Matematikvejledning i gymnasiet

Afsluttende projekt på matematikvejlederuddannelsen

Vejledere: Mogens Niss, Morten Blomhøj og Uffe Jankvist

Projektet er udarbejdet af: Tina Johannesen Smedegaard, Niels Bendtsen Halck og Karen Reuter Andersen
12-01-2020

Abstract

This report concludes and documents the work done during the “Matematikvejlederuddannelsen” (math counsellor program) at Roskilde University. It summarizes the personal experiences, work and findings when counselling students with mathematics-specific learning difficulties within three distinct topics during the three semesters.

This report is a “cloak,” that binds the three reports made during each of the semesters together. While the reports from each semester have their own topic and associated literature and theory, this cloak reflects on some of the theory from all three of the semesters across the three reports. It also contains reflections from the authors on their own growth during this program.

Common for all three reports made during three semesters is the detection test[1], which helps to identify students with mathematics-specific learning difficulties. This test is followed by a more detailed analysis (e.g more elaborate questions, interviews) to identify or diagnose the students´ difficulties. When the difficulties have been identified, an intervention is made specifically to target the students’ difficulties and (hopefully) to overcome them within the topic of the semester.

The first project deals with concepts and conceptualization and focuses on how to improve the concepts of fractions and the role of symbols in mathematics.

The second project deals with reasoning and mathematical proofing. It focuses on the proof schemes of the student and whether it is possible to move from an empirical proof scheme to a deductive proof scheme using scaffolding and highlighting the importance of sketches when answering problems. The students’ beliefs of the mathematics is also investigated.

The third project deals with models and mathematical modeling and focuses on how to improve the skill of mathematization by using physical objects/sketches to help visualize the situation.

This report has been made in collaboration with Morten Blomhøj, Uffe Jankvist and Mogens Nissen of Roskilde University.

[1] Each semester has a theme specific test.

Indholdsfortegnelse

Introduktion

Flere og flere elever vælger en gymnasial uddannelse. Det medfører, at flere elever i gymnasiet har matematikvanskeligheder. Som matematikunderviser får man hurtigt øje på elever, som har vanskeligheder. Selvom disse elever kan være meget flittige, kan underviserne undre sig over, at eleverne stiller de samme spørgsmål igen og igen.

Siden 1960'erne har den matematikdidaktiske forskning bidraget til forståelsen af, hvori matematikspecifikke læringsvanskeligheder består. Denne viden kan bruges til at gribe ind over for elevernes vanskeligheder. Siden 2012 tilbydes[2] et forskningsbaseret program for videreuddannelse af gymnasielærere i matematik som matematikvejledere med henblik på at detektere, diagnosticere og intervenere i forhold til elever med matematiklæringsvanskeligheder.

Uddannelsen har en varighed på 3 semestre. Hvert semester udleveres en temaspecifik detektionstest, som bruges til at give et første indtryk af elevernes eventuelle læringsvanskeligheder. Bl.a. på baggrund af testresultaterne udvælges elever med matematikspecifikke læringsvanskeligheder. Efter en diagnosticering udvikles et interventionsprogram for de udvalgte elever på baggrund af forskningslitteraturen vedrørende semestrets tema.

Arbejdet med de tre miniprojekter (del 1-3) foregik i grupper. Da denne gruppe først blev konstitueret i løbet af 2. semester af matematikvejlederuddannelsen er der tre forskellige bidrag til første semester. I denne rapport fremhæves kun en af disse rapporter, der inkluderes i sin helhed som bilag, imens de to andre rapporter fra 1. semester er opsummeret, og opsummeringerne er vedlagt som bilag til denne rapport.

I dette projekt har vi arbejdet med elever med følgende læringsvanskeligheder:

Del 1: Algebra, bl.a. brøkregning

Del 2: Ræsonnementskompetence

Del 3: Visualiserings- og matematiseringsevner

Rapporten består af en præsentation af vores tre delprojekter mht. indhold, litteratur, findings og metoder. Derefter følger refleksioner på tværs af projekterne vedr. metodevalg og forskningslitteraturen. Sidste afsnit beskriver vores læringsudbytte af kurset og vores arbejde som matematikunderviser/-vejleder videre frem.

[2] Kurset afholdes af matematikdidaktikere ved IMFUFA/NSM, Roskilde Universitet.

Kort præsentation af de enkelte delprojekter

DEL 1 – Begreber og begrebsdannelse
Når lærerne ved, at eleverne har lært regneregler inden for taldomænet, forventes det på gymnasiet, at eleverne kan overføre disse regler til bogstavdomænet. Erfaringen viser dog, at forholdsvis mange elever har vanskeligheder med opgaver inden for bogstavdomænet, altså med abstraktionen fra tal til bogstaver. Til 1. semester projektet blev der udvalgt elever, som klarede sig forholdsvis godt ved talopgaver og havde vanskeligheder med opgaver inden for bogstavdomænet. F.eks. kunne elev N ikke udregne x-x, fordi han mente, at "man ikke ved, hvad x er. " Diagnosticeringsinterviewet viste, at elev H havde store vanskeligheder med brøkregning, derfor blev der lagt stor vægt på brøkregning i interventionsprogrammet.

Interventionen blev gennemført som par-intervention. Som matematikfagdidaktiske teorier blev der hovedsageligt arbejdet med empirisk abstraktion (Mitchelmore & White, 2004) og skift mellem repræsentationsformer (Duval, 2006).

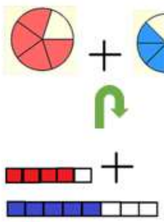
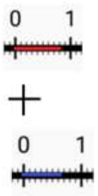
Problemformulering DEL 1
- I hvor høj grad kan indlæring gennem *empirisk abstraktion* og *transformation mellem repræsentationsformer* bidrage til en relationel forståelse?

- I hvor høj grad kan en relationel forståelse for talopgaver bidrage til elevernes forståelse for opgaver med bogstavregning?

- Hvorvidt kan en relationel forståelse for simple opgaver med bogstavregning bidrage til en forståelse af mere komplekse opgaver?

Forskningen viser, at abstraktionsniveau ikke kan tilegnes vha. "en manual", men at det kræver opgavetræning: Det er nødvendigt at træne mange opgaver inden et abstraktionsniveau kan opnås (Mitchelmore &White, 2004). Skemp (1976) skelner mellem relationel forståelse og instrumentel forståelse. Har man en relationel forståelse, så ved man, hvad man skal gøre og hvorfor. I diagnosticeringsinterviewet fik elev H ½ + ½ til at give ¼. Det er et tydeligt tegn på, at han ikke har en relationel forståelse inden for brøkregning, ellers ville han ikke lave denne fejl i udregningen.

Duval (2006) skriver, at matematikforståelse er svær, fordi der ikke findes en direkte adgang til matematiske objekter. Matematik kræver adgang via semiotisk repræsentation (=brug af tegn). Den kritiske tærskel for fremskridt i læringen og problemløsninger er ifølge forfatteren evnen til at skifte fra en repræsentationsform til en anden. Duval skelner mellem oversættelse/"treatment" (transformationer af repræsentation inden for samme register) og omformning/"conversion" (transformationer af repræsentation med registerskift). De fire registre består af kombinationerne af sproglige vs. visuelle repræsentationer og simple matematiske processer vs. komplekse kognitive processer. Figur 1 viser en simplificeret version af Duvals registerskema. De forskellige repræsentationsformer er illustreret vha. et tilføjet eksempel inden for emnet brøkregning. De grønne pile symboliserer oversættelse ("treatment") inden for et register. De røde pile symboliserer omformning ("conversion") fra en repræsentationsform til en anden og er ifølge forfatteren den kritiske tærskel for fremskridt i læringen og problemløsninger. Skemaet fra figur 3 blev brugt i interventionen til at designe opgaverne med henblik på at skabe en progression fra simple opgaver inden for treatment til mere komplekse opgaver, som kræver conversion. Desuden er skemaet blevet brugt til at sikre sig, at flest mulige opgaver indeholder registerskift.

	Diskursive (sproglige) repræsentationer Eks. Sprog, algebra	**Ikke-diskursive (visuelle) repræsentationer** Eks. Billede, diagram, graf
Multifunktionelt register Processer kræver mere end matematiske processer: forestillingsevne, forklaring, kommunikation	Der er to pizzaer: Den ene er skåret i 5 lige store stykker, hvoraf 4 af dem er blevet spist. Den anden er skåret i 8 stykker hvoraf 5 stykker er blevet spist. Hvor meget af de to pizzaer er blevet spist?	
Monofunktionelt register De fleste processer er matematiske processer (simpel)	$\frac{4}{5}+\frac{5}{8}=\frac{32}{40}+\frac{25}{40}=\frac{57}{40}$ $0.8+0.625=1.425$	

Figur 1: Simplificeret form af Duvals skema med eksempler fra emnet brøkregning. Grønne pile symboliserer oversættelse og røde pile omformning til et andet register. Åbne røde pile symboliserer ikke-kongruente sammenhænge.

Figur 2 viser et eksempel på interventionsopgaver. Kategorierne grøn, gul og rød er en progression fra opgaver med praktiske eksempler fra hverdagen til teoretiske regneopgaver og opgaver inden for bogstav-domænet. Opgaverne inden for den grønne og gule kategori følger opskriften for empirisk abstraktion (Mit-chelmore & White, 2004). Ifølge forfatterne kan et empirisk abstraktionsniveau opnås ved først at skabe fortrolighed med emnet vha. eksempler fra hverdagen og almindeligt sprogbrug ("Familiarization"). Deref-ter kan man skifte til andre opgavetyper, i hvilke eleverne kan genkende lignende situationer ("Similarity recognition"). I dette trin introduceres til fagsprog.

2. Du spiser 1/12 af en hel lagkage og 1/3 af en hel lagkage. a) Opstil et regnestykke, i hvilken du beregner, hvor meget af en lagkage du har spist i alt. b) Tegn lagkagen og marker, hvor meget der er spist. c) Opstil en generel regneregel for løsningen af opg 2a).	Eksempler fra hverdagen (Familiarization)	Fra taldomæne til
6. Løs følgende opgaver, brug gerne din formelsamling: a) $\frac{1}{8}+\frac{1}{3}$	Teoretiske opgaver (Similarity recognition)	
7. Løs følgende opgaver, brug gerne din formelsamling: e) $\frac{1}{x}-\frac{1}{3\,x}$		bogstavdomæne

Figur 2: Eksempel på interventionsopgaver baseret på teorien om empirisk abstraktion.

Resultaterne fra dette projekt tyder på, at en kombination af empirisk abstraktion og omformning /"conversion" mellem forskellige repræsentationsformer gav vores elever en større sikkerhed inden for brøkregning, og vi vil også påstå, at eleverne har fået en mere relationel forståelse for denne del af matematikken. Eleverne kunne også overføre brøkregningsregler til opgaver inden for bogstavdomænet, hvilket tyder på, at de har opnået et højere abstraktionsniveau indenfor brøkregning.

DEL 2 – Ræsonnementer og bevisførelse

I dette semester arbejdede vi med vanskeligheder inden for ræsonnement og bevisførelse. Eleverne i vore 3 klasser (3g htx A, 3g stx A og 2g stx A/B) besvarede ud over detektionstesten også et spørgeskema om matematikforestillinger[3], som også kaldes ”beliefs” og kan beskrives som ”de linser, vi ser og fortolker verden gennem”.

Spørgeskemaet viste, at over halvdelen af eleverne i hver klasse var enig i udsagnet at ”Matematik handler mest om at huske”. Desuden svarede ca. halvdelen i to ud af vores tre klasser, at ”selvom man beviser noget ved at regne med bogstaver, er det ikke sikkert, at det gælder for alle tal. ” Dvs. at de fleste elever ikke accepterer deduktive bevisskemaer som almengyldige.

Dette ledte os til følgende problemformulering[4]:

> **Problemformulering DEL 2**
>
> I hvor høj grad kan vi vha. stilladserede opgaver[5] ændre elevernes opfattelse af matematik som huskeregel-fag?
>
> I hvor høj grad kan elever vha. interventionsprogrammet flyttes fra at *have et* empirisk bevisskema til at *have et* (og acceptere et) deduktivt bevisskema?

Første del af problemformuleringen inddrog elevernes matematikforestillinger, mens anden del gik på bevisskemaer (overbevisningsskemaer). For at besvare denne problemformulering inddrog vi teori om bevisets rolle (De Villiers 1990, Dreyfus 1999, Dreyfus & Hadas 1996), bevisskemaer (Harel &Sowder 2007, Healy & Hoyles 2000), sociomatematiske normer (Yackel & Cobb 1996), beliefs (Jankvist 2015, Op ’T Eynde et al. 2002) og den didaktiske kontrakt (Brousseau 1997, Blomhøj 1995). Selvom kun to af disse teorier blev nævnt eksplicit i problemformuleringen, gav det god mening at inddrage alle disse teorier, da de er forbundet på kryds og tværs. Det er desuden velbeskrevet i litteraturen, hvordan elevers beliefs påvirker deres tilgang til at løse matematikopgaver og deres lyst og evne til at lære matematik.

Da manglende regnefærdigheder ofte spænder ben for beviser, udvalgte vi elever, som svarede rigtigt på mange af spørgsmålene i detektionstesten, men som havde svært ved at begrunde deres svar. Der blev valgt en kombination af individuel intervention/par- og klasseintervention, da resultaterne fra diagnosticeringen viste, at alle klasser ville have gavn af et interventionsforløb. Pga. begrænset tid til rådighed i klasserne, var det dog ikke muligt gennemføre hele interventionsforløbet på klassen.

Som nævnt ovenfor blev der på skolerne valgt forskellige kombinationer af individuel intervention/par- og klasseintervention. Interventionsforløbene var også forskellige mht. varighed, omfang og indhold, men til interventionen blev der valgt opgavetyper, som kunne løses både grafisk, med tal og generelt. Da der er progression i disse løsningsmetoder, og da eleverne både har svært ved at forstå opgaveformuleringens logik og ved at opstille den generelle løsning, blev opgaverne i interventionsprogrammet stilladseret således, at eleverne blev tvunget til at starte med den grafiske løsning, derefter skulle opgaven løses med et

[3] Skemaet ses i sin helhed i del 2.

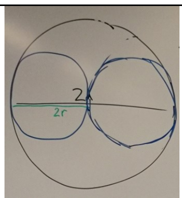
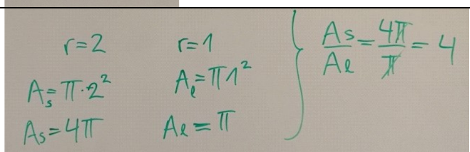
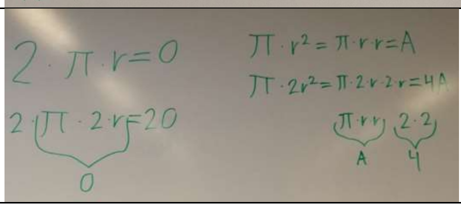
[4] Her lettere redigeret.

[5] Forklares i det følgende.

taleksempel, og til sidst skulle den generelle løsning findes (se figur 3). Stilladseringen havde to formål – at styrke elevernes evne til at angribe opgaverne og til at generalisere.

Figur 3: Stilladsering af interventionsopgaver

Figur 4 viser en del af introduktionen til klasseinterventionsforløbet på htx i Vejle, i hvilken eleverne selv præsenterede deres forskellige løsningsveje til opgave 15 fra detektionstesten for hinanden, og resten af klassen skulle bedømme graden af deres overbevisning. Formålet var både en introduktion til de tre forskellige bevisformer grafisk, empirisk og deduktivt bevis samt fokus på kvalitet i svarene, dvs. de sociomatematiske normer var også i spil.

		Graden af overbevisning af klassen (22 elever)		
Opgave 15	Søren siger, at hvis man laver en ny cirkel ved at halvere diameteren i en cirkel, har den nye cirkel både halvt så stor en omkreds og halvt så stort et areal som den oprindelige. Har Søren ret?	Ikke	Lidt	Helt
Grafisk bevis		0	8	14
Empirisk bevis (taleksempel)		0	2	20
Deduktivt bevis (Generelt bevis)		0	3	19

Figur 4: Eksempel på introduktion til klasseintervention på htx i Vejle.

Vi havde i interventionsforløbet også fokus på, hvilke regler vi forventede, at eleverne skulle huske samt hvilke regler det ikke var nødvendige at huske, fordi de kunne udledes. Igen var det lidt forskelligt på skolerne, da fx eleverne på htx ikke kunne få en delprøve uden hjælpemidler til eksamen. Efter interventionsforløbet kunne der generelt ikke konstateres en målbar ændring af elevernes opfattelse af matematik som huskeregelfag på klasseniveau. Det er ifølge Jankvist (2015) også vanskeligt at ændre elevers beliefs, og det er vanskeligt at ”måle” dem direkte. Eleverne på alle skoler blev dog via interventionsforløbet (ved at udfylde spørgeskemaet om matematikforestillinger) mere bevidste om problemstillingen.

Ved at have fokus på forskellige løsningsveje blev eleverne også mere bevidste om, at der ikke kun findes én løsningsvej til en opgave, og at nogle løsningsveje er mere sofistikerede end andre. Generelt var motivationsniveauet for forløbet i klasserne mindre god, bl.a. fordi CAS ikke var tilladt, og det var en stor omstilling for især htx-eleverne. En meget mere positiv tilgang til interventionsopgaverne og forløbet sås ved den individuelle intervention / parinterventionen. Dette skyldtes sandsynligvis både, at der blev valgt elever, som gerne ville lære matematik, samt at eleverne kunne fornemme, at forløbet var skræddersyet til deres læringsvanskeligheder.

DEL 3 – Modeller og modellering

Når man tænker på modelleringsopgaver på gymnasieniveau, ville de fleste gymnasieundervisere associere det med typiske skriftlige eksamensopgaver, ved hvilke et datasæt er givet, og en passende matematisk model skal opstilles, altså opgaver udelukkende inden for det matematiske domæne. Forskningen har vist at modelfremkaldende aktiviteter i en bredere forstand har medført ”dramatiske” læringsfremskridt (Lesh og Doerr, 2003). Erfaringer fra dette studie igennem 25 år har vist at svage elever vha. modelleringsopgaver bliver i stand til at opfinde matematiske ”konstrukter” som f.eks. begrebsudviklingen af proportionalitetsforhold.

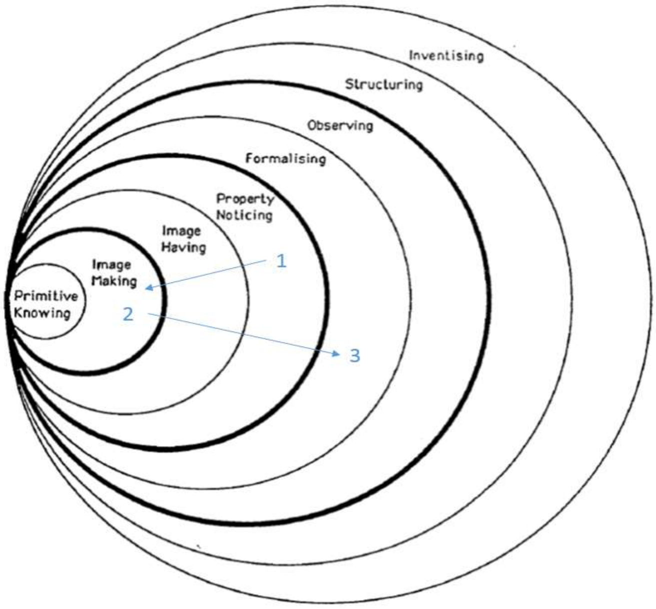
På baggrund af detektionstesten udvalgte vi eleven Emma, som havde store vanskeligheder med modelleringskompetencerne prærnatematisering, matematisering og validering. Diagnosticeringen af Emma viste, at hun er en meget usikker elev, som har store vanskeligheder med løsning af simple opgaver, herunder både traditionelle problemløsningsopgaver og modelleringsopgaver. Det er til tider uklart for Emma, hvilken information hun skal bruge, hun har svært ved at overføre viden fra tidligere opgaver.

I interventionen har vi valgt at arbejde med skalering og simpel geometri. Formålet var at styrke primært hendes matematiseringsevner inden for dette faglige område. Vi benyttede os af opgaver, som primært krævede modelleringsprocessen matematisering (atomistisk tilgang), men også enkelte opgaver, som kræver alle modelleringsprocesser i modelleringscyklussen (holistisk tilgang). Vi valgte at arbejde med legoklodser og tegninger/skitser, da hun ifølge Piries og Kierens (1994) 8 niveauer af matematikforståelse skal tilbage til billeddannelse-niveauet (image making) inden hun kan flyttes til højere matematikforståelsesniveauer. Det sås tydeligt i diagnosticeringen, at Emma havde svært ved visualiseringen af opgaven både ved en tredimensionel opgave (terningen), men også ved todimensionelle opgaver (f.eks. sammenhængen mellem diameter og radius). Her sagde Emma, at radius skulle beregnes som kvadratroden af diameteren. Hun havde tydeligvis ikke et billede (image having) af en cirkel med diameter og radius i hovedet.

Problemformulering DEL 3

I hvor høj grad kan “folding back” til billeddannelse (image making) i forbindelse med modelleringsopgaver udvikle matematiseringsevner?

Brug af legoklodser i interventionen var meget nyttig ift. begreberne kantlængde, areal og volumen. I løbet af interventionen blev legoklodserne mere og mere afløst af skitser, som Emma i slutningen af forløbet tegnede uopfordret. Skitserne var en ”folding back” til billeddannelsesniveau, som Emma havde brug for, hvis hun skulle kunne løse opgaven. Figur 5 viser en "mapping" af Emmas forståelsesniveau i løbet af en interventionsopgave. Opgaven krævede et højt forståelsesniveau, men Emma havde brug for at blive ført tilbage til billeddannelsesniveauet hvorefter hun kunne løse opgaven.



Figur 51: Visuel repræsentation af Emmas forståelsesniveau under løsning af opgaven. Numrene repræsenterer, hvor det vurderes at Emmas forståelse er på forskellige tidspunkter i opgaveløsningen. Figuren er tilpasset fra Pirie and Kieren (1994).

Konklusionen på del 3 projektet er at "folding back" har været en stor succes, idet Emma har fået bedre styr på geometriske begreber, er bedre til matematisering og er blevet mere selvsikker. Hun tænker sig godt om, inden hun svarer, og har lært, at skitsetegningen er en god strategi for hende.

Refleksion over delprojekterne

På tværs af delprojekterne vil vi reflektere over metodevalg, anvendte teorier og vores læringsudbytte herfra.

Metodeovervejelser

I del 1 havde vi gode erfaringer med par-interventionen. Begge elever var på lignende matematikforståelsesniveauer, hvilket betød, at eleverne diskuterede med hinanden og hjalp hinanden, så de selv kunne komme frem til mange resultater, fremfor at der var behov for hjælp fra matematikvejlederen. Mens eleverne diskuterede med hinanden, havde vejlederen tid til at observere situationen. I del 2 og del 3 blev vi sammensat i nye grupper, som for vores vedkommende resulterede i en helt ny tre-mandsgruppe af matematikvejlederstuderende.

I del 2 valgte vi at arbejde med både individuel intervention / parintervention og klasseintervention på tre forskellige skoler, som resulterede i mange data og manglende tid til at gå i dybden med de enkelte elevers læringsvanskeligheder. Med denne erfaring besluttede vi i 3. semester at have fokus på en enkelt elev (Emma) på én af skolerne. I tre ud af fire møder med Emma var to vejledere til stede. Desuden blev alle møder filmet og transskriberet som grundlag for vores gruppediskussioner. Dette betød, at vi havde et omfangsrigt diagnosticeringsmateriale af en enkelt elev, og vi kunne stille en præcis diagnose og skræddersy et individuelt interventionsprogram til Emma. Vores erfaring viser, at vi kunne diagnosticere mere præcist og observere større fremskridt ved denne individuelle intervention i forhold til klasseinterventionen i del 2. Det tager tid at stille en diagnose, og specielt som mindre erfaren matematikvejleder er det en god ide at filme situationen for at kunne gense elevernes svar og forstå elevens læringsvanskeligheder. Ulempen med en individuel intervention kan være, at tænkepauserne kan føles lange for eleven, specielt i starten af interventionen, i hvilken situationen er uvant og ny.

Dette oplevede vi ikke som et problem med Emma i del 3 projektet, men andre elever føler sig muligvis mere trygge, når de kan være i en parintervention. Vores erfaring med klasseintervention, som vi prøvede i del 2, var mindre god. Udover at man ikke kan gå i dybden med hver enkelt elevs læringsvanskeligheder ved en klasseintervention, betyder det også rigtig meget for forløbet, at eleverne er motiverede. Når vi har valgt enkelte elever til vores interventionsprogram, har vi bl.a. valgt elever, som er motiverede for at forbedre sig i matematik. I en klasseintervention ville der altid være elever, som er mindre motiverede. Når man arbejder med mere komplekse emner som bevisførelse og modellering, er det vigtigt, at eleverne ikke har for store udfordringer med deres basale regnefærdigheder, da man ellers hurtigt kan miste fokus fra selve interventionen. Disse elever ville have det svært i en klasseinterventionen, hvor det kan tage tid at få hjælp eller støtte fra underviseren. Hvis man har diagnosticeret en hel klasse til at have de samme læringsvanskeligheder, kan det være en god ide at lave en intervention med hele klassen.

I del 1 projektet tog vi udgangspunkt i en kombination af to teorier, som fungerede godt. Dog har vi været lidt for ambitiøse mht. målingen af effekten af interventionen, og vi kunne derfor ikke svare fyldestgørende på alle tre problemformuleringsspørgsmål. I del 2 projektet bestod diagnosticeringen af både detektionstest, interview og et spørgeskema om beliefs, som viste, at mange elever så matematik som ”huskeregelfag”, at deduktive beviser ikke er almengyldige og at der kun findes en rigtig løsning (den, som læreren lige har vist). Vi syntes at alle aspekter var vigtige at arbejde med, men i forhold til at lave en videnskabslignende undersøgelse ville det have været bedre at begrænse sig til et fokusområde. I del 2 projektet erfarede vi, at det er svært at måle effekten af interventionen, når vi ”jagter det hele”. Derfor havde vi stort fokus på begrænsning i del 3 projektet, hvor vi koncentrerede os om en teori og et afgrænset matematikemne. Del 3 interventionen resulterede i en tydelig effekt hos eleven Emma.

Når vi diskuterer effekten af vores interventioner, skal man fremhæve, at vi arbejder med forskningslignende projekter og ikke med videnskabelige forsøg. Hvis man lavede videnskabelige forsøg, skulle man arbejde med en større gruppe forsøgspersoner. En del af forsøgspersonerne skulle gennemføre et interventionsforløb, mens en kontrolgruppe skulle vise, om der er sket en målbar udvikling over tid uden interventionsforløb. Man skulle også måle, om interventionen resulterer i en længerevarende effekt. Det kræver flere forsøgspersoner og mere tid. Desuden skulle man helst have en objektiv måling af interventionsforløbets effekt. Vi er gået fra at måle effekten af interventionen ved testlignende situationer til at observere effekten som udvikling igennem interventionsforløbene. Dette var et bevidst valg, da en test altid skaber en kunstig situation. Desuden kan eleven føle sig presset til at præstere godt så man ikke nødvendigvis får det rigtige billede ved en test.

I alle vores delprojekter har vi lavet undersøgelser på baggrund af vores erfaringer. Det er derfor ikke muligt at generalisere ude fra vores resultater, da en generalisering ville kræve en empirisk undersøgelse. Når vi stiller en diagnose for en klasse eller enkelte elever, kan vi detektere og definere elevernes læringsvanskeligheder. Ved at udvikle og afprøve et interventionsforløb, kan vi gribe ind over for de detekterede matematikspecifikke vanskeligheder og måle effekten af interventionen. Dermed består vores undersøgelse både af en detektion og definition af matematikspecifikke vanskeligheder (1) og en undersøgelse af interventionens effekt (2). De fleste fagdidaktiske artikler giver ikke ”opskrifter” på interventioner, men svarer til definitioner af læringsvanskeligheder. Kilpatrick (1995) skriver, at et studies resultater kan være den mindst interessante del af et studie. Relevansen af forskning inden for matematikundervisningen ligger til gengæld i, at den får os til at stoppe op og tænke: Matematikdidaktisk forskning giver os værktøjer til at reflektere over vores arbejde og giver os begreber og teknikker, som vi kan arbejde med (ibid.). Når man griber ind over for en elevs læringsvanskeligheder, er der ikke nødvendigvis kun en ”rigtig” brugbar teknik. Begreber og teknikker fra forskellige studier kan anvendes, eller de kan supplere hinanden. I næste afsnit sætter vi vores anvendte teorier i perspektiv til andre teorier.

Matematikdidaktisk litteratur

I semester 1 arbejdede vi med elevers vanskeligheder inden for brøkregning. Elev H havde f.eks. regnet $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ uden at bedømme, om dette resultat så realistisk ud. Derudfra konstaterede vi, at elev H ikke havde opnået en relationel forståelse inden for brøkregning. Hvis man har forstået en regneregel, og den er meningsfyldt, vil man kunne huske eller være i stand til at udlede denne regel. Da H ser sig nødsaget til at gætte en regneregel, har brøkregneregler muligvis aldrig givet mening for ham. Sandsynligvis har H i folkeskolen regnet brøkregningsopgaver, som var understøttet af billeder af lagkager, pizzastykker e.l., og opgaverne har givet mening for ham på det tidspunkt. Men da han på gymnasiet skulle løse opgaver uden understøttelse af billeder, havde H svært ved at komme frem til den rigtige regnemetode. I del 1 projektet brugte vi en kombination af metoderne empirisk abstraktion (Mitchelmore & White, 2004) og oversættelse mellem forskellige repræsentationsformer (Duval, 2006). Ifm. brøkregning skulle eleverne selv tegne den visuelle repræsentationsform, og dette dannede grundlag for udregningen, dvs. at den visuelle repræsentationsform konstant blev koblet til opgaverne.

Pirie og Kierens (1994) artikel om forståelsesniveauer kunne også have været anvendt som alternativ til Duval (2006) og Mitchelmore & White (2004). Ifølge Pirie og Kierens teori skal elev H befinde sig i forståelsesniveauet ”property noticing” for at kunne løse opgaven, men uden at have et mentalt billede af brøker i hovedet, kan han ikke løse opgaven. Ved at føre ham tilbage (”folding back”) til ”image making” niveauet (ved at tegne to halve pizzaer) kan han selv blive i stand til at komme frem til den rigtige regnemetode, hvorefter han kan løse opgaven og muligvis komme længere op i forståelsesniveauet ”formalising” og opstille generelle regneregler for brøker.

Dette eksempel viser, at der ikke nødvendigvis kun findes en fagdidaktisk metode til at gribe ind over for en elevs læringsvanskeligheder. Interventionsforløb baseret på forskellige matematikdidaktiske metoder kan medføre succes.

I del 2 projektet valgte vi at guide eleverne igennem bevis opgaver ved at opgaverne skulle løses i følgende rækkefølge: grafisk bevis, empirisk bevis og deduktivt bevis. Der kan vi også se en parallel til Piries og Kierens forståelsesniveauer, da det grafiske bevis kræver image making forståelsesniveauet. Det empiriske bevis kræver property noticing niveauet. For at man til sidst kan opstille et deduktivt bevis, kræves forståelsesniveauet ”formalising”. I del 2 klasseinterventionen observerede vi, at nogle elever ikke kunne løse opgaverne, selvom vi guidede dem til at starte med et grafisk bevis. Det tyder på, at eleverne ikke var i stand til selvstændigt at oversætte opgavens indhold til figurer og havde brug for støtte til det. Andre elever kunne gennemføre et deduktivt bevis uden at starte med et grafisk og empirisk bevis. Dette tyder på, at eleverne havde mentale billeder af opgavesituationen og ikke havde brug for ”folding back”.

Disse forskellige tilgange til besvarelsen af en opgave kan føre til matematikforestillinger som f.eks. nævnt i (EMS, 2013):

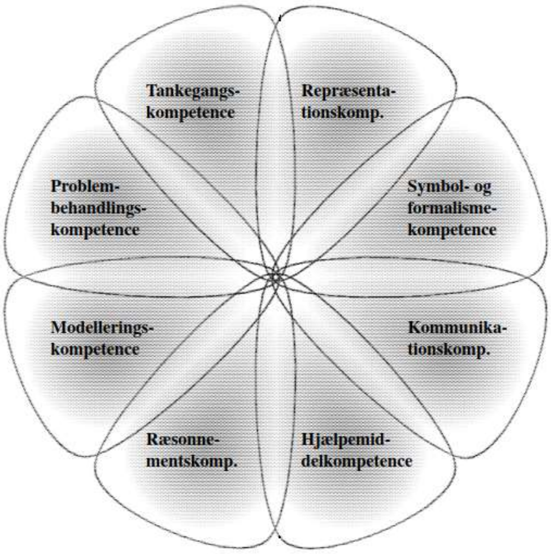
Matematik er uretfærdig: nogle elever er privilegerede, mens de fleste andre ikke er

Matematikopgaver har kun et rigtig svar og tusinde af forkerte svar.

Ethvert matematisk problem kan løses på to minutter, eller også kan det ikke blive løst

Det kan være svært for motivationen i matematikundervisningen, når elever har matematikforestillinger, som påvirker dem i en negativ retning. Derfor kan det være vigtigt at arbejde med elevernes beliefs. I del 2 interventionen startede vi med at undersøge elevernes beliefs vha. et spørgeskema, som bekræftede nogle af de fordomme, som er nævnt i litteraturen. Som intervention lod vi eleverne vise forskellige beviser for klassen. Dermed kunne eleverne se, at der ikke kun fandtes en rigtig løsningvej, men forskellige løsningsveje. Den sociomatematiske norm "matematisk forskelligt" (Cobb & Yackel, 1996) kræver højkognitiv aktivitet. For at bedømme, om noget er matematisk forskelligt, skal to løsningsveje sammenlignes, og ligheder og forskelle skal bedømmes. Dermed bliver løsningsvejen et objekt af egenrefleksion. Samtidig bliver læreren klogere på elevens matematiske aktivitet og forståelse/ (konceptuelle) udvikling. Cobb & Yackel (1996) skriver, at sociomatematiske normer fremmer udviklingen af elevernes beliefs. Det lykkedes os desværre ikke at konstatere en målbar ændring af elevernes beliefs i del 2, men vi var også klar over, at det er svært at måle ændringer af elevers beliefs direkte (Jankvist 2015). Vi mener dog, selvom vi ikke direkte har arbejdet med beliefs i de andre projekter, så har vi påvirket vores forsøgspersoners beliefs vha. vores intervention. F.eks. har Emma i del 3 projektet flyttet sig fra at være en spørgende elev, som konstant søger ekstern validering til at have tilegnet sig gode strategier til at angribe en opgave og til at tænke selvstændigt. Det skaber en bedre motivation, når man selv har mulighed for at angribe en opgave. Det må have ændret på hendes beliefs omkring matematikfaget og på give hende tro på egne evner.

De tre delprojekter beskrevet i denne rapport har haft til formål at identificere, diagnosticere og behandle elevers matematikvanskeligheder. Disse matematikvanskeligheder kommer til udtryk hos elever, der har svage kompetencer inden for matematik. KOM rapporten fra 2002 (Niss & Jensen, 2002) giver en alternativ tilgangsvinkel til matematikundervisning baseret på at udvikle elevers kompetencer i forhold til det mere traditionelle fokus på at elever skal lære et pensum. Kompetenceblomsten (se figur 6) er en visuel repræsentation af de 8 forskellige matematikkompetencer, der er nødvendige for at kunne udføre matematiske aktiviteter. Ud over dette viser kompetenceblomsten også, at selvom de 8 kompetencer kan beskrives individuelt og veldefineret, så er der også en vis mængde af overlap i større eller mindre grad mellem de forskellige kompetencer. Der er selvfølgelig større overlap mellem nogle kompetencer, som kan ses i kompetenceblomsten som overlap imellem blomstens kronblade, men alle kompetencerne har overlap som ses i centrum af kompetenceblomsten.



Figur 6: Kompetenceblomsten fra KOM rapporten

Når en elev har matematikvanskeligheder, er der altså tale om en eller flere af disse 8 kompetencer, som eleven ikke har udviklet i tilstrækkelig grad for at kunne gennemføre normal matematikundervisning. I det følgende beskrives hvilke kompetencer, vi primært har arbejdet med at udvikle hos eleverne i de tre del-projekter.

I det fremhævede delprojekt på semester 1: ”Begreber og begrebsdannelse” blev der i interventionen arbejdet med brøker og forskellige repræsentationer af brøker. Opgaverne i interventionen er som tidligere nævnt designet på baggrund af teori af Duval (2006), der beskriver registerskifte som særligt vanskelige, og det er ved at træne disse registerskifte skal hjælpe med at hæve elevernes forståelse (af brøker) til et relationelt niveau (Skemp 1976). I forhold til matematikkompetencerne er der her primært arbejdet med repræsentationskompetencen, da der arbejdes med forskellige repræsentationer af brøker og symbol- og formalisme kompetencen, da der skal forstås brøkregneregler og arbejdes med bogstaver som symboler.

I delprojektet på semester 2: ”Ræsonnementer og bevisførelse” blev der i interventionen arbejdet med avancerede opgaver, der havde en gradvis stigning i sværhedsgrad og abstraktionsniveau. Opgaverne havde en vis form af generalitet over sig, og de afsluttende opgaver nærmede sig beviser. Der har under interventionen været arbejdet med en kombination af skriftlig og mundtlig kommunikation i både klasse- og parinterventionerne. Det er derfor klart, at der er blevet arbejdet med elevernes ræsonnementskompetence. Kommunikationskompetencen har været i højsædet, da vi har arbejdet med elever, der i detektionstesten ikke har kunnet forklare deres svar tilstrækkeligt.

I delprojektet på semester 3: Modeller og modellering i matematik er det modelleringskompetencen, der primært har været i fokus. Her kan det dog nævnes, at da modelleringskompetencen handler om at kunne bruge matematik i et felt uden for matematikken selv, er den i særlig grad svær at adskille fra de andre kompetencer. I stedet kunne man betragte modelleringskompetencen som en overkompetence, der indeholder mange af de andre kompetencer i de forskellige faser af den matematiske modellering. Da vi i interventionen har arbejdet med en kombination af en atomistisk og holistisk tilgangsvinkel til matematisk modellering har der været særlig fokus på det særligt svære inden for matematisk modellering, nemlig matematisk problemløsning og matematisering, hvor vores fokus især har været på matematisering.

Det er værd at nævne, at det har været et bevidst valg ikke at arbejde koncentreret med CAS i delprojekterne. Det betyder ikke, at hjælpemiddelkompetencen ikke har været i spil. Det har bare været i form af mere håndgribelige hjælpemidler så som tegninger, skitser og formelsamlinger. Der har også været brugt lommeregner i nogle situationer for at undgå spildtid.

I del 3 projektet arbejdede vi med modellering. Der er forskellige tilgange til modelleringsopgaver, f.eks. kan modellering have to forskellige didaktiske mål:

1. Modellering som mål
2. Modellering som middel

Dette kan lade sig gøre pga. modelleringskompetencens dobbeltrolle som beskrevet før under modelleringskompetencen. Ved at arbejde med matematiske modeller i et felt uden for matematikken kommer alle de andre matematiske kompetencer i spil. Derfor kan modellering både være målet i sig at lære som selvstændig disciplin, men kan også bruges som mål til styrke de 7 andre matematiske kompetencer.

Når man arbejder med modellering som mål, har man fokus på modelleringskompetencen, fordi det vurderes at være en vigtig del af matematikundervisningen. Her er det altså modellering i sig selv, der er målet. Det kan være en fordel at have fokus på både hele modelleringscyklussen (holistisk tilgang), men også på enkelte modelleringsprocesser (atomistisk tilgang) som f.eks. matematisering og matematisk problemløsning, da disse processer har vist at kræve mere træning end andre processer. I litteraturen er modellering som mål repræsenteret af artikler fra forfatterne Ferri (2006) og Blomhøj & Jensen (2003). Ferri beskriver, hvad matematisk modellering er og gennemgår forskellige beskrivelser af opbygning af matematiske modeller i litteraturen og undersøger hvad, der er særligt vanskeligt ved at arbejde med matematisk modellering. Blomhøj og Jensen beskriver mere, hvordan man som underviser kan lære studerende at arbejde med matematisk modellering, og de kommer frem til, at eleverne skal have mulighed for at arbejde med matematiske modeller holistisk og atomistisk med særlig fokus på matematisering, da det typisk er den vanskeligste del af modelleringsprocessen.

Man kan arbejde med modellering som middel til f.eks. at styrke begrebsdannelsen inden for forskellige emner inden for matematik, såsom brøker og lineære funktioner. Denne tilgangsvinkel til matematikundervisning er repræsenteret i litteraturen ved blandt andet forfatteren Freudenthal (1991). For Freudenthal er matematikken og især matematiseringsdelen af matematiske modeller så vigtige for matematikken, at de ikke kan skilles af. Matematisering i matematiske modeller kan altså bruges som middel til at forstå matematik og dens strukturer.

Ud over det didaktiske mål kan man også skelne mellem modellering inden for matematikken og ikke-matematiske situationer. Sidstnævnte kan bruges til at bryde paralleliteten mellem matematikundervisningen og praksis, som har vist sig at være læringsfremkaldende (Lesh & Doerr). Her bruges matematisk modellering som et didaktisk værktøj til at skabe motivation. Modelleringskompetencen er den eneste af de 8 kompetencer, som involverer den omkringliggende verden.

I vores del 3 projekt valgte vi bevidst problemstillinger fra hverdagen, som f.eks. sammenligning af priser på forskellige pizzastørrelser. Man kan fremføre, at vi har brugt modellering både som mål og som middel. Da vi har haft fokus på modelleringscyklussen (i en simplificeret version) sammen med eleven Emma, har vi arbejdet med styrkelse af hendes modelleringskompetence og derfor arbejdet med modellering som mål. Samtidig har modelleringsopgaverne været et middel, der har hjulpet Emma med at forbedre sin begrebsforståelse inden for areal og til dels også omkreds. Dermed kan man konkludere, at de to didaktiske mål ikke behøver at være adskilt, men sagtens kan støtte hinanden.

Vores arbejde videre frem

Denne uddannelse har været en øjenåbner for elevernes matematikvanskeligheder. Som undervisere har vi ikke selv haft de vanskeligheder, som eleverne har. Generelt har vi lært, at det er vigtigt at tage sig god tid i undervisningen til at lytte til de enkelte elevers tankegange. Hvis elevens fremgangsmåde ikke er rigtig, er det vigtigt at forstå hvilke snublesten, eleven er faldet over. Diagnosticeringsdelen af uddannelsen har givet os træning i at detektere læringsvanskeligheder. Vi er blevet mere bevidste om, at der findes mange elever med læringsvanskeligheder, og vi kan sige til eleven: "du er ikke den eneste, der har vanskeligheder, og man kan gøre noget ved det. " Hvor vores indgriben før kurset har været mere intuitiv, er vi nu i stand til at sætte ord på vha. begreber fra faglitteraturen. I følgende afsnit beskrives, hvordan vi vil varetage vores rolle som matematikvejleder på skolen. Desuden diskuterer vi, hvordan matematikvejlederuddannelsen har ændret vores måde at tænke på som undervisere.

Matematikvejlederopgaver

Først vil vi præsentere generelle overvejelser over hvilke arbejdsopgaver, vi ser, indeholdt i en matematikvejlederfunktion. Dernæst præsenteres konkrete erfaringer fra Sønderborg Statsskole.

Det er en god idé både at samarbejde med skolens øvrige matematiklærere samt lærere i naturvidenskab, samfundsfag og erhvervsøkonomi[6] omkring hvilke elever, der skal hjælpes, da matematikvanskeligheder kan vise sig i alle disse fag. Samarbejdet med skolens øvrige matematiklærere bør formaliseres og fx være et fast punkt på matematiklærermøderne. Der skal selvfølgelig være plads til henvendelser løbende, men med en ny funktion er det også godt med en ramme. På sådanne møder kan man desuden diskutere, om det er ønskeligt at teste for fx vanskeligheder med modellering. Mht. samarbejdet med de andre ovennævnte faggrupper kunne man fx skemalægge et møde i efterårssemestret.

For at vejledning kan lykkes, er det vigtigt at kommunikere løbende med elevens faglærer(e) og evt. studievejleder. Det kan være nødvendigt at spørge ind til kollegaens undervisning, og her er respekt kodeordet, da det kan føles grænseoverskridende for nogle. Det er vigtigt at huske på, at ingen har de vises sten mht. undervisning.

Afhængig af det antal timer, der stilles til rådighed, kan der, når man har diagnosticeret eleverne på baggrund af en detektionstest og et interview, laves individuel, par- eller gruppeintervention i større eller mindre omfang. Ved interviewet er det en god idé også at spørge til elevernes beliefs, da de er af stor betydning. I gruppen har vi ved sidste delprojekt også haft god erfaring med at inddrage diagnosticeringsopgaver. Dette arbejde kræver, at der udvikles detektionstest, diagnosticeringsopgaver og materiale til intervention. Her kan man selvfølgelig tilpasse materialet fra uddannelsen, egne og andre studerendes delprojekter.

I delprojekterne arbejdede vi med bestemte emner, og da vi fx skulle vælge elever til delprojekt 2 med emnet "Ræsonnement og bevisførelse", valgte vi bevidst ikke at arbejde med meget svage elever. Vi traf dette valg, da deres vanskeligheder med den matematiske værktøjskasse ellers ville stå i vejen for fremskridt inden for bevisførelse. Det betyder selvfølgelig ikke, at vi ikke til matematikvejledningen fremover kan arbejde med meget svage elever, bare vi tilpasser interventionsprogrammet deres niveau.

Det er også relevant at samarbejde med læsevejlederne. Læsevanskeligheder vil ofte også medføre visse former for matematikvanskeligheder. Læsevejlederne vil kunne rådgive matematikvejlederen omkring læsestrategier, og hjælpen kan evt. også gå den anden vej.

---

[6] Og lignende.

Slutteligt er det vigtigt at have tid til at deltage i netværk med andre matematikvejledere, fx på seminar på Søminestationen, og i anden efteruddannelse. Der er stadig meget at lære.

På Sønderborg Statsskole[7] har matematikfaggruppen valgt ikke at lave en indledende screening i matematik i 1g/1hf i år. På Sønderborg Statsskole er det vurderet, at det kan virke demotiverende på eleverne, og yderligere er der en obligatorisk screening i grundforløbet efter halvanden måned. Uden en indledende screening kommer matematiklærerne i grundforløbet til at spille en vigtig rolle i at få øje på elever, der kunne have matematikvanskeligheder, lige såvel som studievejlederne, der kan høre om vanskelighederne ved introsamtaler med eleverne. Elever, der klarer sig dårligt i den obligatoriske screening i grundforløbet, kan også vurderes af faglæreren og sendes videre. Nogle elever henvender sig også selv, efter at matematikvejlederfunktionen er blevet mere synlig på skolens hjemmeside. Skolens ledelse ønsker, at matematikvejlederfunktionen beskrives på skolens nye intranet, så alle skolens lærere kan få mere uddybende information i forhold til den mere elevrettede information, der ligger på hjemmesiden, og det er positivt. Ledelsen ønsker ligeledes, at jeg deltager i et 2-dages kursus i starten af påskeferien for elever, der har klaret sig dårligt til terminsprøven.

Jeg samarbejder allerede med læsevejlederne på min skole, også fordi læse- og matematikvejlederne sammen med en af studievejlederne arrangerer et kursus for sårbare elever, som det vil føre for vidt at komme ind på her.

Konkret har jeg sidste skoleår afholdt individuel vejledning og gruppevejledning i grundlæggende regnefærdigheder, ligningsløsning og brøkregning. I år er jeg kun lige nået til ligningsløsning, da jeg på grund af uddannelsen har holdt en skrivepause efter grundlæggende regnefærdigheder. I forløbet om ligningsløsning har jeg kunnet bruge en revideret udgave af materialet fra mit første delprojekt. Jeg har haft 6-8 elever til gruppevejledning ad gangen. Jeg var i tvivl om, hvor vidt det var for mange, men det er gået ganske glimrende. På den måde kan man spare ressourcer til elever, der har brug for individuel vejledning, og både hjælpe bredt og dybt.

Undervisning med matematikvejledererfaring

Med stigende pensum på de gymnasiale uddannelser (i forhold til folkeskolen) har mange elever svært ved at følge matematikundervisningen, og der er en fare for at nogle elever tilegner sig en instrumentel forståelse i stedet for en relationel forståelse. F.eks. ved de fleste elever, at de kan finde et lokalt maksimum ved at løse ligningen f'(x)=0. Men nogle elever forstår ikke, hvorfor man vælger denne fremgangsmåde. Den instrumentelle forståelse kan blive forstærket af brug af CAS og kan resultere i en "CAS-instrumentel forståelse" (Jankvist & Misfeldt, 2015), hvilket betyder, at eleverne kun relaterer beregning af ekstremumspunkter til CAS-sproget. Se nedenstående eksempel:

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{solve,\,x} -\frac{1}{3}$$

For at forstå baggrunden for udregningen skal man vide, at f'(x) svarer til en funktion, der beskriver hældningen. Man skal have et mentalt billede af tangenter i lokale maksima/ minima for at forstå, at tangenthældningen skal være 0. Eleverne kan klare sig med en instrumentel forståelse, så længe de får udleveret opgaver, som tester netop det, som lige er blevet gennemgået ved tavlen. Men når opgaven er stillet på et andet tidspunkt og/ eller en alternativ måde, kan en instrumentel forståelse være utilstrækkelig til at kunne løse opgaven.

[7] Her arbejder Tina J. Smedegaard.

For at eleverne kan opnå en relationel forståelse, er det vigtigt, at opgaverne passer til deres forståelsesniveau. Hvis eleverne ikke har et mentalt billede af ekstremumspunkter og tangenthældninger i hovedet, kan man som underviser sørge for at eleverne "folder tilbage" til billedeforståelsesniveauet. Dette kunne f.eks. gøres ved at stilladsere opgaverne således, at hvis man ikke kan løse opgaverne, skal man starte med f.eks. at afbilde funktionen og indtegne ekstremumspunkter og tangenthældninger. De fleste elever stræber efter den hurtigste løsningsvej og ser ikke meningen i at tegne skitser, og de fleste CAS-programmer har ikke en skitsefunktion. Dette gør det ikke nemmere for eleverne og kræver alternative programmer eller brug af blyant og papir. Vores erfaring fra eksempelvis del 3 projektet viser, at fremstilling af skitser har været en stor succes ved Emma, og vi er overbeviste om, at det generelt er en god strategi at lære eleverne.

"Folding back" (Pirie og Kieren, 2004) er et godt eksempel på, at alle kan lære matematik, så længe man befinder sig på det rigtige forståelsesniveau. Det kan virke meget uretfærdigt for eleverne, at nogle kan se løsningen med det samme. Her er det vigtigt at italesætte beliefs og gøre eleverne opmærksomme på, at disse elever har trænet så mange opgaver at de ikke har brug for "folding back" fordi de har tilegnet sig evnen til at se mentale billeder. Mht. elevernes beliefs er det også vigtigt at have fokus på, hvad vi forventer af eleverne, de skal huske, og hvad man ikke behøver at huske, da mange elever har den matematikforestilling, at matematik handler mest om at huske. Mange elever tror desuden, at der kun findes en rigtig løsningsvej. Derfor er det en god ide at have fokus på forskellige løsningsveje. Hvis man lader eleverne præsentere forskellige løsningsveje, bliver de (udover at der findes forskellige løsningsveje) opmærksomme på, at en løsningsvej kan være mere elegant eller sofistikeret end andre (Cobb & Yackel, 1996).

I forbindelse med vores uddannelse som matematikvejledere er vi blevet mere beviste om, at mange elever har en manglende begrebsforståelse for f.eks. ligninger eller funktioner. Anna Sfard (1991) skelner mellem to måder at betragte matematiske begreber på, nemlig en operationel og en strukturel. Ved den operationelle ses de matematiske begreber som processer, mens begreberne i de strukturelle ses som reelle abstrakte objekter. For at opnå en forståelse af nye begreber i matematik, skal indlæringen foregå i et samspil mellem de to former, idet de forudsætter hinanden. Eksempelvis kræver en forståelse af begrebet ligning både en operationel tilgang, så man kan løse ligninger og en strukturel, hvor man fx er i stand til at se en ligning som et udtryk for en graf. Ifølge Sfard sker indlæring af begreber i en cyklisk proces bestående af tre faser: internalisering, fortætning og tingsliggørelse, hvor de to første tilhører den operationelle, mens den sidste tilhører den strukturelle opfattelse. Når et begreb er tingsliggjort, kan det bruges i nye processer til dannelse af nye begreber. Det er værd at have i tankerne i sin undervisningsplanlægning, at eleverne skal opnå både en operationel og strukturel opfattelse af fx begrebet ligning. Desuden skal man være opmærksom på, at elevernes vanskeligheder med fx begrebet ligning kan skyldes, at de ikke har tingsliggjort begreber, som indgår i ligninger såsom negative tal eller brøker.

Tall & Vinner (1981) introducerer begreberne begrebsbillede og begrebsdefinition. En elevs begrebsbillede er alt, hvad eleven associerer med det pågældende begreb, mens alle formulerede definitioner for et begreb kaldes en begrebsdefinition. Den formelle definition af et matematisk begreb er en begrebsdefinition, men det er elevers selvkonstruerede definitioner også. En elevs begrebsbillede kan altså sagtens indeholde en begrebsdefinition, som er forskellig fra den formelle definition og dermed forkert. Derfor er det en god idé at spørge ind til elevernes begrebsdefinition, for på den måde at få indblik i den og få en fornemmelse for deres begrebsbillede, for så har man mulighed for at udfordre deres begrebsbilleder. Eksempelvis kan man ved ligninger måske udfordre elevernes begrebsbillede ved at se på ligninger uden løsninger eller ligninger med uendeligt mange løsninger. Hvis man kan komme afsted med at aktivere modstridende dele af elevens begrebsbillede kan der opstå en kognitiv konflikt, som kan medføre en ændring af begrebsbilledet.

Mange gymnasieelever har matematikvanskeligheder, og derfor kan ofte kun få elever følge tavlegennemgange af beviser. En negativ indstilling overfor bevisførelse bliver oftest forstærket ved at de fleste elever ikke kan se behovet for beviser. I stedet for at vise beviser på tavlen, kan man stille eleverne i en didaktisk situation, hvor eleverne selv opdager et behov for et matematisk bevis, f.eks. som vores opponentgruppe på andet semester gjorde med opgaven ”Rundt om jorden”[8]. Den vækker elevers nysgerrighed og vækker deres interesse for at udføre beviser. Herved skifter beviset rolle fra verificerende til forklarende.

Generelt er det en god ide at designe undervisningsforløb, hvor der kan opstå ”didaktiske situationer”, hvor eleverne kan udøve matematik, som medfører en spontan tilegnelse af viden (Brousseau, 1997). Matematik skal indlæres igennem udøvelse af matematik, viden kan ikke overføres eller formuleret på en anden måde så er formidling ikke det samme som forståelse. Mange gymnasielærere er tilbøjelige til at lade en ”didaktisk kontrakt” opstå i klassen, som ifølge Blomhøj (1995) bl.a. indebærer, at læreren gennemgår begreber og metoder ud fra en udvalgt lærebog og at læreren kun stiller opgaver som eleverne har forudsætninger for at løse. Når en sådan didaktisk kontrakt dominerer, kan man komme i den situation, at den umuliggør læring, selvom det modsatte var hensigten. Det er vigtigt at man i undervisningen har tid til at skabe adidaktiske situationer, i hvilke eleverne skal tænke (mere) selvstændigt ved at læreren reelt overlader dele af den faglige aktivitet til eleverne. Brousseau (1997) har vist, at man kan skabe adidaktiske situationer vha. modelleringsopgaver. Det ville derfor være oplagt at inddrage flere modelleringsopgaver i undervisningen fremover. Lesh og Doerr (2003) har vist at modelfremkaldende aktiviteter medfører ”dramatiske” læringsfremskridt. Erfaringer fra dette studie igennem 25 år har vist, at svage elever vha. modelleringsopgaver bliver i stand til at opfinde matematiske ”konstrukter” som f.eks. begrebsudviklingen af proportionalitetsforhold.

Litteraturliste

- Blomhøj, M. (1995). Den didaktiske kontrakt I matematikundervisningen*. Nämnaren , 4.årgang, nr.3, 16-25.*Forkortes Blomhøj 1995

- Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, **22**, 123-139. Forkortes Blomhøj & Jensen 2003

- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Chapter 5 on Didactical Contract, pp. 246-270. (Edited and translated by Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, and Virgina Warfield.) Forkortes Brousseau 1997.

- Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, **27**(4): 458-477. Forkortes Cobb & Yackel 1996

- De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, **24**, 17-24. Forkortes De Villiers 1999

[8] *Forestil dig at du lægger en snor stramt hele vejen rundt om Jorden, så snoren vil være lige så lang som Jordens omkreds. Herefter forlænges snoren med 1 meter. Nu kan snoren løftes et stykke ud fra Jorden. Forestil dig at man løfter lige meget i snoren (se illustration herunder). Hvor meget kan snoren så løftes?*

- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, **38**(1-3), 85–109. Forkortes Dreyfus 1999

- Dreyfus, T. & Hadas, N. (1996). Proof as answer to the question why. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), **28**, 1-5. Forkortes Dreyfus & Hadas 1996

- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **61**, 103-131. Forkortes Duval 2006

- EMS-Committee of Education (2013) (Törner, G). Solid Findings in Mathematics Education: Living with beliefs and Orientations - Underestimated, nevertheless Omnipresent, Factors for Mathematics Teaching and Learning. *EMS-Newsletter March 2013, 42-44.* Forkortes EMS 2013.

- Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, **38**, 86-95. Forkortes Ferri 2006

- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education – China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (Chapter 1). Forkortes Freudenthal 1991

- Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In: F. K. Lester Jr. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: Information Age Publishing. Forkortes Harel &Sowder 2007

- Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, **31**(4), 396-428. Forkortes Healy & Hoyles 2000

- Jankvist, U.T (2015). Changing students´images of "mathematics as a discipline". *Journal of mathematical behavior **38** (2015) 41-56.* Forkortes Jankvist 2015

- Jankvist, U. T. & Misfedt, M. (2015). CAS-induced difficulties in learning mathematics? *For the Learning of Mathematics*, **35**(1), 15-20. Forkortes Jankvist & Misfeldt 2015.

- Kilpatrick, J. (1995). Staking claims. *Nordic Studies in mathematics Education,* **3** (4), 21-42. Forkortes Kilpatrick 1995

- Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.) *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Forkortes Lesh & Doerr 2003

- Mitchelmore, M. & White, P. (2004). Teaching mathematical concepts: Instruction for abstraction. In Niss (Ed.): *Proceedings of Regular Lectures at ICME-10*, Copenhagen. Forkortes Mitchelmore & White, 2004)

- Niss, M. & Jensen, T. H. (Eds.). (2002). *Kompetencer og matematiklæring – Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18. Forkortes Niss & Jensen 2002

- Op't Eynde, P., de Corte, E. & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs In: G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (eds.): *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 13-37). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Forkortes Op 'T Eynde et al. 2002

- Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, **26**, 165-190. Forkortes Pirie & Kieren 1994

- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. *Educational Studies in Mathematics,* **22**, 1–36. Forkortes Sfard (1991).

- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching,* **77**, 20–26. Forkortes Skemp (1976).

- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* **12**, 151–169. Forkortes Tall & Vinner (1981).

Bilag

Følgende er en liste over bilag, der er uploadet separat fra rapporten.

Bilag A: Indeholder projektrapporten fra semester 1 af Michael Madsen og Karen Reuter Andersen

Bilag B: Indeholder projektrapporten fra semester 2 af Tina Johannesen Smedegaard, Niels Bendtsen Halck og Karen Reuter Andersen

Bilag C: Indeholder projektrapporten fra semester 3 af Tina Johannesen Smedegaard, Niels Bendtsen Halck og Karen Reuter Andersen

Bilag D: Indeholder en opsummering af delrapporten fra semester 1 af Tina Johannesen Smedegaard

Bilag E: Indeholder en opsummering af delrapporten fra semester 2 af Niels Bendtsen Halck