Anvendelse og modellering i matematik – et teoretisk blik

Jensen, Kasper Bjering Søby

Published in:
LMFK-Bladet

Publication date:
2012

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Citation for published version (APA):
Jensen, K. B. S. (2012). Anvendelse og modellering i matematik – et teoretisk blik. *LMFK-Bladet*, *2012*(2), 27-30. http://lmfk.dk/artikler/data/artikler/1202/1202_27.pdf

Anvendelse og modellering i matematik – et teoretisk blik

Kasper Bjering Søby Jensen, ph.d-studerende i matematikkens didaktik ved Roskilde Universitet

Der er ført mange diskussioner gennem tiden om matematikkens særlige karakteristika som fag. Der synes dog at være en ting, der er ganske uomtvisteligt: Matematik har som minimum en dual natur. På den ene side er matematik en teoribygning i egen ret (den *rene* side), på den anden side er matematik et værktøj for en lang række formål inden for andre aspekter af menneskets tilværelse (den *anvendte* side).

Blandt professionelle støder de to sider sjældent sammen. Dels findes der *matematikere* der alene beskæftiger sig med den *rene* matematik. Dels findes der folk med rødder i andre fag, der bruger matematik. Og så findes der matematikere som med varierende overlap mellem de to sider, arbejder med anvendt matematik.

Men ét sted kan der opstå konflikt: Når der skal undervises i matematik. Specielt i gymnasieskolen, hvor der skal gives en *almen* matematikundervisning, og hvor lærerkorpset er en smeltedigel af repræsentanter fra alle tænkelige positioner. Historisk har den rene side været altdominerende, men i en glidende udvikling over mere end 50 år, har anvendelsestænkningen vundet frem.

Det giver derfor mening at forsøge at se "anvendelse af matematik" lidt i helikopter–perspektiv. Især med fokus rettet mod *det anvendtes* ønskelige og mulige roller i matematikundervisning. Jeg ser i hovedsagen fire forskellige dagsordener for inddragelse af anvendelser:

- **Illustration.** Reference til ikke–matematiske objekter kan gøre matematisk teori mere begribelig. Eksempelvis krukker med røde og sorte kugler ved undervisning i sandsynlighedsregning.
- **Motivation.** Reference til mere eller mindre autentiske eksempler på anvendelse af matematik, kan være med til at øge elevens ønske om at lære sig den matematiske teori.
- **Servicefag.** Der opstår, eksempelvis i andre fag, jævnligt behov af matematisk art. Disse behov imødekommes bedst gennem særskilt skoling i nødvendige matematiske teknikker.
- **Værktøjskasse.** Matematik skal i sig selv være et værktøj til at behandle ikke–matematiske problemer fra "den virkelige verden".

Anvendelse og modellering

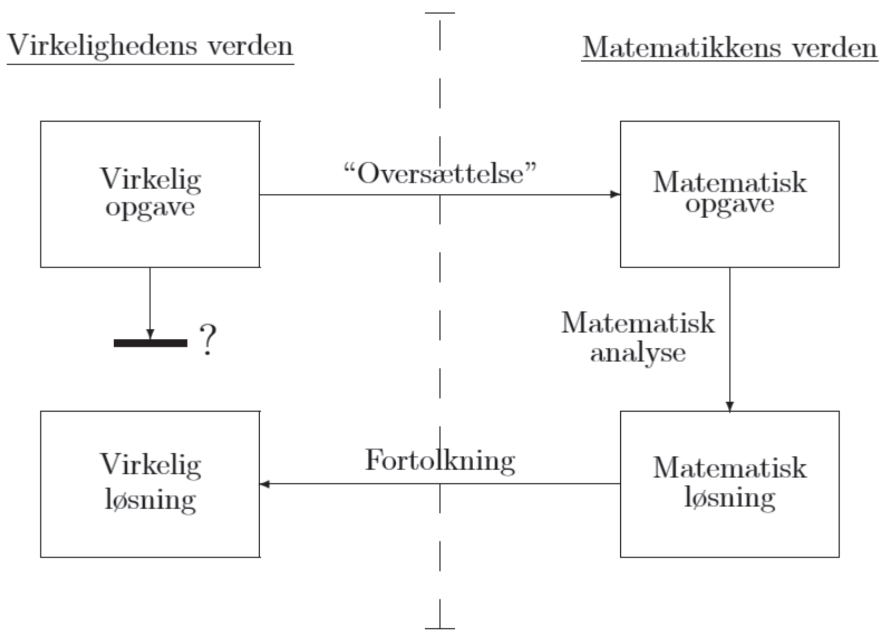
Der findes ingen universel definition af *anvendelse* eller *anvendt matematik*. Når jeg bruger begrebet, omhandler det en matematisk aktivitet, hvori der indgår referencer til ikke–matematiske objekter (ofte kaldet *konteksten*). Begrebet bruges dog på en række andre måder også.

Anvendelse af matematik hænger oftest tæt sammen med begreberne *matematisk model* og *matematisk modellering*. En matematisk model kan opfattes som bestående af tre elementer. Et realt domæne R, et matematisk domæne M og en forbindelse f mellem objekter og relationer i de to domæner. En matematisk model er således en triple af formen (R, M, f).

Man støder dog også på den løsere definition, at elementet M i sig selv er en matematisk model, såfremt der kan tænkes etableret en eller flere tripler, hvori M indgår. Eksempelvis kan man finde formlen "$y = b \cdot a^x$" omtalt som en "eksponentiel model", selvom der i situationen ikke refereres til nogen kontekst.

For mig er det afgørende, at man bruger den første definition. En model er så at sige altid "en model af noget". Det kan have omfattende didaktiske konsekvenser, om man bruger den ene eller den anden definition. Bruges den anden, lægger det fx ikke nødvendigvis op til, at der faktisk skal arbejdes med matematik i kontekst, men kan alene handle om at studere egenskaber ved traditionelle matematiske strukturer, blot under navnet "en model".

Ved *matematisk modellering* forstås den aktive proces, hvori en matematisk model skabes, bruges og evalueres. Modellering er typisk relevant, når man står med et "virkeligt problem", som ikke umiddelbart lader sig give en "virkelig løsning". Det at flytte problemet ind i matematikkens verden, kan i den henseende være en nødvendig "omvej" til den "virkelige løsning" (se figur 1).



Figur 1
Simpel model af matematisk modellering
(Fra Jensen (2007), s. 110)

Modelleringscirklen

Modellering er imidlertid en mere kompleks proces, end beskrevet på figur 1. Grundlæggende starter matematisk modellering i en *oplevet virkelighed*. En model er i mere bred betydning en karikatur af virkeligheden, hvor særligt væsentlige træk hives frem. For et *model*–tog er det eksempelvis formen der er væsentlig, mens størrelse og faktisk anvendelse negligeres. For et landkort er det væsentlige forholdene mellem de vandrette afstande, mens højder negligeres, osv.

Den oplevede virkelighed er et uendeligt kompleks af store og små karakteristika. Enhver intellektuel bearbejdning af den forudsætter derfor en eller anden form for ”model”, hvor de for situationen væsentligste træk hives frem og resten negligeres. I bestemte situationer kræves der så en matematisering af en model til en *matematisk model*, for at opnå bestemte muligheder.

Matematisk modellering er altså i sin fulde udfoldelse en proces, der starter i en oplevet virkelighed, løber over en model til en matematisk model, hvorfra et matematisk resultat opnås, der må føres tilbage til virkeligheden for at blive afprøvet. Ofte beskrives dette med *modelleringscirklen*, der består af en række faser bundet sammen af bestemte processer (se figur 2).

De i alt seks faser kan kort forklares på følgende vis:

a) *Motivering.* Fra den hyperkomplekse ”oplevede virkelighed” (det vil sige den samlede sum af vores oplevelser) vælges et mere konkret udsnit ud (et *undersøgelsesområde*), som har ens interesse. Dette er den fase hvor man ”finder på, hvad man vil beskæftige sig med”.

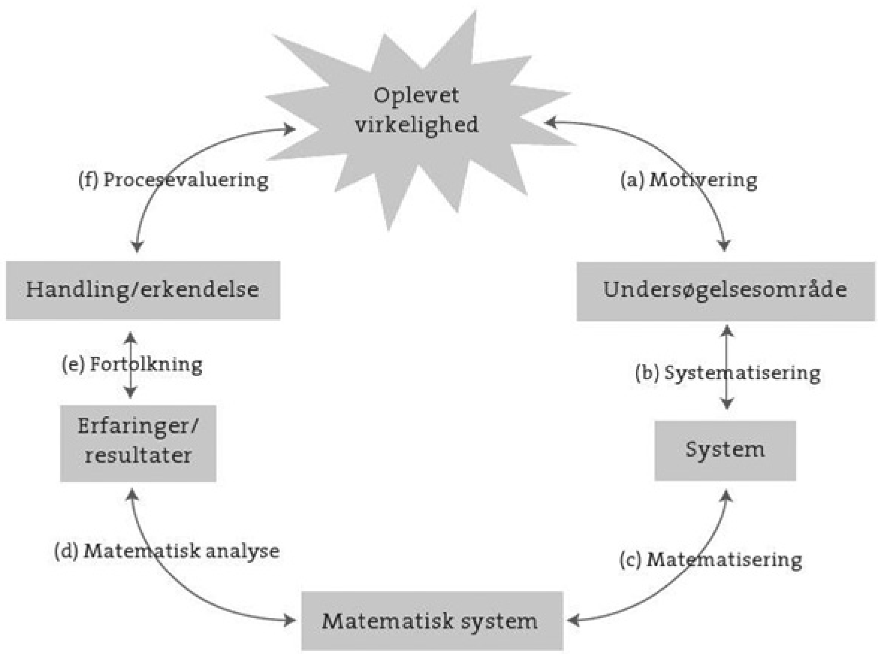
b) *Systematisering*. Fra det afgrænsede undersøgelsesområde udvælges nu de særlige karakteristiske træk, som skal indgå i det *system* (eller *model*), der gøres til genstand for faktisk undersøgelse. Kriterierne for, hvordan man udvælger disse træk, er flydende, men i almindelighed kan mennesket kun behandle et ret begrænset kompleks af informationer.

c) *Matematisering*. De objekter, relationer og informationer, der indgår i det opstillede system, må nu føres over i matematikkens verden. De må repræsenteres med velvalgte matematiske strukturer. Dermed oversættes systemet til et *matematisk system* (dvs. en *matematisk model*).

d) *Matematisk analyse*. I det matematiske system kommer den klassiske matematiker på arbejde. Nu skal den matematiske teori bruges til at give matematiske svar på matematiske spørgsmål. De matematiske spørgsmål vil ofte opstå ved at ikke–matematiske spørgsmål matematiseres.

e) *Fortolkning*. De opnåede matematiske svar må derpå oversættes tilbage i den virkelige verden. Der kan de føre til erkendelser, handlinger, mv.

f) *Procesevaluering*. Da matematiske modeller ikke leverer eksakt korrekte løsninger – ofte faktisk det modsatte – så må enhver opnået erkendelse eller handling afprøves i den faktiske virkelighed. Oftest vil dette føre til, at hele eller dele af modelleringen må gennemløbes igen, hvor tidligere arbejde revideres, så der opnås bedre erkendelser eller handlinger.



Modelleringscirklen er i sig selv en model af en proces. Processen vil i praksis stort set aldrig forløbe som en kontinuert cirkelbevægelse. I stedet vil man hoppe frem og tilbage mellem stadier og processer, sådan som konkrete behov måtte nødvendiggøre det.

Modelleringscirklen fanger dog de væsentligste træk af processen og skaber klarhed om disse. Dette er særligt vigtigt for undervisning og især planlægning af undervisning. Om modelleringscirklen har faktisk anvendelighed for professionelle matematiske modelbyggere er mere tvivlsomt.

For planlæggere af undervisning kan modelleringscirklen bruges til at sikre, at man kommer rundt om alle aspekter af modellering og til at hive bestemte af processerne ud for at have et særligt fokus på dette. Jeg vil i det følgende forsøge at give to eksempler på brug af begrebsapparatet. Dels et eksempel på analyse og forandring af en opgave, dels på at konstruere og besvare en opgave.

Eksempel 1: Analyse og forandring af en ”anvendt opgave”

Et eksempel på en opgave, der er anvendt i den forstand, jeg har beskrevet, er eksamensopgave nr. 12 fra skriftlig A–niveau–eksamen den 18. maj 2011, som omhandler en funktion, der beskriver dagslængder i Anchorage Alaska i 2011 som funktion af ”antal dage efter 1. januar” (se figur 3).

Figur 2
Modelleringscirklen er en mere kompleks model af matematisk modellering (Fra Blomhøj 2006)

I en model kan længden af dagen i Anchorage Alaska som funktion af tiden beskrives ved

$$f(t) = 6{,}61 \cdot \sin(0{,}0167t - 1{,}303) + 12{,}2\,, \qquad 0 \leq t \leq 365$$

hvor $f(t)$ er længden af dagen (målt i timer) til tidspunktet t (målt i døgn efter 1. januar 2011).

a) Benyt modellen til at bestemme længden af dagen i Anchorage Alaska til tidspunktet $t = 100$.

b) Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor længden af dagen i Anchorage Alaska er størst.

c) Bestem $f'(100)$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller.

Kilde: http://aa.usno.navy.mil

Figur 3
Opgave 12 fra skriftlig eksamen på A–niveau 18/5–2011

I opgaven stilles tre spørgsmål til den givne funktion. De første to er typiske matematiske spørgsmål ("bestem $f(100)$" og "find maksimumspunktet for $f(t)$"), dog indpakket i retorikken omkring dagslængde. På modelleringscirklen arbejdes altså indenfor processen "matematisk analyse".

De stillede spørgsmål er i princippet formuleret i konteksten og skal matematiseres. Men reelt inddrager dette ikke refleksioner over konteksten og er dermed ikke egentlig matematisering. Ej heller behøves der laves nogen egentlig fortolkning, før svaret kan afleveres.

Første del af tredje spørgsmål er slet ikke pakket ind ("bestem $f'(100)$"). Den anden del – "redegør for betydningen af tallet $f'(100)$" – kan til gengæld opfattes som egentlig *fortolkning*, hvis der forventes et svar af typen »Tallet angiver stigningen i dagens længde den pågældende dag« (modsat svaret »tallet angiver hældningen for tangenten til $f(t)$ i punktet $t = 100$«).

At opgaven stort set ikke kommer omkring andre af modelleringscirklens processer end matematisk analyse, er ganske typisk for "anvendte opgaver" i A–niveau–eksamenssæt (se Jensen 2011). Ønsker man derfor at øge graden af anvendelse, kan det være nødvendigt at overveje, om disse opgaver kan omformuleres. Forslag til forandrede delspørgsmål kan være:

1. Hvor lang forventes dagen at være den 11. april 2011?
2. Beregn $f'(t)$ for 11. april og forklar, hvad tallet siger om dagslængden i Anchorage Alaska.
3. Hvilken dato er det midsommer?
4. Beregn $f(0)$ og $f(365)$. Kommentér svarene.

Her svarer spørgsmål 1, 2 og 3 i matematisk indhold til a, c og b fra den oprindelige opgave. Forskellen er, at man ikke kommer uden om at overveje, hvordan spørgsmålet kommer fra kontekst og ind i det matematiske system ("11. april 2011" må fx oversættes til $t = 100$"). Eleven udsættes altså for egentlig matematisering og fortolkning.

Spørgsmål 4 er et modelkritisk spørgsmål, som aktualiseres af, at perioden i funktionen på figur 3 ikke er 365 som forventet, men 376 (formentlig pga. en fejl). Det giver en forskel på ca. 0,2 timer mellem 1. januar 2011 og 1. januar 2012. En forskel der kan give anledning til diskussion og revision af modellen – det vil sige *procesevaluering*.

Der kan rettes megen kritik mod disse forandringer. Det er dog helt afgørende at understrege, at hvis man vil lave egentlig anvendelse, så kommer man ikke uden om at skulle have fingrene ned i konteksten. Og lige så vigtigt er det at understrege for eleven, at man vurderes på evnen til at bruge matematik som værktøj til at svare, ikke på om man teknisk set har svaret rigtigt.

Eksempel 2: Fuldbyrdet modellering

For en matematikundervisning, der ønsker at trække på anvendelse med en værktøjs–dagsorden, er der ingen vej udenom at arbejde med problemstillinger, der får eleverne ud i hele modelleringscirklen. Her blot et eksempel på en sådan bredere tænkning.

Det er en almindelig erfaring for mange mennesker, at man ikke får udbetalt hele sin løn. Der fradrages indkomstskat. Mindre direkte mærkes det, at man senere også udsættes for forbrugsskatter, bl.a. moms. Det er derfor oplagt at undersøge hvor meget den samlede beskatning er. En undersøgelse der kun kan udføres, hvis der foretages matematisk modellering.

En systematisering af problemstillingen kan være at opstille en række størrelser, som man ønsker indgår i undersøgelsen. Disse faktorer kunne være:

1. Bruttoløn (L)
2. Indtægt efter indkomstskat (I)
3. Realiseret forbrug (F)
4. Indkomstskattesats (i)
5. Momssats (m)
6. Faktisk beskatning (s)

For at komme videre må der etableres et matematisk system i form af en række meningsfulde relationer mellem disse objekter. Et forslag kunne være:

I. $s = 1 - F/L$	Det defineres, hvad vi vil forstå ved "faktisk beskatning".
II. $F = I \cdot (1 - m)$	Det antages, at alle udbetalte penge omsættes som forbrug.
III. $I = L \cdot (1 - i)$	Relationen mellem løn og indtægt fastlægges.

Vi kan nu gå over til den matematiske analyse. Fra II og III følger:

$$F = L \cdot (1 - i) \cdot (1 - m)$$

Og med I fås da:

$$s = 1 - \frac{L \cdot (1 - i) \cdot (1 - m)}{L}$$

$$= 1 - (1 - i) \cdot (1 - m) = i + m - i \cdot m$$

Den faktiske beskatningssats er altså givet som differensen af indkomstskattesatsen og momssatsens sum og produkt. For afprøvning af formlen må der estimeres værdier af i og m. Den almindelige opfattelse i Danmark er "$i = 0,5$" samt at momsen fra forbrugerens synspunkt er givet som "$m = 0,2$" (20 % af det man betaler for en vare går til moms). Det følger altså, at "$s = 0,6$".

I procesevalueringsfasen kan dette tal nu kritiseres, idet man fx kan tjekke de egentlige skattesatser, man kan pege på, at der også betales bruttoskat, at man har fradrag, og at der udover moms også pålægges en række *punktafgifter* på mange varer. I et videre arbejde kan man forsøge at modificere modellen, så der tages bedre højde for dette.

Man kan om eksemplet sige, at det blot er et regnestykke – ikke nogen modellering. Men så ignorerer man en række forhold i opstillingen af regnestykket. Først og fremmest de valg af afgrænsninger, der optræder (som kunne være anderledes) og de antagelser, der gøres (fx at al indtægt omsættes til momsbelagt forbrug). Dette er netop væsentlige træk ved en modellering.

Didaktisk pointe

Intentionen med denne artikel er ikke at agitere for en bestemt form for anvendelsesorienteret matematikbrug i undervisningen. Intentionen er at klargøre nogle begreber, som kan bruges til at artikulere forskellige synspunkter på anvendelse, og som kan sætte skub i udviklingen af et undervisningsindhold, der måtte matche opstillede målsætninger.

Hvis anvendelse og modellering faktisk er en intention, må man inddrage hele modelleringscirklen. Det er ikke nok at løse matematikopgaver pakket ind i kontekst. Jeg vil i kommende numre af LMFK-bladet forsøge at skrive indlæg hvor jeg udfører "fuldbyrdet modellering". Lad følgende motivering være indgangen til den første af disse (så er der lidt at tænke over og arbejde med):

»Jeg er et A–menneske. For et par år siden gik jeg en efterårsmorgen ved 6–tiden fra Trekroner station mod min arbejdsplads RUC. Mod øst stod Venus – morgenstjernen – smukt ved den gryende solopgang. Jeg spurgte mig selv: Venus befinder sig mellem Solen og Jorden og ses derfor altid tæt ved solopgang eller –nedgang. Hvor tidligt står Venus egentlig op? Det må kunne undersøges med matematisk modellering«.

Referencer

Blomhøj, Morten (2006): *Mod en didaktisk teori for matematisk modellering*, i *Kunne det tænkes? : - Om matematiklæring*, Malling Beck, 2006, s. 80–109.

Jensen, Thomas Højgaard (2007): *Udvikling af matematisk modelleringskompetence som matematikundervisningens omdrejningspunkt - hvorfor ikke?*, IMFUFA–tekst, vol. 458. Kan hentes gratis på: milne.ruc.dk/imfufatekster/pdf/458.pdf.

Jense, Kasper Bjering Søby (2011): *Status på anvendt matematik i det almene gymnasium*, Tidskriftet MONA, 2011(4).