}^p$  og  $\alpha_1$  og  $\alpha_2$  to skalarer. Da er

$$\begin{aligned} A'(\mathbf{x}(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2)) &= \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 \\ &= \alpha_1A'\mathbf{x}(\mathbf{u}_1) + \alpha_2A'\mathbf{x}(\mathbf{u}_2) \\ &= A'(\alpha_1\mathbf{x}(\mathbf{u}_1) + \alpha_2\mathbf{x}(\mathbf{u}_2)), \end{aligned}$$

og da ligningen  $A'\mathbf{x} = \mathbf{u}$  som nævnt har en entydig løsning  $\mathbf{x} \in L$ , følger heraf at  $\mathbf{x}(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2) = \alpha_1\mathbf{x}(\mathbf{u}_1) + \alpha_2\mathbf{x}(\mathbf{u}_2)$ , hvilket skulle vises.

Vi kan derfor definere en lineær afbildning  $C : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  givet ved  $C\mathbf{u} = B'\mathbf{x}(\mathbf{u})$ . For  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  er da  $BC\mathbf{u} = BB'\mathbf{x}(\mathbf{u}) = AA'\mathbf{x}(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ , altså  $A = BC$ .

Afslutningsvis vil vi vise at  $C$  bevarer indre produkt, hvoraf specielt følger at den er en isometri: For  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^p$  er  $\langle C\mathbf{u}_1, C\mathbf{u}_2 \rangle = \langle B'\mathbf{x}(\mathbf{u}_1), B'\mathbf{x}(\mathbf{u}_2) \rangle = \langle \mathbf{x}(\mathbf{u}_1), BB'\mathbf{x}(\mathbf{u}_2) \rangle = \langle \mathbf{x}(\mathbf{u}_1), AA'\mathbf{x}(\mathbf{u}_2) \rangle = \langle A'\mathbf{x}(\mathbf{u}_1), A'\mathbf{x}(\mathbf{u}_2) \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ .  $\square$

## SÆTNING B.5

Antag at  $A$  er en symmetrisk og positiv semidefinit lineær afbildning af  $\mathbb{R}^n$  ind i sig selv. Der findes netop én symmetrisk og positivt semidefinit lineær afbildning  $A^{1/2}$  af  $\mathbb{R}^n$  ind i sig selv med den egenskab at  $A^{1/2}A^{1/2} = A$ .

## BEVIS

Lad  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  være en ortonormalbasis af egenvektorer for  $A$ , og lad de tilhørende egenverdier være  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ . Hvis vi definerer  $A^{1/2}$  som den lineære

afbildning der afbilder  $\mathbf{e}_j$  over i  $\lambda_j^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , har vi en afbildning med den ønskede egenskab.

Antag at  $A^*$  er en løsning, dvs.  $A^*$  er symmetrisk og positivt semidefinit og  $A^* A^* = A$ . Der findes en ortonormalbasis  $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$  af egenvektorer for  $A^*$ ; lad de tilhørende egenverdier være  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \geq 0$ . Da  $A\mathbf{e}_j^* = A^* A^* \mathbf{e}_j^* = \mu_j^2 \mathbf{e}_j^*$ , er  $\mathbf{e}_j^*$  en  $A$ -egenvektor med tilhørende egenverdi  $\mu_j^2$ . Deraf følger at  $A^*$  nødvendigvis må have de samme egenrum som  $A$  og med egenverdier som er de ikke-negative kvadratrødder af de tilsvarende  $A$ -egenverdier, altså  $A^* = A^{\frac{1}{2}}$ .  $\square$

#### SÆTNING B.6

Antag at  $A$  er en symmetrisk og positiv semidefinit lineær afbildning af  $\mathbb{R}^n$  ind i sig selv, og sæt  $p = \dim \mathcal{R}(A)$ .

Da findes en injektiv lineær afbildning  $B$  af  $\mathbb{R}^p$  ind i  $\mathbb{R}^n$  med den egenskab at  $BB' = A$ , og  $B$  er entydigt bestemt på nær isometri.

#### BEVIS

Lad  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  være en ortonormalbasis af egenvektorer for  $A$  med tilhørende egenvektorer  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  hvor  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$  og  $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \dots = \lambda_n = 0$ .

Som  $B$  kan vi bruge den lineære afbildning hvis matrixrepræsentation i forhold til standardbasen i  $\mathbb{R}^p$  og basen  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  i  $\mathbb{R}^n$  er den  $n \times p$ -matrix som på den  $(i, j)$ -te plads har  $\lambda_i^{\frac{1}{2}}$  hvis  $i = j \leq p$  og 0 ellers. Entydigheden af  $B$  følger f.eks. af sætning B.4.  $\square$



## C Tabeller

I FØR-COMPUTER-ÆRAEN var tabelværker over blandt andet fordelingsfunktioner og inverse fordelingsfunktioner for de gængse fordelinger et uundværligt arbejdsredskab for den praktisk arbejdende statistiker. De følgende sider indeholder nogle få mindre eksempler på sådanne statistiske tabeller.

Til orientering: For en sandsynlighedsfordeling med strengt voksende og kontinuert fordelingsfunktion  $F$  defineres  $\alpha$ -fraktilen  $x_\alpha$  som løsningen til ligningen  $F(x) = \alpha$ ; her er  $0 < \alpha < 1$ . (Hvis  $F$  ikke vides at være strengt voksende og kontinuert, kan man definere mængden af  $\alpha$ -fraktiler som det afsluttede interval med endepunkter  $\sup\{x : F(x) < \alpha\}$  og  $\inf\{x : F(x) > \alpha\}$ .)



Fraktiler i  $\chi^2$ -fordelingen med  $f$  frihedsgrader

| $f$ | Sandsynlighed i procent |       |       |       |       |       |       |
|-----|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|     | 50                      | 90    | 95    | 97.5  | 99    | 99.5  | 99.9  |
| 1   | 0.45                    | 2.71  | 3.84  | 5.02  | 6.63  | 7.88  | 10.83 |
| 2   | 1.39                    | 4.61  | 5.99  | 7.38  | 9.21  | 10.60 | 13.82 |
| 3   | 2.37                    | 6.25  | 7.81  | 9.35  | 11.34 | 12.84 | 16.27 |
| 4   | 3.36                    | 7.78  | 9.49  | 11.14 | 13.28 | 14.86 | 18.47 |
| 5   | 4.35                    | 9.24  | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 | 20.52 |
| 6   | 5.35                    | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 | 22.46 |
| 7   | 6.35                    | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 | 24.32 |
| 8   | 7.34                    | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.95 | 26.12 |
| 9   | 8.34                    | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 | 27.88 |
| 10  | 9.34                    | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 | 29.59 |
| 11  | 10.34                   | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.76 | 31.26 |
| 12  | 11.34                   | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 | 32.91 |
| 13  | 12.34                   | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 | 34.53 |
| 14  | 13.34                   | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 | 36.12 |
| 15  | 14.34                   | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 | 37.70 |
| 16  | 15.34                   | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 | 39.25 |
| 17  | 16.34                   | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 | 40.79 |
| 18  | 17.34                   | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 | 42.31 |
| 19  | 18.34                   | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 | 43.82 |
| 20  | 19.34                   | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 | 45.31 |
| 21  | 20.34                   | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 | 46.80 |
| 22  | 21.34                   | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 | 48.27 |
| 23  | 22.34                   | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 | 49.73 |
| 24  | 23.34                   | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 | 51.18 |
| 25  | 24.34                   | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 | 52.62 |
| 26  | 25.34                   | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 | 54.05 |
| 27  | 26.34                   | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.64 | 55.48 |
| 28  | 27.34                   | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 | 56.89 |
| 29  | 28.34                   | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 | 58.30 |
| 30  | 29.34                   | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 | 59.70 |
| 31  | 30.34                   | 41.42 | 44.99 | 48.23 | 52.19 | 55.00 | 61.10 |
| 32  | 31.34                   | 42.58 | 46.19 | 49.48 | 53.49 | 56.33 | 62.49 |
| 33  | 32.34                   | 43.75 | 47.40 | 50.73 | 54.78 | 57.65 | 63.87 |
| 34  | 33.34                   | 44.90 | 48.60 | 51.97 | 56.06 | 58.96 | 65.25 |
| 35  | 34.34                   | 46.06 | 49.80 | 53.20 | 57.34 | 60.27 | 66.62 |
| 36  | 35.34                   | 47.21 | 51.00 | 54.44 | 58.62 | 61.58 | 67.99 |
| 37  | 36.34                   | 48.36 | 52.19 | 55.67 | 59.89 | 62.88 | 69.35 |
| 38  | 37.34                   | 49.51 | 53.38 | 56.90 | 61.16 | 64.18 | 70.70 |
| 39  | 38.34                   | 50.66 | 54.57 | 58.12 | 62.43 | 65.48 | 72.05 |
| 40  | 39.34                   | 51.81 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 | 73.40 |

Fraktiler i  $\chi^2$ -fordelingen med  $f$  frihedsgrader

| $f$ | Sandsynlighed i procent |       |        |        |        |        |        |
|-----|-------------------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     | 50                      | 90    | 95     | 97.5   | 99     | 99.5   | 99.9   |
| 41  | 40.34                   | 52.95 | 56.94  | 60.56  | 64.95  | 68.05  | 74.74  |
| 42  | 41.34                   | 54.09 | 58.12  | 61.78  | 66.21  | 69.34  | 76.08  |
| 43  | 42.34                   | 55.23 | 59.30  | 62.99  | 67.46  | 70.62  | 77.42  |
| 44  | 43.34                   | 56.37 | 60.48  | 64.20  | 68.71  | 71.89  | 78.75  |
| 45  | 44.34                   | 57.51 | 61.66  | 65.41  | 69.96  | 73.17  | 80.08  |
| 46  | 45.34                   | 58.64 | 62.83  | 66.62  | 71.20  | 74.44  | 81.40  |
| 47  | 46.34                   | 59.77 | 64.00  | 67.82  | 72.44  | 75.70  | 82.72  |
| 48  | 47.34                   | 60.91 | 65.17  | 69.02  | 73.68  | 76.97  | 84.04  |
| 49  | 48.33                   | 62.04 | 66.34  | 70.22  | 74.92  | 78.23  | 85.35  |
| 50  | 49.33                   | 63.17 | 67.50  | 71.42  | 76.15  | 79.49  | 86.66  |
| 51  | 50.33                   | 64.30 | 68.67  | 72.62  | 77.39  | 80.75  | 87.97  |
| 52  | 51.33                   | 65.42 | 69.83  | 73.81  | 78.62  | 82.00  | 89.27  |
| 53  | 52.33                   | 66.55 | 70.99  | 75.00  | 79.84  | 83.25  | 90.57  |
| 54  | 53.33                   | 67.67 | 72.15  | 76.19  | 81.07  | 84.50  | 91.87  |
| 55  | 54.33                   | 68.80 | 73.31  | 77.38  | 82.29  | 85.75  | 93.17  |
| 56  | 55.33                   | 69.92 | 74.47  | 78.57  | 83.51  | 86.99  | 94.46  |
| 57  | 56.33                   | 71.04 | 75.62  | 79.75  | 84.73  | 88.24  | 95.75  |
| 58  | 57.33                   | 72.16 | 76.78  | 80.94  | 85.95  | 89.48  | 97.04  |
| 59  | 58.33                   | 73.28 | 77.93  | 82.12  | 87.17  | 90.72  | 98.32  |
| 60  | 59.33                   | 74.40 | 79.08  | 83.30  | 88.38  | 91.95  | 99.61  |
| 61  | 60.33                   | 75.51 | 80.23  | 84.48  | 89.59  | 93.19  | 100.89 |
| 62  | 61.33                   | 76.63 | 81.38  | 85.65  | 90.80  | 94.42  | 102.17 |
| 63  | 62.33                   | 77.75 | 82.53  | 86.83  | 92.01  | 95.65  | 103.44 |
| 64  | 63.33                   | 78.86 | 83.68  | 88.00  | 93.22  | 96.88  | 104.72 |
| 65  | 64.33                   | 79.97 | 84.82  | 89.18  | 94.42  | 98.11  | 105.99 |
| 66  | 65.33                   | 81.09 | 85.96  | 90.35  | 95.63  | 99.33  | 107.26 |
| 67  | 66.33                   | 82.20 | 87.11  | 91.52  | 96.83  | 100.55 | 108.53 |
| 68  | 67.33                   | 83.31 | 88.25  | 92.69  | 98.03  | 101.78 | 109.79 |
| 69  | 68.33                   | 84.42 | 89.39  | 93.86  | 99.23  | 103.00 | 111.06 |
| 70  | 69.33                   | 85.53 | 90.53  | 95.02  | 100.43 | 104.21 | 112.32 |
| 71  | 70.33                   | 86.64 | 91.67  | 96.19  | 101.62 | 105.43 | 113.58 |
| 72  | 71.33                   | 87.74 | 92.81  | 97.35  | 102.82 | 106.65 | 114.84 |
| 73  | 72.33                   | 88.85 | 93.95  | 98.52  | 104.01 | 107.86 | 116.09 |
| 74  | 73.33                   | 89.96 | 95.08  | 99.68  | 105.20 | 109.07 | 117.35 |
| 75  | 74.33                   | 91.06 | 96.22  | 100.84 | 106.39 | 110.29 | 118.60 |
| 76  | 75.33                   | 92.17 | 97.35  | 102.00 | 107.58 | 111.50 | 119.85 |
| 77  | 76.33                   | 93.27 | 98.48  | 103.16 | 108.77 | 112.70 | 121.10 |
| 78  | 77.33                   | 94.37 | 99.62  | 104.32 | 109.96 | 113.91 | 122.35 |
| 79  | 78.33                   | 95.48 | 100.75 | 105.47 | 111.14 | 115.12 | 123.59 |
| 80  | 79.33                   | 96.58 | 101.88 | 106.63 | 112.33 | 116.32 | 124.84 |

90% fraktiler i  $F$ -fordelingen.

$f_1$  er antal frihedsgrader for tælleren,  $f_2$  er antal frihedsgrader for nævneren.

| $f_2$ | $f_1$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 15    |
| 1     | 39.86 | 49.50 | 53.59 | 55.83 | 57.24 | 58.20 | 58.91 | 59.44 | 59.86 | 60.19 | 61.22 |
| 2     | 8.53  | 9.00  | 9.16  | 9.24  | 9.29  | 9.33  | 9.35  | 9.37  | 9.38  | 9.39  | 9.42  |
| 3     | 5.54  | 5.46  | 5.39  | 5.34  | 5.31  | 5.28  | 5.27  | 5.25  | 5.24  | 5.23  | 5.20  |
| 4     | 4.54  | 4.32  | 4.19  | 4.11  | 4.05  | 4.01  | 3.98  | 3.95  | 3.94  | 3.92  | 3.87  |
| 5     | 4.06  | 3.78  | 3.62  | 3.52  | 3.45  | 3.40  | 3.37  | 3.34  | 3.32  | 3.30  | 3.24  |
| 6     | 3.78  | 3.46  | 3.29  | 3.18  | 3.11  | 3.05  | 3.01  | 2.98  | 2.96  | 2.94  | 2.87  |
| 7     | 3.59  | 3.26  | 3.07  | 2.96  | 2.88  | 2.83  | 2.78  | 2.75  | 2.72  | 2.70  | 2.63  |
| 8     | 3.46  | 3.11  | 2.92  | 2.81  | 2.73  | 2.67  | 2.62  | 2.59  | 2.56  | 2.54  | 2.46  |
| 9     | 3.36  | 3.01  | 2.81  | 2.69  | 2.61  | 2.55  | 2.51  | 2.47  | 2.44  | 2.42  | 2.34  |
| 10    | 3.29  | 2.92  | 2.73  | 2.61  | 2.52  | 2.46  | 2.41  | 2.38  | 2.35  | 2.32  | 2.24  |
| 11    | 3.23  | 2.86  | 2.66  | 2.54  | 2.45  | 2.39  | 2.34  | 2.30  | 2.27  | 2.25  | 2.17  |
| 12    | 3.18  | 2.81  | 2.61  | 2.48  | 2.39  | 2.33  | 2.28  | 2.24  | 2.21  | 2.19  | 2.10  |
| 13    | 3.14  | 2.76  | 2.56  | 2.43  | 2.35  | 2.28  | 2.23  | 2.20  | 2.16  | 2.14  | 2.05  |
| 14    | 3.10  | 2.73  | 2.52  | 2.39  | 2.31  | 2.24  | 2.19  | 2.15  | 2.12  | 2.10  | 2.01  |
| 15    | 3.07  | 2.70  | 2.49  | 2.36  | 2.27  | 2.21  | 2.16  | 2.12  | 2.09  | 2.06  | 1.97  |
| 16    | 3.05  | 2.67  | 2.46  | 2.33  | 2.24  | 2.18  | 2.13  | 2.09  | 2.06  | 2.03  | 1.94  |
| 17    | 3.03  | 2.64  | 2.44  | 2.31  | 2.22  | 2.15  | 2.10  | 2.06  | 2.03  | 2.00  | 1.91  |
| 18    | 3.01  | 2.62  | 2.42  | 2.29  | 2.20  | 2.13  | 2.08  | 2.04  | 2.00  | 1.98  | 1.89  |
| 19    | 2.99  | 2.61  | 2.40  | 2.27  | 2.18  | 2.11  | 2.06  | 2.02  | 1.98  | 1.96  | 1.86  |
| 20    | 2.97  | 2.59  | 2.38  | 2.25  | 2.16  | 2.09  | 2.04  | 2.00  | 1.96  | 1.94  | 1.84  |
| 22    | 2.95  | 2.56  | 2.35  | 2.22  | 2.13  | 2.06  | 2.01  | 1.97  | 1.93  | 1.90  | 1.81  |
| 24    | 2.93  | 2.54  | 2.33  | 2.19  | 2.10  | 2.04  | 1.98  | 1.94  | 1.91  | 1.88  | 1.78  |
| 26    | 2.91  | 2.52  | 2.31  | 2.17  | 2.08  | 2.01  | 1.96  | 1.92  | 1.88  | 1.86  | 1.76  |
| 28    | 2.89  | 2.50  | 2.29  | 2.16  | 2.06  | 2.00  | 1.94  | 1.90  | 1.87  | 1.84  | 1.74  |
| 30    | 2.88  | 2.49  | 2.28  | 2.14  | 2.05  | 1.98  | 1.93  | 1.88  | 1.85  | 1.82  | 1.72  |
| 40    | 2.84  | 2.44  | 2.23  | 2.09  | 2.00  | 1.93  | 1.87  | 1.83  | 1.79  | 1.76  | 1.66  |
| 50    | 2.81  | 2.41  | 2.20  | 2.06  | 1.97  | 1.90  | 1.84  | 1.80  | 1.76  | 1.73  | 1.63  |
| 75    | 2.77  | 2.37  | 2.16  | 2.02  | 1.93  | 1.85  | 1.80  | 1.75  | 1.72  | 1.69  | 1.58  |
| 100   | 2.76  | 2.36  | 2.14  | 2.00  | 1.91  | 1.83  | 1.78  | 1.73  | 1.69  | 1.66  | 1.56  |
| 150   | 2.74  | 2.34  | 2.12  | 1.98  | 1.89  | 1.81  | 1.76  | 1.71  | 1.67  | 1.64  | 1.53  |
| 200   | 2.73  | 2.33  | 2.11  | 1.97  | 1.88  | 1.80  | 1.75  | 1.70  | 1.66  | 1.63  | 1.52  |
| 300   | 2.72  | 2.32  | 2.10  | 1.96  | 1.87  | 1.79  | 1.74  | 1.69  | 1.65  | 1.62  | 1.51  |
| 400   | 2.72  | 2.32  | 2.10  | 1.96  | 1.86  | 1.79  | 1.73  | 1.69  | 1.65  | 1.61  | 1.50  |
| 500   | 2.72  | 2.31  | 2.09  | 1.96  | 1.86  | 1.79  | 1.73  | 1.68  | 1.64  | 1.61  | 1.50  |

95% fraktiler i  $F$ -fordelingen.

$f_1$  er antal frihedsgrader for tælleren,  $f_2$  er antal frihedsgrader for nævneren.

| $f_2$ | $f_1$  |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|       | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 15     |
| 1     | 161.45 | 199.50 | 215.71 | 224.58 | 230.16 | 233.99 | 236.77 | 238.88 | 240.54 | 241.88 | 245.95 |
| 2     | 18.51  | 19.00  | 19.16  | 19.25  | 19.30  | 19.33  | 19.35  | 19.37  | 19.38  | 19.40  | 19.43  |
| 3     | 10.13  | 9.55   | 9.28   | 9.12   | 9.01   | 8.94   | 8.89   | 8.85   | 8.81   | 8.79   | 8.70   |
| 4     | 7.71   | 6.94   | 6.59   | 6.39   | 6.26   | 6.16   | 6.09   | 6.04   | 6.00   | 5.96   | 5.86   |
| 5     | 6.61   | 5.79   | 5.41   | 5.19   | 5.05   | 4.95   | 4.88   | 4.82   | 4.77   | 4.74   | 4.62   |
| 6     | 5.99   | 5.14   | 4.76   | 4.53   | 4.39   | 4.28   | 4.21   | 4.15   | 4.10   | 4.06   | 3.94   |
| 7     | 5.59   | 4.74   | 4.35   | 4.12   | 3.97   | 3.87   | 3.79   | 3.73   | 3.68   | 3.64   | 3.51   |
| 8     | 5.32   | 4.46   | 4.07   | 3.84   | 3.69   | 3.58   | 3.50   | 3.44   | 3.39   | 3.35   | 3.22   |
| 9     | 5.12   | 4.26   | 3.86   | 3.63   | 3.48   | 3.37   | 3.29   | 3.23   | 3.18   | 3.14   | 3.01   |
| 10    | 4.96   | 4.10   | 3.71   | 3.48   | 3.33   | 3.22   | 3.14   | 3.07   | 3.02   | 2.98   | 2.85   |
| 11    | 4.84   | 3.98   | 3.59   | 3.36   | 3.20   | 3.09   | 3.01   | 2.95   | 2.90   | 2.85   | 2.72   |
| 12    | 4.75   | 3.89   | 3.49   | 3.26   | 3.11   | 3.00   | 2.91   | 2.85   | 2.80   | 2.75   | 2.62   |
| 13    | 4.67   | 3.81   | 3.41   | 3.18   | 3.03   | 2.92   | 2.83   | 2.77   | 2.71   | 2.67   | 2.53   |
| 14    | 4.60   | 3.74   | 3.34   | 3.11   | 2.96   | 2.85   | 2.76   | 2.70   | 2.65   | 2.60   | 2.46   |
| 15    | 4.54   | 3.68   | 3.29   | 3.06   | 2.90   | 2.79   | 2.71   | 2.64   | 2.59   | 2.54   | 2.40   |
| 16    | 4.49   | 3.63   | 3.24   | 3.01   | 2.85   | 2.74   | 2.66   | 2.59   | 2.54   | 2.49   | 2.35   |
| 17    | 4.45   | 3.59   | 3.20   | 2.96   | 2.81   | 2.70   | 2.61   | 2.55   | 2.49   | 2.45   | 2.31   |
| 18    | 4.41   | 3.55   | 3.16   | 2.93   | 2.77   | 2.66   | 2.58   | 2.51   | 2.46   | 2.41   | 2.27   |
| 19    | 4.38   | 3.52   | 3.13   | 2.90   | 2.74   | 2.63   | 2.54   | 2.48   | 2.42   | 2.38   | 2.23   |
| 20    | 4.35   | 3.49   | 3.10   | 2.87   | 2.71   | 2.60   | 2.51   | 2.45   | 2.39   | 2.35   | 2.20   |
| 22    | 4.30   | 3.44   | 3.05   | 2.82   | 2.66   | 2.55   | 2.46   | 2.40   | 2.34   | 2.30   | 2.15   |
| 24    | 4.26   | 3.40   | 3.01   | 2.78   | 2.62   | 2.51   | 2.42   | 2.36   | 2.30   | 2.25   | 2.11   |
| 26    | 4.23   | 3.37   | 2.98   | 2.74   | 2.59   | 2.47   | 2.39   | 2.32   | 2.27   | 2.22   | 2.07   |
| 28    | 4.20   | 3.34   | 2.95   | 2.71   | 2.56   | 2.45   | 2.36   | 2.29   | 2.24   | 2.19   | 2.04   |
| 30    | 4.17   | 3.32   | 2.92   | 2.69   | 2.53   | 2.42   | 2.33   | 2.27   | 2.21   | 2.16   | 2.01   |
| 40    | 4.08   | 3.23   | 2.84   | 2.61   | 2.45   | 2.34   | 2.25   | 2.18   | 2.12   | 2.08   | 1.92   |
| 50    | 4.03   | 3.18   | 2.79   | 2.56   | 2.40   | 2.29   | 2.20   | 2.13   | 2.07   | 2.03   | 1.87   |
| 75    | 3.97   | 3.12   | 2.73   | 2.49   | 2.34   | 2.22   | 2.13   | 2.06   | 2.01   | 1.96   | 1.80   |
| 100   | 3.94   | 3.09   | 2.70   | 2.46   | 2.31   | 2.19   | 2.10   | 2.03   | 1.97   | 1.93   | 1.77   |
| 150   | 3.90   | 3.06   | 2.66   | 2.43   | 2.27   | 2.16   | 2.07   | 2.00   | 1.94   | 1.89   | 1.73   |
| 200   | 3.89   | 3.04   | 2.65   | 2.42   | 2.26   | 2.14   | 2.06   | 1.98   | 1.93   | 1.88   | 1.72   |
| 300   | 3.87   | 3.03   | 2.63   | 2.40   | 2.24   | 2.13   | 2.04   | 1.97   | 1.91   | 1.86   | 1.70   |
| 400   | 3.86   | 3.02   | 2.63   | 2.39   | 2.24   | 2.12   | 2.03   | 1.96   | 1.90   | 1.85   | 1.69   |
| 500   | 3.86   | 3.01   | 2.62   | 2.39   | 2.23   | 2.12   | 2.03   | 1.96   | 1.90   | 1.85   | 1.69   |

97.5% fraktiler i  $F$ -fordelingen. $f_1$  er antal frihedsgrader for tælleren,  $f_2$  er antal frihedsgrader for nævneren.

| $f_2$ | $f_1$  |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|       | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 15     |
| 1     | 647.79 | 799.50 | 864.16 | 899.58 | 921.85 | 937.11 | 948.22 | 956.66 | 963.28 | 968.63 | 984.87 |
| 2     | 38.51  | 39.00  | 39.17  | 39.25  | 39.30  | 39.33  | 39.36  | 39.37  | 39.39  | 39.40  | 39.43  |
| 3     | 17.44  | 16.04  | 15.44  | 15.10  | 14.88  | 14.73  | 14.62  | 14.54  | 14.47  | 14.42  | 14.25  |
| 4     | 12.22  | 10.65  | 9.98   | 9.60   | 9.36   | 9.20   | 9.07   | 8.98   | 8.90   | 8.84   | 8.66   |
| 5     | 10.01  | 8.43   | 7.76   | 7.39   | 7.15   | 6.98   | 6.85   | 6.76   | 6.68   | 6.62   | 6.43   |
| 6     | 8.81   | 7.26   | 6.60   | 6.23   | 5.99   | 5.82   | 5.70   | 5.60   | 5.52   | 5.46   | 5.27   |
| 7     | 8.07   | 6.54   | 5.89   | 5.52   | 5.29   | 5.12   | 4.99   | 4.90   | 4.82   | 4.76   | 4.57   |
| 8     | 7.57   | 6.06   | 5.42   | 5.05   | 4.82   | 4.65   | 4.53   | 4.43   | 4.36   | 4.30   | 4.10   |
| 9     | 7.21   | 5.71   | 5.08   | 4.72   | 4.48   | 4.32   | 4.20   | 4.10   | 4.03   | 3.96   | 3.77   |
| 10    | 6.94   | 5.46   | 4.83   | 4.47   | 4.24   | 4.07   | 3.95   | 3.85   | 3.78   | 3.72   | 3.52   |
| 11    | 6.72   | 5.26   | 4.63   | 4.28   | 4.04   | 3.88   | 3.76   | 3.66   | 3.59   | 3.53   | 3.33   |
| 12    | 6.55   | 5.10   | 4.47   | 4.12   | 3.89   | 3.73   | 3.61   | 3.51   | 3.44   | 3.37   | 3.18   |
| 13    | 6.41   | 4.97   | 4.35   | 4.00   | 3.77   | 3.60   | 3.48   | 3.39   | 3.31   | 3.25   | 3.05   |
| 14    | 6.30   | 4.86   | 4.24   | 3.89   | 3.66   | 3.50   | 3.38   | 3.29   | 3.21   | 3.15   | 2.95   |
| 15    | 6.20   | 4.77   | 4.15   | 3.80   | 3.58   | 3.41   | 3.29   | 3.20   | 3.12   | 3.06   | 2.86   |
| 16    | 6.12   | 4.69   | 4.08   | 3.73   | 3.50   | 3.34   | 3.22   | 3.12   | 3.05   | 2.99   | 2.79   |
| 17    | 6.04   | 4.62   | 4.01   | 3.66   | 3.44   | 3.28   | 3.16   | 3.06   | 2.98   | 2.92   | 2.72   |
| 18    | 5.98   | 4.56   | 3.95   | 3.61   | 3.38   | 3.22   | 3.10   | 3.01   | 2.93   | 2.87   | 2.67   |
| 19    | 5.92   | 4.51   | 3.90   | 3.56   | 3.33   | 3.17   | 3.05   | 2.96   | 2.88   | 2.82   | 2.62   |
| 20    | 5.87   | 4.46   | 3.86   | 3.51   | 3.29   | 3.13   | 3.01   | 2.91   | 2.84   | 2.77   | 2.57   |
| 22    | 5.79   | 4.38   | 3.78   | 3.44   | 3.22   | 3.05   | 2.93   | 2.84   | 2.76   | 2.70   | 2.50   |
| 24    | 5.72   | 4.32   | 3.72   | 3.38   | 3.15   | 2.99   | 2.87   | 2.78   | 2.70   | 2.64   | 2.44   |
| 26    | 5.66   | 4.27   | 3.67   | 3.33   | 3.10   | 2.94   | 2.82   | 2.73   | 2.65   | 2.59   | 2.39   |
| 28    | 5.61   | 4.22   | 3.63   | 3.29   | 3.06   | 2.90   | 2.78   | 2.69   | 2.61   | 2.55   | 2.34   |
| 30    | 5.57   | 4.18   | 3.59   | 3.25   | 3.03   | 2.87   | 2.75   | 2.65   | 2.57   | 2.51   | 2.31   |
| 40    | 5.42   | 4.05   | 3.46   | 3.13   | 2.90   | 2.74   | 2.62   | 2.53   | 2.45   | 2.39   | 2.18   |
| 50    | 5.34   | 3.97   | 3.39   | 3.05   | 2.83   | 2.67   | 2.55   | 2.46   | 2.38   | 2.32   | 2.11   |
| 75    | 5.23   | 3.88   | 3.30   | 2.96   | 2.74   | 2.58   | 2.46   | 2.37   | 2.29   | 2.22   | 2.01   |
| 100   | 5.18   | 3.83   | 3.25   | 2.92   | 2.70   | 2.54   | 2.42   | 2.32   | 2.24   | 2.18   | 1.97   |
| 150   | 5.13   | 3.78   | 3.20   | 2.87   | 2.65   | 2.49   | 2.37   | 2.28   | 2.20   | 2.13   | 1.92   |
| 200   | 5.10   | 3.76   | 3.18   | 2.85   | 2.63   | 2.47   | 2.35   | 2.26   | 2.18   | 2.11   | 1.90   |
| 300   | 5.07   | 3.73   | 3.16   | 2.83   | 2.61   | 2.45   | 2.33   | 2.23   | 2.16   | 2.09   | 1.88   |
| 400   | 5.06   | 3.72   | 3.15   | 2.82   | 2.60   | 2.44   | 2.32   | 2.22   | 2.15   | 2.08   | 1.87   |
| 500   | 5.05   | 3.72   | 3.14   | 2.81   | 2.59   | 2.43   | 2.31   | 2.22   | 2.14   | 2.07   | 1.86   |

99% fraktiler i  $F$ -fordelingen.

$f_1$  er antal frihedsgrader for tælleren,  $f_2$  er antal frihedsgrader for nævneren.

| $f_2$ | $f_1$   |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|       | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      | 15      |
| 1     | 4052.18 | 4999.50 | 5403.35 | 5624.58 | 5763.65 | 5858.99 | 5928.36 | 5981.07 | 6022.47 | 6055.85 | 6157.28 |
| 2     | 98.50   | 99.00   | 99.17   | 99.25   | 99.30   | 99.33   | 99.36   | 99.37   | 99.39   | 99.40   | 99.43   |
| 3     | 34.12   | 30.82   | 29.46   | 28.71   | 28.24   | 27.91   | 27.67   | 27.49   | 27.35   | 27.23   | 26.87   |
| 4     | 21.20   | 18.00   | 16.69   | 15.98   | 15.52   | 15.21   | 14.98   | 14.80   | 14.66   | 14.55   | 14.20   |
| 5     | 16.26   | 13.27   | 12.06   | 11.39   | 10.97   | 10.67   | 10.46   | 10.29   | 10.16   | 10.05   | 9.72    |
| 6     | 13.75   | 10.92   | 9.78    | 9.15    | 8.75    | 8.47    | 8.26    | 8.10    | 7.98    | 7.87    | 7.56    |
| 7     | 12.25   | 9.55    | 8.45    | 7.85    | 7.46    | 7.19    | 6.99    | 6.84    | 6.72    | 6.62    | 6.31    |
| 8     | 11.26   | 8.65    | 7.59    | 7.01    | 6.63    | 6.37    | 6.18    | 6.03    | 5.91    | 5.81    | 5.52    |
| 9     | 10.56   | 8.02    | 6.99    | 6.42    | 6.06    | 5.80    | 5.61    | 5.47    | 5.35    | 5.26    | 4.96    |
| 10    | 10.04   | 7.56    | 6.55    | 5.99    | 5.64    | 5.39    | 5.20    | 5.06    | 4.94    | 4.85    | 4.56    |
| 11    | 9.65    | 7.21    | 6.22    | 5.67    | 5.32    | 5.07    | 4.89    | 4.74    | 4.63    | 4.54    | 4.25    |
| 12    | 9.33    | 6.93    | 5.95    | 5.41    | 5.06    | 4.82    | 4.64    | 4.50    | 4.39    | 4.30    | 4.01    |
| 13    | 9.07    | 6.70    | 5.74    | 5.21    | 4.86    | 4.62    | 4.44    | 4.30    | 4.19    | 4.10    | 3.82    |
| 14    | 8.86    | 6.51    | 5.56    | 5.04    | 4.69    | 4.46    | 4.28    | 4.14    | 4.03    | 3.94    | 3.66    |
| 15    | 8.68    | 6.36    | 5.42    | 4.89    | 4.56    | 4.32    | 4.14    | 4.00    | 3.89    | 3.80    | 3.52    |
| 16    | 8.53    | 6.23    | 5.29    | 4.77    | 4.44    | 4.20    | 4.03    | 3.89    | 3.78    | 3.69    | 3.41    |
| 17    | 8.40    | 6.11    | 5.18    | 4.67    | 4.34    | 4.10    | 3.93    | 3.79    | 3.68    | 3.59    | 3.31    |
| 18    | 8.29    | 6.01    | 5.09    | 4.58    | 4.25    | 4.01    | 3.84    | 3.71    | 3.60    | 3.51    | 3.23    |
| 19    | 8.18    | 5.93    | 5.01    | 4.50    | 4.17    | 3.94    | 3.77    | 3.63    | 3.52    | 3.43    | 3.15    |
| 20    | 8.10    | 5.85    | 4.94    | 4.43    | 4.10    | 3.87    | 3.70    | 3.56    | 3.46    | 3.37    | 3.09    |
| 22    | 7.95    | 5.72    | 4.82    | 4.31    | 3.99    | 3.76    | 3.59    | 3.45    | 3.35    | 3.26    | 2.98    |
| 24    | 7.82    | 5.61    | 4.72    | 4.22    | 3.90    | 3.67    | 3.50    | 3.36    | 3.26    | 3.17    | 2.89    |
| 26    | 7.72    | 5.53    | 4.64    | 4.14    | 3.82    | 3.59    | 3.42    | 3.29    | 3.18    | 3.09    | 2.81    |
| 28    | 7.64    | 5.45    | 4.57    | 4.07    | 3.75    | 3.53    | 3.36    | 3.23    | 3.12    | 3.03    | 2.75    |
| 30    | 7.56    | 5.39    | 4.51    | 4.02    | 3.70    | 3.47    | 3.30    | 3.17    | 3.07    | 2.98    | 2.70    |
| 40    | 7.31    | 5.18    | 4.31    | 3.83    | 3.51    | 3.29    | 3.12    | 2.99    | 2.89    | 2.80    | 2.52    |
| 50    | 7.17    | 5.06    | 4.20    | 3.72    | 3.41    | 3.19    | 3.02    | 2.89    | 2.78    | 2.70    | 2.42    |
| 75    | 6.99    | 4.90    | 4.05    | 3.58    | 3.27    | 3.05    | 2.89    | 2.76    | 2.65    | 2.57    | 2.29    |
| 100   | 6.90    | 4.82    | 3.98    | 3.51    | 3.21    | 2.99    | 2.82    | 2.69    | 2.59    | 2.50    | 2.22    |
| 150   | 6.81    | 4.75    | 3.91    | 3.45    | 3.14    | 2.92    | 2.76    | 2.63    | 2.53    | 2.44    | 2.16    |
| 200   | 6.76    | 4.71    | 3.88    | 3.41    | 3.11    | 2.89    | 2.73    | 2.60    | 2.50    | 2.41    | 2.13    |
| 300   | 6.72    | 4.68    | 3.85    | 3.38    | 3.08    | 2.86    | 2.70    | 2.57    | 2.47    | 2.38    | 2.10    |
| 400   | 6.70    | 4.66    | 3.83    | 3.37    | 3.06    | 2.85    | 2.68    | 2.56    | 2.45    | 2.37    | 2.08    |
| 500   | 6.69    | 4.65    | 3.82    | 3.36    | 3.05    | 2.84    | 2.68    | 2.55    | 2.44    | 2.36    | 2.07    |

Fraktiler i  $t$ -fordelingen med  $f$  frihedsgrader

| $f$ | Sandsynlighed i procent |       |        |        |        |         | $f$ |
|-----|-------------------------|-------|--------|--------|--------|---------|-----|
|     | 90                      | 95    | 97.5   | 99     | 99.5   | 99.9    |     |
| 1   | 3.078                   | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 318.309 | 1   |
| 2   | 1.886                   | 2.920 | 4.303  | 6.965  | 9.925  | 22.327  | 2   |
| 3   | 1.638                   | 2.353 | 3.182  | 4.541  | 5.841  | 10.215  | 3   |
| 4   | 1.533                   | 2.132 | 2.776  | 3.747  | 4.604  | 7.173   | 4   |
| 5   | 1.476                   | 2.015 | 2.571  | 3.365  | 4.032  | 5.893   | 5   |
| 6   | 1.440                   | 1.943 | 2.447  | 3.143  | 3.707  | 5.208   | 6   |
| 7   | 1.415                   | 1.895 | 2.365  | 2.998  | 3.499  | 4.785   | 7   |
| 8   | 1.397                   | 1.860 | 2.306  | 2.896  | 3.355  | 4.501   | 8   |
| 9   | 1.383                   | 1.833 | 2.262  | 2.821  | 3.250  | 4.297   | 9   |
| 10  | 1.372                   | 1.812 | 2.228  | 2.764  | 3.169  | 4.144   | 10  |
| 11  | 1.363                   | 1.796 | 2.201  | 2.718  | 3.106  | 4.025   | 11  |
| 12  | 1.356                   | 1.782 | 2.179  | 2.681  | 3.055  | 3.930   | 12  |
| 13  | 1.350                   | 1.771 | 2.160  | 2.650  | 3.012  | 3.852   | 13  |
| 14  | 1.345                   | 1.761 | 2.145  | 2.624  | 2.977  | 3.787   | 14  |
| 15  | 1.341                   | 1.753 | 2.131  | 2.602  | 2.947  | 3.733   | 15  |
| 16  | 1.337                   | 1.746 | 2.120  | 2.583  | 2.921  | 3.686   | 16  |
| 17  | 1.333                   | 1.740 | 2.110  | 2.567  | 2.898  | 3.646   | 17  |
| 18  | 1.330                   | 1.734 | 2.101  | 2.552  | 2.878  | 3.610   | 18  |
| 19  | 1.328                   | 1.729 | 2.093  | 2.539  | 2.861  | 3.579   | 19  |
| 20  | 1.325                   | 1.725 | 2.086  | 2.528  | 2.845  | 3.552   | 20  |
| 21  | 1.323                   | 1.721 | 2.080  | 2.518  | 2.831  | 3.527   | 21  |
| 22  | 1.321                   | 1.717 | 2.074  | 2.508  | 2.819  | 3.505   | 22  |
| 23  | 1.319                   | 1.714 | 2.069  | 2.500  | 2.807  | 3.485   | 23  |
| 24  | 1.318                   | 1.711 | 2.064  | 2.492  | 2.797  | 3.467   | 24  |
| 25  | 1.316                   | 1.708 | 2.060  | 2.485  | 2.787  | 3.450   | 25  |
| 30  | 1.310                   | 1.697 | 2.042  | 2.457  | 2.750  | 3.385   | 30  |
| 50  | 1.299                   | 1.676 | 2.009  | 2.403  | 2.678  | 3.261   | 50  |
| 75  | 1.293                   | 1.665 | 1.992  | 2.377  | 2.643  | 3.202   | 75  |
| 100 | 1.290                   | 1.660 | 1.984  | 2.364  | 2.626  | 3.174   | 100 |
| 150 | 1.287                   | 1.655 | 1.976  | 2.351  | 2.609  | 3.145   | 150 |
| 200 | 1.286                   | 1.653 | 1.972  | 2.345  | 2.601  | 3.131   | 200 |
| 400 | 1.284                   | 1.649 | 1.966  | 2.336  | 2.588  | 3.111   | 400 |

## D Ordlister

### Dansk-Engelsk

|                                        |                             |                                  |                                 |
|----------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| <i>afbildning</i>                      | map                         | <i>frihedsgrader</i>             | degrees of freedom              |
| <i>betinget sandsynlighed</i>          | conditional probability     | <i>fællesmængde</i>              | intersection                    |
| <i>binomialfordeling</i>               | binomial distribution       | <i>gammafordeling</i>            | gamma distribution              |
| <i>Cauchyfordeling</i>                 | Cauchy distribution         | <i>gennemsnit</i>                | average, mean                   |
| <i>central estimator</i>               | unbiased estimator          | <i>gentagelse</i>                | repetition, replicate           |
| <i>Central Grænseværdisætning</i>      | Central Limit Theorem       | <i>geometrisk fordeling</i>      | geometric distribution          |
| <i>delmængde</i>                       | subset                      | <i>hypergeometrisk fordeling</i> | hypergeometric distribution     |
| <i>Den Centrale Grænseværdisætning</i> | The Central Limit Theorem   | <i>hypotese</i>                  | hypothesis                      |
| <i>disjunkt</i>                        | disjoint                    | <i>hypoteseprøvning</i>          | hypothesis testing              |
| <i>diskret</i>                         | discrete                    | <i>hyppighed</i>                 | frequency                       |
| <i>eksponentialfordeling</i>           | exponential distribution    | <i>hændelse</i>                  | event                           |
| <i>endelig</i>                         | finite                      | <i>indikatorfunktion</i>         | indicator function              |
| <i>ensidet variansanalyse</i>          | oneway analysis of variance | <i>khi i anden</i>               | chi squared                     |
| <i>enstikprøveproblem</i>              | one sample problem          | <i>klasedeling</i>               | partition                       |
| <i>estimat</i>                         | estimate                    | <i>kontinuert</i>                | continuous                      |
| <i>estimation</i>                      | estimation                  | <i>korrelation</i>               | correlation                     |
| <i>estimator</i>                       | estimator                   | <i>kovarians</i>                 | covariance                      |
| <i>etpunktsfordeling</i>               | one point distribution      | <i>kvadratsum</i>                | sum of squares                  |
| <i>etpunktsmængde</i>                  | singleton                   | <i>kvotientteststørrelse</i>     | likelihood ratio test statistic |
| <i>flerdimensional fordeling</i>       | multivariate distribution   | <i>ligefordeling</i>             | uniform distribution            |
| <i>fordeling</i>                       | distribution                | <i>likelihood</i>                | likelihood                      |
| <i>fordelingsfunktion</i>              | distribution function       | <i>likelihoodfunktion</i>        | likelihood function             |
| <i>foreningsmængde</i>                 | union                       | <i>maksimaliseringsestimat</i>   | maximum likelihood estimate     |
| <i>forgreningsproces</i>               | branching process           | <i>maksimaliseringsestimator</i> | maximum likelihood estimator    |
| <i>forklarende variabel</i>            | explanatory variable        | <i>marginal fordeling</i>        | marginal distribution           |
| <i>forventet værdi</i>                 | expected value              | <i>middelværdi</i>               | expected value; mean            |
| <i>fraktil</i>                         | quantile                    | <i>multinomialfordeling</i>      | multinomial distribution        |
| <i>frembringende funktion</i>          | generating function         | <i>mængde</i>                    | set                             |
|                                        |                             | <i>niveau</i>                    | level                           |



|                                      |                              |                                     |                                             |
|--------------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------|
| <i>normalfordeling</i>               | normal distribution          | <i>stokastisk variabel</i>          | random variable                             |
| <i>nævner (i brøk)</i>               | nominator                    | <i>Store Tals Lov</i>               | Law of Large Numbers                        |
| <i>odds</i>                          | odds                         | <i>Store Tals Stærke Lov</i>        | Strong Law of Large Numbers                 |
| <i>parameter</i>                     | parameter                    | <i>Store Tals Svage Lov</i>         | Weak Law of Large Numbers                   |
| <i>plat eller krone</i>              | heads or tails               | <i>støtte</i>                       | support                                     |
| <i>poissonfordeling</i>              | Poisson distribution         | <i>sufficiens</i>                   | sufficiency                                 |
| <i>produktrum</i>                    | product space                | <i>sufficient</i>                   | sufficient                                  |
| <i>punktsandsynlighed</i>            | point probability            | <i>systematisk variation</i>        | systematic variation                        |
| <i>regression</i>                    | regression                   | <i>søjle</i>                        | column                                      |
| <i>relativ hyppighed</i>             | relative frequency           | <i>test</i>                         | test                                        |
| <i>residual</i>                      | residual                     | <i>teste</i>                        | test                                        |
| <i>residualkvadratsum</i>            | residual sum of squares      | <i>testsandsynlighed</i>            | test probability                            |
| <i>række</i>                         | row                          | <i>teststørrelse</i>                | test statistic                              |
| <i>sandsynlighed</i>                 | probability                  | <i>tilbagelægning (med/uden)</i>    | replacement (with/without)                  |
| <i>sandsynlighedsfunktion</i>        | probability function         | <i>tilfældig variation</i>          | random variation                            |
| <i>sandsynlighedsmål</i>             | probability measure          | <i>tosidet variansanalyse</i>       | two way analysis of variance                |
| <i>sandsynlighedsregning</i>         | probability theory           | <i>tostikprøveproblem</i>           | two sample problem                          |
| <i>sandsynlighedsrum</i>             | probability space            | <i>totalgennemsnit</i>              | grand mean                                  |
| <i>sandsynlighedstæthedsfunktion</i> | probability density function | <i>tæller (i brøk)</i>              | denominator                                 |
| <i>signifikans</i>                   | significance                 | <i>tæthed</i>                       | density                                     |
| <i>signifikansniveau</i>             | level of significance        | <i>tæthedsfunktion</i>              | density function                            |
| <i>signifikant</i>                   | significant                  | <i>uafhængig</i>                    | independent                                 |
| <i>simultan fordeling</i>            | joint distribution           | <i>uafhængige identisk fordelte</i> | independent identically distributed; i.i.d. |
| <i>simultan tæthed</i>               | joint density                | <i>uafhængighed</i>                 | independence                                |
| <i>skalaparameter</i>                | scale parameter              | <i>udfald</i>                       | outcome                                     |
| <i>skøn</i>                          | estimate                     | <i>udfaldsrum</i>                   | sample space                                |
| <i>statistik</i>                     | statistics                   | <i>udtage en stikprøve</i>          | sample                                      |
| <i>statistisk model</i>              | statistical model            | <i>uendelig</i>                     | infinite                                    |
| <i>stikprøve</i>                     | sample, random sample        | <i>variansanalyse</i>               | analysis of variance                        |
| <i>stikprøvefunktion</i>             | statistic                    | <i>variation</i>                    | variation                                   |
| <i>stikprøveudtagning</i>            | sampling                     | <i>vekselvirkning</i>               | interaction                                 |
| <i>stokastisk uafhængighed</i>       | stochastic independence      |                                     |                                             |

## Engelsk-Dansk

|                              |                                 |                                |                        |
|------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|------------------------|
| <i>analysis of variance</i>  | variansanalyse                  | <i>chi squared</i>             | khi i anden            |
| <i>average</i>               | gennemsnit                      | <i>column</i>                  | søjle                  |
| <i>binomial distribution</i> | binomialfordeling               | <i>conditional probability</i> | betinget sandsynlighed |
| <i>branching process</i>     | forgreningsproces               | <i>continuous</i>              | kontinuert             |
| <i>Cauchy distribution</i>   | Cauchyfordeling                 | <i>correlation</i>             | korrelation            |
| <i>Central Limit Theorem</i> | Den Centrale Grænseværdisætning | <i>covariance</i>              | kovarians              |

|                                                     |                              |                                     |                                   |
|-----------------------------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| <i>degrees of freedom</i>                           | frihedsgrader                | <i>map</i>                          | afbildning                        |
| <i>denominator</i>                                  | tæller                       | <i>marginal distribution</i>        | marginal fordeling                |
| <i>density</i>                                      | tæthed                       | <i>maximum likelihood estimate</i>  | maksimaliseringsestimant          |
| <i>density function</i>                             | tæthedsfunktion              | <i>maximum likelihood estimator</i> | maksimaliseringsestimator         |
| <i>discrete</i>                                     | diskret                      | <i>mean</i>                         | gennemsnit, middelværdi           |
| <i>disjoint</i>                                     | disjunkt                     | <i>multinomial distribution</i>     | multinomialfordeling              |
| <i>distribution</i>                                 | fordeling                    | <i>multivariate distribution</i>    | flerdimensional fordeling         |
| <i>distribution function</i>                        | fordelingsfunktion           | <i>nominator</i>                    | nævner                            |
| <i>estimate</i>                                     | estimat, skøn                | <i>normal distribution</i>          | normalfordeling                   |
| <i>estimation</i>                                   | estimation                   | <i>odds</i>                         | odds                              |
| <i>estimator</i>                                    | estimator                    | <i>one point distribution</i>       | etpunktsfordeling                 |
| <i>event</i>                                        | hændelse                     | <i>one sample problem</i>           | enstikprøveproblem                |
| <i>expected value</i>                               | middelværdi; forventet værdi | <i>one way analysis of variance</i> | ensidet variansanalyse            |
| <i>explanatory variable</i>                         | forklarende variabel         | <i>outcome</i>                      | udfald                            |
| <i>exponential distribution</i>                     | eksponentialfordeling        | <i>parameter</i>                    | parameter                         |
| <i>finite</i>                                       | endelig                      | <i>partition</i>                    | klassedeling                      |
| <i>frequency</i>                                    | hyppighed                    | <i>point probability</i>            | punktsandsynlighed                |
| <i>gamma distribution</i>                           | gammafordeling               | <i>Poisson distribution</i>         | poissonfordeling                  |
| <i>generating function</i>                          | frembringende funktion       | <i>probability</i>                  | sandsynlighed                     |
| <i>geometric distribution</i>                       | geometrisk fordeling         | <i>probability density function</i> | sandsynlighedstæthedsfunktion     |
| <i>grand mean</i>                                   | totalgennemsnit              | <i>probability function</i>         | sandsynlighedsfunktion            |
| <i>heads or tails</i>                               | plat eller krone             | <i>probability measure</i>          | sandsynligheds mål                |
| <i>hypergeometric distribution</i>                  | hypergeometrisk fordeling    | <i>probability space</i>            | sandsynlighedsrum                 |
| <i>hypothesis</i>                                   | hypotese                     | <i>probability theory</i>           | sandsynlighedsregning             |
| <i>hypothesis testing</i>                           | hypoteseprøvning             | <i>product space</i>                | produktrum                        |
| <i>i.i.d. = independent identically distributed</i> |                              | <i>quantile</i>                     | fraktil                           |
| <i>independence</i>                                 | uafhængighed                 | <i>r.v. = random variable</i>       |                                   |
| <i>independent</i>                                  | uafhængig                    | <i>random sample</i>                | stikprøve                         |
| <i>indicator function</i>                           | indikatorfunktion            | <i>random variable</i>              | stokastisk variabel               |
| <i>infinite</i>                                     | uendelig                     | <i>random variation</i>             | tilfældig variation               |
| <i>interaction</i>                                  | vekselvirkning               | <i>regression</i>                   | regression                        |
| <i>intersection</i>                                 | fællesmængde                 | <i>relative frequency</i>           | relativ hyppighed                 |
| <i>joint density</i>                                | simultan tæthed              | <i>replacement (with/without)</i>   | tilbagelægning (med/uden)         |
| <i>joint distribution</i>                           | simultan fordeling           | <i>residual</i>                     | residual                          |
| <i>Law of Large Numbers</i>                         | Store Tals Lov               | <i>residual sum of squares</i>      | residualkvadratsum                |
| <i>level</i>                                        | niveau                       | <i>row</i>                          | række                             |
| <i>level of significance</i>                        | signifikansniveau            | <i>sample</i>                       | stikprøve; at udtage en stikprøve |
| <i>likelihood</i>                                   | likelihood                   | <i>sample space</i>                 | udfaldsrum                        |
| <i>likelihood function</i>                          | likelihoodfunktion           |                                     |                                   |
| <i>likelihood ratio test statistic</i>              | kvotientteststørrelse        |                                     |                                   |

|                                    |                          |                                     |                             |
|------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|
| <i>sampling</i>                    | stikprøveudtagning       | <i>support</i>                      | støtte                      |
| <i>scale parameter</i>             | skalaparameter           | <i>systematic variation</i>         | systematisk variation       |
| <i>set</i>                         | mængde                   | <i>test</i>                         | at teste; et test           |
| <i>significance</i>                | signifikans              | <i>test probability</i>             | testsandsynlighed           |
| <i>significant</i>                 | signifikant              | <i>test statistic</i>               | teststørrelse               |
| <i>singleton</i>                   | etpunktsmængde           | <i>two sample problem</i>           | tostikprøveproblem          |
| <i>statistic</i>                   | stikprøvefunktion        | <i>two way analysis of variance</i> | tosidet vari-<br>ansanalyse |
| <i>statistical model</i>           | statistisk model         | <i>unbiased estimator</i>           | central estimator           |
| <i>statistics</i>                  | statistik                | <i>uniform distribution</i>         | ligefordeling               |
| <i>Strong Law of Large Numbers</i> | Store Tals<br>Stærke Lov | <i>union</i>                        | foreningsmængde             |
| <i>subset</i>                      | delmængde                | <i>variation</i>                    | variation                   |
| <i>sufficiency</i>                 | sufficiens               | <i>Weak Law of Large Numbers</i>    | Store Tals<br>Svage Lov     |
| <i>sufficient</i>                  | sufficient               |                                     |                             |
| <i>sum of squares</i>              | kvadratsum               |                                     |                             |

## Litteraturhenvisninger

- Andersen, E. B. (1977). Multiplicative poisson models with unequal cell rates, *Scandinavian Journal of Statistics* **4**: 153–8.
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3<sup>e</sup> série **17**: 21–86.
- Bayes, T. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **53**: 370–418.
- Bliss, C. I. and Fisher, R. A. (1953). Fitting the negative binomial distribution to biological data and Note on the efficient fitting of the negative binomial, *Biometrics* **9**: 176–200.
- Bortkiewicz, L. (1898). *Das Gesetz der kleinen Zahlen*, Teubner, Leipzig.
- Davin, E. P. (1975). *Blood pressure among residents of the Tambo Valley*, Master's thesis, The Pennsylvania State University.
- Fisher, R. A. (1922). On the mathematical foundations of theoretical statistics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A* **222**: 309–68.
- Forbes, J. D. (1857). Further experiments and remarks on the measurement of heights by the boiling point of water, *Transactions of the Royal Society of Edinburg* **21**: 135–43.
- Gauß, K. F. (1809). *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientum*, F. Perthes und I.H. Besser, Hamburg.
- Greenwood, M. and Yule, G. U. (1920). An inquiry into the nature of frequency distributions representative of multiple happenings with particular reference to the occurrence of multiple attacks of disease or of repeated accidents, *Journal of the Royal Statistical Society* **83**: 255–79.
- Hald, A. (1948, 1968). *Statistiske Metoder*, Akademisk Forlag, København.
- Kolmogorov, A. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin.
- Kotz, S. and Johnson, N. L. (eds) (1992). *Breakthroughs in Statistics*, Vol. 1, Springer-Verlag, New York.
- Larsen, J. (2006). *Basisstatistik*, 2. udgave, IMFUFA tekst nr 435, Roskilde Universitetscenter.
- Lee, L. and Krutchkoff, R. G. (1980). Mean and variance of partially-truncated distributions, *Biometrics* **36**: 531–6.
- Newcomb, S. (1891). Measures of the velocity of light made under the direction of the Secretary of the Navy during the years 1880–1882, *Astronomical Papers* **2**: 107–230.

- Pack, S. E. and Morgan, B. J. T. (1990). A mixture model for interval-censored time-to-response quantal assay data, *Biometrics* **42**: 749–57.
- Ryan, T. A., Joiner, B. L. and Ryan, B. F. (1976). *MINITAB Student Handbook*, Duxbury Press, North Scituate, Massachusetts.
- Sick, K. (1965). Haemoglobin polymorphism of cod in the Baltic and the Danish Belt Sea, *Hereditas* **54**: 19–48.
- Stigler, S. M. (1977). Do robust estimators work with *real* data?, *The Annals of Statistics* **5**: 1055–98.
- Weisberg, S. (1980). *Applied Linear Regression*, Wiley series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons.
- Wiener, N. (1976). *Collected Works*, Vol. 1, MIT Press, Cambridge, MA. Edited by P. Masani.

# Alfabetisk register

- 01-variable 22, 105
  - enstikprøveproblemet 92, 116
  - frembringende funktion 72
  - middelværdi og varians 37
- a posteriori sandsynligheder 16
- a priori sandsynligheder 16
- additivitetshypotesen 165
  - estimation 167
  - test 168
- afhængig variabel 172
- afkomstfordeling 77
- antalsparameter
  - i binomialfordeling 27
  - multinomialfordeling 95
- anvendt statistik 89
- aritmetisk gennemsnit 41
- asymptotisk  $\chi^2$ -fordeling 116
- asymptotisk normalfordeling 67, 104
- baggrundsvariabel 101, 127, 172, 176
- balancerede tilfælde, det 167
- Bartlett's test 162, 163
- Bayes' formel 15, 16, 45
- Bayes, T. (1702-61) 15
- Bernoulli-variabel Se 01-variabel
- Beta-funktionen 64
- betinget fordeling 15
- betinget sandsynlighed 14
- binomialfordeling 27, 92, 95, 102, 105
  - enstikprøveproblemet 93, 106, 118
  - frembringende funktion 72
  - konvergens mod poissonfordeling 53, 80
  - middelværdi og varians 37
  - simpel hypotese 117
- binomialkoefficient 27
  - generaliseret 51
- binomialrække 51
- Borel- $\sigma$ -algebra 81
- Borel, E. (1871-1956) 81
- Cauchy, A.L. (1789-1857) 34
- Cauchy-Schwarz' ulighed 34, 49
- Cauchyfordeling 65
- Cauchys funktionalligning 182
- celle 164
- central estimator 103, 109
- Central Grænseværdisætning 67
- centralt variansskøn 111
- Cramér-Rao uligheden 104
- designmatrix 174
- dosis-respons model 129
- eksempler, konkrete
  - C-vitamin 100, 110, 124
  - dyrkningsforsøg med kartofler 169
  - Forbes' barometriske målinger 101, 112
  - hestespark 96, 108
  - indianere i Peru 178
  - kviksølv i sværdfisk 69
  - kvælning af hunde 161, 177
  - lungekræft i Fredericia 134
  - lysets hastighed 98, 109, 122
  - mider på æbleblade 75
  - rismelsbiller 93, 94, 106, 117, 119, 127
  - torsk i Østersøen 96, 107, 120
  - ulykker på granatfabrik 144
- eksponentialfordeling 62
- ensidet test 122
- ensidet variansanalyse 160, 176
- enstikprøveproblem
  - for 01-variable 92, 116
  - i binomialfordelingen 93, 106, 118
  - i normalfordelingen 98, 108, 120, 159
  - i poissonfordelingen 96, 107
- estimat 89, 103

- estimation 89, 103
- estimator 103
- estimeret regressionslinje 111
- etpunktsfordeling 11, 22
  - frembringende funktion 72
- F*-fordeling 158
  - tabel 192
- F*-test 158, 159, 161, 168, 176
- faktor (i regression) 176
- Fisher, R.A. (1890-1962) 90
- fittet værdi 173
- flerdimensional kontinuert fordeling 59
- flerdimensional normalfordeling 153
- flerdimensionale stokastiske variable 19, 149
  - middelværdi og varians 149
- fordelingsfunktion 20, 46
  - generelt 82
- forgreningsproces 76
- forklarende variabel 101, 172
- forklaret variabel 172
- formparameter
  - i gammafordelingen 63
  - i negativ binomialfordeling 46, 51
- fraktiler 189
  - i *F*-fordelingen 192
  - i  $\chi^2$ -fordelingen 190
  - i *t*-fordelingen 196
- frembringende funktion 71
  - for en sum 72
  - kontinuitetssætningen 74
- frihedsgrader
  - for  $-2 \ln Q$  116, 119
  - for  $\chi^2$ -fordeling 64
  - for kvadratsum 154, 158
  - for variansskøn 109, 110, 111, 158, 161
  - i Bartlett's test 164
  - i *F*-test 125, 158, 161
  - i *t*-test 121, 123
- gammafordeling 63, 146
- gammafunktionen 63
- $\Gamma$ -funktionen 63
- Gauß, C.F. (1777-1855) 65, 181
- Gaußfordeling Se normalfordeling
- generaliseret lineær regression 174
- geometrisk fordeling 46, 49, 50
- geometrisk gennemsnit 41
- Gosset, W.S. (1876-1937) 122
- Hardy-Weinberg ligevægt 120
- hypergeometrisk fordeling 28
- hypotese, statistisk 89, 115
- hypoteseprøvning 89, 115
- hyppighedsfortolkning 9, 38
- hændelse 10
- indikatorfunktion 22, 32
- injektiv parametrisering 91, 136
- intensitet 53, 135
- Jensen, J.L.W.V. (1859-1925) 41
- Jensens ulighed 41
- $\chi^2$ -fordeling 64
  - tabel 190
- klasedeling 15, 45
- Kolmogorov, A. (1903-87) 81
- kontinuert fordeling 57
- kontinuitetssætningen for frembringende funktioner 74
- korrelation 36
- kovarians 35, 48, 49
- kovariansmatrix 149
- Kroneckers  $\delta$  160
- kvadratisk skalaparameter 65
- kvotientrække 50
- kvotientteststørrelse 115
- $\mathcal{L}^1$  47
- $\mathcal{L}^2$  48
- ligefordeling
  - kontinuert 58, 97, 108
  - på endelig mængde 11, 22
- likelihoodfunktion 91, 104, 115
- lineær algebra 185
- lineær normal model 157
- lineær regression 172
- lineær regression, simpel 100, 110
- log-likelihoodfunktion 91, 104
- logaritmisk fordeling 46, 75
- logistisk regression 127, 129, 174
- logit 129
- maksimaliseringsestimat 103, 104
- maksimaliseringsestimator 103, 104, 115
  - asymptotisk normalfordeling 104
  - eksistens og entydighed 104

- 
- marginal fordeling 18
  - Markov, A. (1856-1922) 33
  - Markovs ulighed 33
  - matematisk statistik 89
  - middelfejl 175, 180
  - middelværdi
    - det endelige tilfælde 30
    - det tællelige tilfælde 47
    - kontinuert fordeling 62
  - mindste kvadraters metode 65
  - modelfunktion 91
  - modelkontrol 89
    - billeksmplet 131
  - multinomialfordeling 95, 102, 107, 120
    - middelværdi og varians 150
  - multinomialkoefficient 95
  - multiplikative poissonmodeller 134
  - målelig afbildning 82
  
  - negativ binomialfordeling 46, 51, 146
    - frembringende funktion 73
    - konvergens mod poissonfordeling 55, 80
    - middelværdi og varians 52, 73
  - niveau (for test) 116
  - normalfordeling 65, 151
    - enstikprøveproblemet 98, 108, 120
    - tostikprøveproblemet 99, 109, 122
    - udledning 181
  - normalligninger 158, 174
  
  - observation 89, 91
  - observationsrum 91
  - odds 39, 129
  - outlier 99
  
  - parameter 89, 91
  - parameterum 91
  - parametrisering 91
  - Poisson, S.-D. (1781-1840) 53
  - poissonfordeling 45, 52, 53, 55, 63, 79
    - enstikprøveproblemet 96, 107
    - frembringende funktion 73
    - grænseværdi for binomialfordeling 53, 80
    - grænseværdi for negativ binomialfordeling 55, 80
    - middelværdi og varians 53
  - positionsparameter 181
    - i normalfordelingen 65
  
  - projektion 154, 157, 185
  - punkt-notation 92
  - punktsandsynligheder 13, 44
  
  - random walk 85
  - regressionsanalyse 172
    - logistisk 127
    - multipel lineær 173
    - simpel lineær 173, 175
  - regressionslinje, estimeret 111, 131, 178
  - regulær normalfordeling 151
  - residual 110, 173
  - residualkvadratsum 110, 158
  - residualvektor 158
  - responsvariabel 172
  - række 164
  - rækkevirkning 165, 169
  
  - $\sigma$ -additiv 81
  - $\sigma$ -algebra 81
  - sammenhængende model 166
  - sandsynlighedsfunktion 23, 46
  - sandsynlighedsmål 11, 43, 81
  - sandsynlighedsparameter
    - i binomialfordeling 27
    - i geometrisk fordeling 46
    - i negativ binomialfordeling 46, 51
    - multinomialfordeling 95
  - sandsynlighedspinde 13
  - sandsynlighedsrum 11, 43, 81
  - sandsynlighedstæthedsfunktion 57
  - Sankt Petersborg-paradokset 55
  - Schwarz, H.A. (1843-1921) 34
  - signifikansniveau 116
  - simultan fordeling 18
  - simultan sandsynlighedsfunktion 23
  - simultan tæthedsfunktion 59
  - skalaparameter
    - i Cauchyfordelingen 65
    - i eksponentialfordelingen 62
    - i gammafordelingen 63
    - i normalfordelingen 65
  - skøn Se estimat
  - spaltningssætningen 154
  - standardafvigelse 34
  - standardnormalfordeling 65, 150
  - statistisk hypotese 89, 115
  - statistisk model 89, 91
  - stikprøvefunktion 103
  - stokastisk proces 76, 85



- stokastisk uafhængighed 16, 23
- stokastisk vektor 149
- stokastiske variable 18, 19, 45, 58, 82
  - flerdimensionale 19, 149
  - uafhængige 24, 46, 59
- Store Tals Lov 37, 68, 84
- Student *Se* Gosset
- Student's  $t$  122
- støtte 69
- sufficient datareduktion 91, 92, 98
- systematisk variation 100, 160
- søjle 164
- søjlevirkning 165, 168
  
- $t$ -fordeling 121, 123
  - tabel 196
- $t$ -test 121, 123, 159, 176
- test 115, 116
  - Bartlett's test 162
  - ensidet 122
  - $F$ -test 158, 159, 161, 168, 176
  - kvotienttest 115, 117, 118, 123, 158
  - $t$ -test 121, 123, 159, 176
  - tosidet 122
  - varianshomogenitet 162
- testsandsynlighed 115, 116
- teststørrelse 115, 121
- tilfældig variation 100, 160
- tilfældige tal 68
- Tjebysjov, P. (1821-94) 33
- Tjebysjovs ulighed 33
- tosidet test 122
- tosidet variansanalyse 164, 179
- tostikprøveproblem
  - i normalfordelingen 99, 109, 122, 162
- totalgennemsnit 166
- transformation af fordelinger 59
- trinomialfordeling 96
- tæthedsfunktion 57
  
- uafhængig variabel 172
- uafhængige delforsøg 16
- uafhængige hændelser 16
- uafhængige stokastiske variable 24, 46, 59
- udfald 9, 10
- udfaldsrum 9, 10, 11, 43, 81
  
- variabel
  - afhængig 172
  - forklarende 172
  - forklaret 172
  - uafhængig 172
- varians 34, 48, 49
- variansanalyse
  - ensidet 160, 176
  - tosidet 164, 179
- variansanalysekema 162, 171
- varianshomogenitet 124, 125, 162, 169
- variansmatrix 149
- variation 34
  - inden for grupper 161, 168
  - mellem grupper 161
  - systematisk 100, 160
  - tilfældig 100, 160
- vekselvirkning 139, 165
- vekselvirkningsvariation 168
- ventetider 49, 63
  
- Wiener-proces 85