

## Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"

Heefelt, Mogens Brun

*Publication date:*  
1993

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

*Citation for published version (APA):*  
Heefelt, M. B. (1993). *Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"*. Roskilde Universitet. Tekster fra IMFUFA Nr. 258 <http://milne.ruc.dk/lmfufaTekster/>

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain.
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact [rucforsk@kb.dk](mailto:rucforsk@kb.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

**TEKST NR 258**

**1993**

**Supplerende kursusmateriale  
til "Lineære strukturer  
fra algebra og analyse"**

**af: Mogens Brun Heefelt**

**TEKSTER fra**

**IMFUFA**

**ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**  
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES  
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"

af: Mogens Brun Heefelt

IMFUFA tekst nr. 258/93

30 sider

ISSN 0106-6242

---

Abstract.

Denne tekst indeholder to mindre tekster samt supplerende opgaver, der skal anvendes på kurset "Lineære strukturer fra algebra og analyse", på matematikuddannelsen på RUC.

Materialet er tænkt benyttet sammen med bog af D.H.Griffel: Linear Algebra and its Applications. Vol I + II, Ellis Horwood, 1990.

## **Indhold**

1. Nulrum for lineære differentialoperatorer (9 sider)
2. Diagonalisering af matricer og JORDAN's normalform (7 sider)
3. Supplerende opgaver (12 sider)

# Nulrum for lineære differentialoperatorer

I denne tekst skal vi arbejde på at bestemme basis for enten nulrum eller egenrum af en lineær differentialoperator af  $n$ -te orden  $f_x$

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0D^0$$

hvor alle  $a_i$  er reelle konstanter (i princippet kunne de også være reelle funktioner).

I hele denne tekst arbejder vi med, at operatorerne virker på  $C^\infty$ , rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner.

## Operatorer af første orden

På dette rum betragtes først den lineære differentialoperator

$$L_1 = D - aD^0 ; \quad a \in \mathbb{R}$$

Da svarer en bestemmelse af nulrummet for  $L_1 - N(L_1)$  til at løse den lineære, homogene differentiaalligning af første orden

$$(D - aD^0)f(t) = 0 \quad \text{eller} \quad f'(t) = af(t).$$

Denne differentiaalligning har som bekendt den fuldstændige løsning

$$f(t) = ce^{at} ; \quad c \in \mathbb{R}$$

dvs  $N(L_1) = \text{Sp}\{e^{at}\}$ , og derfor er  $\dim N(L_1) = 1$ .

## Operatorer af anden orden

Har man tilsvarende den lineære differentialoperatoren af anden orden

givet ved  $L_2: C^\infty \rightarrow C^\infty$

$$L_2 = D^2 + aD + bD^0 ; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

kan man foretage følgende omskrivning:

$$\begin{aligned} (D - pD^0) \circ (D - qD^0) f &= (D - pD^0) (f' - qf) = \\ (f' - qf)' - p(f' - qf) &= f'' - qf' - pf' + pqf = \\ f'' - (p + q)f' + pqf &= (D^2 - (p + q)D + pqD^0) f \end{aligned}$$

hvor  $p$  og  $q$  er reelle (eller komplekse) tal. Da kan vi se, at man kan skrive

$$D^2 + aD + bD^0 = (D - pD^0) \circ (D - qD^0)$$

hvis og kun hvis

$$p + q = -a \quad \text{og} \quad pq = b,$$

hvilket netop svarer til, at  $p$  og  $q$  skal være rødder i andengradsligningen

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Derfor kan man finde nulrummet for  $L_2$  ved at løse differentiaalligningen

$$(D - pD^0) \circ (D - qD^0)f = 0$$

Sættes nu  $g = (D - qD^0)f$ , svarer det til at løse de to sammenhørende differentiaalligninger

$$(D - pD^0)g(t) = 0 \quad \text{og} \quad (D - qD^0)f(t) = g(t)$$

eller

$$g'(t) = pg(t) \quad \text{og} \quad f'(t) = qf(t) + g(t)$$

Den første ligning har som før den fuldstændige løsning

$$g(t) = ce^{pt}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Da bliver den fuldstændige løsning for den anden ligning fastlagt af

$$\begin{aligned} f(t) &= c_2 e^{qt} + e^{qt} \int ce^{pt} e^{-qt} dt \\ &= c_2 e^{qt} + ce^{qt} \int e^{(p-q)t} dt \end{aligned}$$

Hvis  $p \neq q$  bliver

$$f(t) = c_2 e^{qt} + \frac{c}{p-q} e^{qt} e^{(p-q)t}$$

eller

$$f(t) = c_1 e^{pt} + c_2 e^{qt}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

og derfor bliver  $N(L_2) = \text{Sp}\{e^{pt}, e^{qt}\}$ , og dermed bliver

$$\dim N(L_2) = 2.$$

Hvis derimod  $p = q$  finder man, at den fuldstændige løsning er

$$f(t) = c_1 t e^{pt} + c_2 e^{pt}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

og derfor bliver  $N(L_2) = \text{Sp}\{e^{pt}, t e^{pt}\}$ , og dermed bliver igen

$$\dim N(L_2) = 2.$$

**Bemærk**, at rødderne i andengradsligningen  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  kan være komplekse (og da komplekst konjugerede, fx  $\alpha + i\beta$  og  $\alpha - i\beta$ ). Denne situation er omfattet af tilfældet  $p \neq q$ , men ved at benytte

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

kan man vise, at den fuldstændige løsning kan omskrives til

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= c_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + c_2 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \\ &= e^{\alpha t}[(c_1+c_2)\cos\beta t + i(c_1-c_2)\sin\beta t] \\ &= k_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + k_2 e^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}$$

netop når

$$c_1 = (k_1 - ik_2)/2 \quad \text{og} \quad c_2 = (k_1 + ik_2)/2$$

med  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ .

Så også i dette tilfælde er  $\dim N(L_2) = 2$ , idet nulrummet er fastlagt ved  $N(L_2) = \text{Sp}\{e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t\}$ .

Eksempel 1: Er operatoren  $L = D^2 + 4D + 3D^0$ , skal man løse andengradsligningen  $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ , der har rødderne  $-1$  og  $-3$ , og derfor er  $N(L) = \text{Sp}\{e^{-t}, e^{-3t}\}$ .

Eksempel 2: Er operatoren  $L = D^2 + 4D + 4D^0$ , skal man løse andengradsligningen  $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ , der har  $-2$  som dobbeltrod, og derfor er  $N(L) = \text{Sp}\{e^{-2t}, te^{-2t}\}$ .

Eksempel 3: Er operatoren  $L = D^2 + 4D + 5D^0$ , skal man løse andengradsligningen  $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ , der har de komplekst konjugerede rødder  $-2 + i$  og  $-2 - i$ , og derfor får man, at

$$N(L) = \text{Sp}\{e^{-2t}\cos t, e^{-2t}\sin t\}.$$

### Operatorer af tredje orden

Vi betragter videre differentialoperatoren  $L_3: C^\infty \rightarrow C^\infty$  givet ved

$$L_3 = D^3 + aD^2 + bD + cD^0; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Da kan man som for en anden ordens operator finde reelle (eller komplekse) tal  $p_1, p_2$  og  $p_3$ , således at

$$(D - p_3D^0) \circ (D - p_2D^0) \circ (D - p_1D^0) = D^3 + aD^2 + bD + cD^0$$

netop når  $p_1$ ,  $p_2$  og  $p_3$  er rødder i trediegradsligningen

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Når man skal finde nulrummet for  $L_3 - N(L_3)$ , svarer det til at løse differentialligningen

$$(D^3 + aD^2 + bD + cD^0)f(t) = 0.$$

Den kan så omskrives til

$$(D - p_3D^0) \circ (D - p_2D^0) \circ (D - p_1D^0)f(t) = 0,$$

Den løses ved at løse de tre sammenhørende differentialligninger

$$(D - p_3D^0)f_3(t) = 0, \quad (D - p_2D^0)f_2(t) = f_3(t)$$

$$\text{og } (D - p_1D^0)f_1(t) = f_2(t)$$

hvor de to første løses som vist i forrige afsnit. I fortsættelse af det foregående kan man således se, at der netop vil være tre lineært uafhængige funktioner, der udspænder nulrummet  $N(L_3)$ .

Eksempel 4: I det specialtilfælde, hvor  $p_3$ ,  $p_2$  og  $p_1$  har den fælles værdi  $p$ , kan vi af forrige afsnit se, at

$$f_2(t) = c_1te^{pt} + c_2e^{pt}$$

Indsættes denne funktion i den sidste ligning ovenfor, bliver

$$f_1(t) = c_1t^2e^{pt}/2 + c_2te^{pt} + c_3e^{pt},$$

og derfor er  $N(L_3) = \text{Sp}\{e^{pt}, te^{pt}, t^2e^{pt}\}$ .

### Operatorer af n-te orden

Generelt kan differentialoperatoren  $L_n: C^\infty \rightarrow C^\infty$  givet ved

$$L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0D^0$$

sammensættes af de første ordens differentialoperatorer

$$(D - p_nD^0) \circ (D - p_{n-1}D^0) \circ \dots \circ (D - p_1D^0)$$

netop når alle  $p_i$ -erne er rødder i n-te gradsligningen

$$(*) \quad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

og en n-te gradsligning har altid n (muligvis komplekse - og da komplekst konjugerede) rødder - regnet med multiplicitet.

Vi har nu i analogi med  $L_1$ ,  $L_2$  og  $L_3$ , at  $N(L_n)$  er rummet af samtlige løsninger til differentialligningen

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0D^0)f(t) = 0.$$



Der vil være netop  $n$  lineært uafhængige løsninger, der opfylder:

- a) Er  $p$  en enkelt reel rod i ligningen (\*) vil

$$e^{pt} \in N(L_n)$$

- b) Er  $p$  en reel rod med multiplicitet  $k$  i ligningen (\*) vil

$$\{e^{pt}, te^{pt}, \dots, t^{k-1}e^{pt}\} \subseteq N(L_n)$$

- c) Er  $\alpha + i\beta$  og  $\alpha - i\beta$  enkle, komplekst konjugerede rødder i ligningen (\*), vil

$$\{e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t\} \subseteq N(L_n)$$

- d) Er endelig  $\alpha + i\beta$  og  $\alpha - i\beta$  komplekst konjugerede rødder med multiplicitet  $k$  i ligningen (\*), vil

$$\{e^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \cos \beta t, \\ e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \sin \beta t\} \subseteq N(L_n)$$

**Eksempel 5:** Er operatoren  $L = D^3 - 3D - 2D^0$ , skal man løse ligningen  $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$ , der har rødderne 2 og -1, hvor -1 er dobbeltrod. Derfor bliver  $N(L) = \text{Sp}\{e^{2t}, e^{-t}, te^{-t}\}$ .

**Eksempel 6:** Er operatoren  $L = D^4 + 2D^2 + D^0$ , skal man løse ligningen  $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ , og med omskrivningen

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2$$

ser man, at  $-i$  og  $i$  vil være rødder med multiplicitet 2. Derfor bliver  $N(L) = \text{Sp}\{\cos t, t \cos t, \sin t, t \sin t\}$ .

### Alternativ fremstilling

Man kan imidlertid også bestemme en basis for nulrummet svarende til en  $n$ -te ordens lineær differentialoperator på en anden måde. Igen omskriver man den  $n$ -te ordens lineære differentiaalligning

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0D^0)f(t) = 0.$$

til første ordens lineære differentiaalligninger. Man indfører nu funktionerne

$$f_1 = f, \quad f_2 = Df, \quad \dots, \quad f_n = D^{n-1}f$$

og herved kan man dels opskrive ligningerne

$$f_1' = f_2, \quad f_2' = f_3, \quad \dots, \quad f_{n-1}' = f_n$$

og dels ved indsættelse i den oprindelige ligning få

$$f_n' = D^n f = -a_0 f_1 - a_1 f_2 - \dots - a_{n-1} f_n.$$

Disse ialt  $n$  lineære differentialligninger af første orden kan nu med fordel opskrives på matrixform  $f'(t) = Af(t)$  således

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Skal dette ligningssystem løses, skal matricen enten diagonaliseres eller (i det mindste) bringes på jordans normalform. Hertil skal vi bestemme samtlige egenverdier for matricen  $A$ .

Vi skal altså bestemme det karakteristiske polynomium, dvs

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

eller

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

Ganges først alle søjler med  $(-1)$ , og foretages herefter følgende søjleoperationer:

$$s_{n-1} = s_{n-1} + \lambda s_n, \dots, s_1 = s_1 + \lambda s_2$$

bliver

$$p(\lambda) = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ F(\lambda) & * & * & \dots & * & * \end{vmatrix}$$

hvor  $F(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$ , og hvor  $*$  betyder et led uden interesse, da man udvikler determinanten efter første søjle. Dette giver

$$p(\lambda) = (-1)^n (-1)^{n+1} F(\lambda) (-1)^{n-1}$$

eller

$$p(\lambda) = (-1)^n (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n)$$

Egenverdierne for matricen  $A$  er altså samtlige rødder i ligningen

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$$

som er identisk med ligningen  $(*)$  i den forrige fremstilling.

Skal man herefter bestemme den eller de egenvektorer, som svarer til den fundne egenværdi, skal man jo finde samtlige vektorer, som opfylder

$$(A - \lambda E)v_1 = 0.$$

Dette giver følgende sammenhørende ligninger

$$\begin{aligned} -\lambda x_1 + x_2 &= 0 & , & & -\lambda x_2 + x_3 &= 0 \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-2} x_{n-1} - (a_{n-1} - \lambda)x_n &= 0. \end{aligned}$$

Disse kan omskrives til

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda x_1 & , & & x_3 &= \lambda x_2 = \lambda^2 x_1 & , \\ x_4 &= \lambda x_3 = \lambda^3 x_1 & , & \dots & , & & x_n = \lambda x_{n-1} = \lambda^{n-1} x_1 \end{aligned}$$

hvilket betyder, at den sidste linie omskrives til

$$-x_1(a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n) = 0$$

eller

$$-x_1 p(\lambda) = 0.$$

Da  $\lambda$  er rod i det karakteristiske polynomium, er  $p(\lambda) = 0$ , og vi kan derfor vælge  $x_1$  frit fx til  $x_1 = 1$ . Da bliver egenrummet svarende til egenværdien  $\lambda$

$$E_\lambda = \text{Sp}((1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-2}, \lambda^{n-1})^T),$$

dvs uanset hvilken algebraisk multiplicitet  $\lambda$  har, er  $g_m(\lambda) = 1$ . Derfor vil matricen  $A$  transformere til en jordanmatrix med maksimalt antal 1-taller over diagonalen, nemlig for alle egenværdier med algebraisk multiplicitet større end 1.

I sådanne tilfælde skal man altså bestemme en vektor  $v_2$ , som opfylder

$$(A - \lambda E)v_2 = v_1$$

hvor jo  $v_1 = (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})^T$ . Man får da de sammenhørende ligninger

$$\begin{aligned} -\lambda x_1 + x_2 &= 1 & , & & -\lambda x_2 + x_3 &= \lambda \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - (a_{n-1} - \lambda)x_n &= \lambda^{n-1} \end{aligned}$$

Disse kan nu omskrives til

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + \lambda x_1 & , & & x_3 &= \lambda + \lambda x_2 = 2\lambda + \lambda^2 x_1 \\ x_4 &= \lambda^2 + \lambda x_3 = 3\lambda^2 + \lambda^3 x_1 & , & \dots & \\ x_n &= \lambda^{n-2} + \lambda x_{n-1} = \lambda^{n-2} + \lambda^{n-2}(n-2 + \lambda x_1) = (n-1)\lambda^{n-2} + \lambda^{n-1} x_1, \end{aligned}$$

hvilket betyder, at den sidste ligning omskrives til

$$-x_1(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n) - (a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2} + n\lambda^{n-1}) = 0$$

eller

$$-x_1 p(\lambda) - p'(\lambda) = 0.$$

Er  $\text{algm}(\lambda) \geq 2$ , dvs når såvel  $p(\lambda) = 0$  som  $p'(\lambda) = 0$  kan en "syntetisk" vektor fx vælges til

$$\mathbf{v}_2 = (0, 1, 2\lambda, 3\lambda^2, \dots, (n-1)\lambda^{n-2})^T,$$

(hvor man har sat  $x_1 = 0$ ).

**Bemærk**, at vektoren  $\mathbf{v}_2$  fremkommer af vektoren  $\mathbf{v}_1$  ved differentiation mht  $\lambda$ .

Er  $\text{algm}(\lambda) \geq 3$  kan man tilsvarende bestemme en vektor  $\mathbf{v}_3$  af

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2.$$

Denne vektor er fx

$$\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 3\lambda, 6\lambda^2, \dots, (n-1)(n-2)\lambda^{n-3}/2)^T$$

Bemærk, at  $\mathbf{v}_3$  vil fremkomme af  $\mathbf{v}_2$  ved differentiation mht  $\lambda$ , og derefter division med 2.

Når transformationsmatricen  $\mathbf{S}$  er færdigkonstrueret efter denne recept, kan vi overgå til løsning af differentiallygningssystemet  $\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t)$ . Bemærk, at vi udelukkende er interesseret i at finde  $f_1$  (første koordinat i  $\mathbf{f}$ ). Benyttes som sædvanlig transformationen  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{g}(t)$ , vil differentiallygningssystemet blive overført i

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{g}(t)$$

hvor  $\mathbf{J}$  er en jordanmatrix med 1-taller lige over diagonalen i netop de søjler, hvor der i  $\mathbf{S}$  står en "syntetisk" vektor.

Er  $\xi$  en egen værdi for  $\mathbf{A}$  med  $\text{algm}(\xi) = k (> 1)$ , vil som før vist  $\text{gm}(\xi) = 1$ , og derfor vil den  $k \times k$ -delmatrix  $\mathbf{J}_\xi$  af  $\mathbf{J}$ , som svarer til  $\xi$ , have formen

$$\mathbf{J}_\xi = \begin{pmatrix} \xi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

og den del af differentiallygningssystemet, som skal løses svarende til  $\xi$ , bliver derfor

$$g_1'(t) = \xi g_1(t) + g_2(t) \quad , \quad g_2'(t) = \xi g_2(t) + g_3(t)$$

...

$$g_{k-1}'(t) = \xi g_{k-1}(t) + g_k(t) \quad , \quad g_k'(t) = \xi g_k(t)$$

Løses dette system bagfra, finder vi at

$$\begin{aligned} g_k(t) &= c_k e^{\xi t} \\ g_{k-1}(t) &= c_k t e^{\xi t} + c_{k-1} e^{\xi t} \\ &\dots \\ g_2(t) &= \frac{c_k}{(k-2)!} t^{k-2} e^{\xi t} + \dots + c_2 e^{\xi t} \\ g_1(t) &= \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\xi t} + \dots + c_2 t e^{\xi t} + c_1 e^{\xi t} \end{aligned}$$

Da imidlertid den del af transformationsmatricen  $S$ , som er knyttet til egenværdien  $\xi$ , er en nedre trekantmatrix med et 1-tal på første plads i første søjle (jfr udregningen af  $v_1, v_2$  osv), vil man af transformationen  $f(t) = Sg(t)$  få, at

$$f_1(t) = g_1(t) + \text{bidrag fra \u00f8vrige egenv\u00e6rdier}$$

dvs nulrummet for differentialoperatoren

$$L_n = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 D^0$$

vil indeholde

$$\text{Sp}\{e^{\xi t}, t e^{\xi t}, \dots, t^{k-1} e^{\xi t}\}.$$

Som man vil se stemmer dette overens med punkt b) p\u00e5 side 5 i den f\u00f8rste fremstilling. Bem\u00e6rk i\u00f8vrigt, at denne gennemregning ogs\u00e5 g\u00e5lder for en kompleks egenv\u00e6rdi  $\alpha + i\beta$ , og da den komplekst konjugerede v\u00e6rdi  $\alpha - i\beta$  samtidigt vil v\u00e6re egenv\u00e6rdi og med samme algebraiske multiplicitet, f\u00e5r man resultaterne i punkt c) og d) p\u00e5 side 5.

### Egenrum for en differentialoperator

I Griffel, kapitel 5G er vist, at hvis  $\mu$  er egenv\u00e6rdi for en line\u00e5r afbildning  $g: V \rightarrow V$ , vil samtlige egenvektorer for  $g$  svarende til egenv\u00e6rdien  $\mu$  - sammen med 0-elementet - v\u00e6re et underrom. Dette underrom kaldes egenrummet for  $\mu$  -  $E_\mu$ . Det er endvidere vist, at dette egenrum er nulrummet for afbildningen  $g - \mu i$ , dvs  $E_\mu = N(g - \mu i)$ .

Er s\u00e5ledes  $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$  en line\u00e5r differentialoperator kan man eftersp\u00f8rge egenfunktionerne for  $L$  svarende til en egenv\u00e6rdi  $\mu$ , dvs at finde samtlige funktioner  $f \in C^\infty$ , som opfylder

$$Lf = \mu f,$$

hvilket jfr den n\u00e6vnte s\u00e5tning svarer til at finde en basis for nulrummet  $N(L - \mu D^0)$ .



# Diagonalisering af matricer og JORDAN's normalform.

## Indledning

Som det fremgår af Griffel, kapitel 8A kan en  $n \times n$  matrix  $A$  diagonaliseres hvis og kun hvis der findes en basis for  $\mathbb{R}^n$  af egenvektorer for matricen  $A$ .

Med udgangspunkt i denne sætning antager vi nu, at  $A$  har egenverdierne  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (hvor flere egenverdier kan være ens) med de tilhørende egenvektorer  $v_1, \dots, v_n$  (som er lineært uafhængige). Der gælder så, at

$$\forall i : Av_i = \lambda_i v_i.$$

Indføres nu matricen  $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , vil  $S$  i søjlerne netop have alle de lineært uafhængige egenvektorer. Da er

$$\begin{aligned} AS &= (Av_1, Av_2, \dots, Av_n) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n) \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= SD \end{aligned}$$

hvor  $D$  er en diagonalmatrix med egenverdierne i diagonalen, netop opskrevet i den samme rækkefølge, som egenvektorerne er opskrevet i transformationsmatricen  $S$ . Da søjlerne i  $S$  er lineært uafhængige svarer  $AS = SD$  til at

$$D = S^{-1}AS.$$

Spørgsmålet er nu, hvad der sker, når man ikke har en basis for  $\mathbb{R}^n$  af egenvektorer for  $A$ .

For det første kan man nøjes med at undersøge de egenverdier, hvor

$$gm(\lambda) < algm(\lambda).$$

Til de øvrige egenverdier er der egenvektorer "nok". Mangler der egenvektorer suppleres listen af egenvektorer (der er dog altid mindst én) med det antal lineært uafhængige vektorer, der svarer til differensen

$$algm(\lambda) - gm(\lambda).$$

Det kan vises, at man altid på en nøje foreskrevet måde kan finde

et sådant lineært uafhængigt sæt knyttet til egenværdien  $\lambda$ .

## Tilfældet $gm(\lambda) = 1$

Vi betragter først det tilfælde, hvor den aktuelle egenværdi har  $gm(\lambda) = 1$  og  $algm(\lambda) = k$ . Således er den eneste egenvektor bestemt af

$$Av_1 = \lambda v_1 \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_1 = 0$$

De resterende vektorer skal da bestemmes af følgende algoritme

$$Av_2 = \lambda v_2 + v_1 \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_2 = v_1$$

$$Av_3 = \lambda v_3 + v_2 \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_3 = v_2$$

⋮

⋮

$$Av_k = \lambda v_k + v_{k-1} \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_k = v_{k-1}$$

Påstanden er da, at man altid kan finde disse vektorer  $v_2, v_3, \dots, v_k$ , og vi skal senere vise, at disse sammen med  $v_1$  vil udgøre en lineært uafhængig mængde.

Sættes som før  $S = (\dots, v_1, v_2, \dots, v_k, \dots)$

bliver  $AS = (\dots, Av_1, Av_2, \dots, Av_k, \dots)$

$$= (\dots, \lambda v_1, \lambda v_2 + v_1, \dots, \lambda v_k + v_{k-1}, \dots)$$

$$= S \begin{pmatrix} \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \dots \\ \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \dots \\ \dots & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & \dots \\ \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

$$= SJ$$

Denne matrix  $J$  kaldes en **jordanmatrix**, og den består af egenværdierne for  $A$  i diagonalen og af et 1-tal lige over diagonalen i netop de søjler, hvor der i  $S$  står en "konstrueret" (eller "synetisk" fremstillet) vektor.

Eksempel 1: Med matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



bliver det karakteristiske polynomium  $\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^3$ ,  
dvs  $\lambda = 1$  er den eneste egenværdi. Af  $(A - \lambda E)v_1 = 0$  kan man  
nu bestemme egenvektorerne svarende til egenværdien 1, dvs

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og man får, at  $-z = 0$  og  $x + y = 0$ . Således bliver den eneste  
egenvektorretning fastlagt til fx

$$v_1 = (-1, 1, 0)^T.$$

Benyttes nu algoritmen skal vi altså finde  $v_2$ , således at

$$(A - \lambda E)v_2 = v_1,$$

eller

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvilket giver  $-z = -1$  og  $x + y = 1$  dvs

$$v_2 = (1, 0, 1)^T$$

**Bemærk** at man lige så vel kunne have valgt  $(0, 1, 1)^T$  eller  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)^T$

Algoritmen skal fortsættes, således at man finder  $v_3$  af

$$(A - \lambda E)v_3 = v_2,$$

eller

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der giver  $-z = 1$  og  $x + y = 0$ , dvs vektorretningen bliver fx

$$v_3 = (0, 0, -1)^T.$$

Herefter bliver matricerne

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og for at sikre at der er regnet rigtig skal  $AS = SJ$ , hvilket en simpel udregning bekræfter. #

Øvelse 1: Vis, at matricen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kun vil have én egenværdi og én egenvektor, og bestem derpå en basis for  $\mathbb{R}^3$ , så  $B$  vil blive transformeret over i en jordanmatrix. #

Vi skal nu vise, at mængden  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ , der er fastlagt som nævnt på side 2, er lineært uafhængig.

Sættes nu  $T = A - \lambda E$ , bliver  $Tv_k = v_{k-1}$ ,  $T^2v_k = Tv_{k-1} = v_{k-2}$ , ... ,  $T^{k-1}v_k = v_1$  samt  $T^kv_k = Tv_1 = 0$  (da  $v_1$  er en egenvektor) 1)

Vi tager nu udgangspunkt i linearkombinationen

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k = 0$$

og vi skal altså vise, at alle  $c_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Udtrykt med  $T$  bliver linearkombinationen til

$$(*) \quad c_1T^{k-1}v_k + c_2T^{k-2}v_k + \dots + c_kv_k = 0$$

Lader vi nu  $T^{k-1}$  virke på (\*) får vi, at

$$c_kT^{k-1}v_k = 0 \quad \text{eller} \quad c_kv_1 = 0$$

(da jo  $T^{k+j}v_k = 0$  for alle  $j \geq 0$ ). Da  $v_1$  er egenvektor, er  $v_1 \neq 0$  og således er  $c_k = 0$ .

Lader vi tilsvarende  $T^{k-2}$  virke på (\*), bliver

$$c_{k-1}T^{k-1}v_k + c_kT^{k-2}v_k = 0 \quad \text{eller} \quad c_{k-1}v_1 + c_kv_2 = 0$$

Da jo  $c_k = 0$  og  $v_1 \neq 0$  bliver  $c_{k-1} = 0$ .

Lader vi herefter  $T^{k-i}$ ,  $i = 3, \dots, k$  virke på (\*) får vi successivt  $c_{k-2} = \dots = c_1 = 0$ , og dermed er det vist, at mængden

$$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

er lineært uafhængig. #

1) En matrix  $T$ , der opfylder, at  $T^ju \neq 0$  når  $j < k$  og  $T^ku = 0$  for alle  $u \neq 0$ , kaldes **nilpotent af grad  $k$** .

## Tilfældet $gm(\lambda) > 1$

Vi går nu over til det tilfælde, hvor der er flere lineært uafhængige egenvektorer svarende til egenværdien  $\lambda$ , men færre end den algebraiske multiplicitet. Egenrummet  $E_\lambda$  antages nu at være udspændt af vektorerne  $v_1, v_2, \dots, v_j$ , dvs  $gm(\lambda) = j$ . Videre er  $algm(\lambda) = k > j$ . Man bestemmer - i princippet - den eller de manglende vektorer lige som i tilfældet  $gm(\lambda) = 1$ , men det er nu ikke umiddelbart klart, hvilken vektorretning i  $E_\lambda$  man skal benytte. Men påstanden er, at man altid kan finde mindst én vektorretning  $u \in E_\lambda$ , således at algoritmen fra før vil fungere, dvs at

$$\begin{aligned} Av_{j+1} &= \lambda v_{j+1} + u \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_{j+1} = u \\ &\vdots \\ Av_k &= \lambda v_k + v_{k-1} \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_k = v_{k-1}. \end{aligned}$$

Vælges nu som før disse vektorer som søjlerne i  $S$ , dvs

$$S = (\dots, v_1, \dots, v_{j-1}, u, v_{j+1}, \dots, v_k, \dots)$$

hvor de første  $j$  vektorer  $v_1, \dots, v_{j-1}, u$  er egenvektorer og valgt således at de er lineært uafhængige. Da bliver

$$\begin{aligned} AS &= (\dots, Av_1, \dots, Av_{j-1}, Au, Av_{j+1}, \dots, Av_k, \dots) \\ &= (\dots, \lambda v_1, \dots, \lambda v_{j-1}, \lambda u, \lambda v_{j+1} + u, \dots, \lambda v_k + v_{k-1}, \dots) \end{aligned}$$

$$= S \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \lambda & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \lambda & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$= SJ$$

hvor  $J$  er en jordanmatrix med egenværdierne i diagonalen og med 1-tal lige over diagonalen i netop de søjler, hvor der i  $S$  står en "syntetisk" fremstillet vektor.

Som i tilfældet  $gm(\lambda) = 1$  kan man også her vise, at den konstruerede mængde  $\{v_1, \dots, v_{j-1}, u, v_{j+1}, \dots, v_k\}$  vil være lineært uafhængig.

Ideen i beviset er den samme som før. Er  $T = A - \lambda E$ , bliver  $Tv_k = v_{k-1}$ , ..,  $T^{k-j}v_k = u$  og  $T^{k-j+1}v_k = Tu = 0$ . Igen betragtes linearkombinationen

$$c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1} + c_j u + c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_k v_k = 0$$

eller

$$(*) \quad c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1} + c_j T^{k-j} v_k + c_{j+1} T^{k-j-1} v_k + \dots + c_k v_k = 0$$

Lader vi  $T^{k-j}$  virke på  $(*)$  fås, at

$$0 = c_k T^{k-j} v_k = c_k u$$

og da  $u \neq 0$  bliver  $c_k = 0$ . Tilsvarende får man som før succesivt, at  $c_{k-1} = \dots = c_{j+1} = c_j = 0$ , og da  $\{v_1, \dots, v_{j-1}\}$  var antaget lineært uafhængig, vil også  $c_1 = \dots = c_{j-1} = 0$ . Herefter er beviset gennemført. #

### Eksempel 2: Matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

har det karakteristiske polynomium  $\det(A - \lambda E) = -(1 + \lambda)^3$ , dvs den eneste egenværdi er  $-1$  med  $\text{algm}(-1) = 3$ . Af  $(A - \lambda E)v = 0$  får man tre ens ligninger af formen

$$x - 2y + z = 0,$$

der jo udspænder en plan i  $\mathbb{R}^3$ , dvs  $\text{gm}(-1) = 2$ , og en basis for egenrummet  $E_{-1}$  er fx

$$\{(2, 1, 0)^T; (1, 0, -1)^T\}.$$

Af  $(A - \lambda E)v_3 = u$  får man de tre ligninger

$$x - 2y + z = u_1$$

$$x - 2y + z = u_2$$

$$x - 2y + z = u_3.$$

Da påstanden er, at  $v_3$  altid kan konstrueres ud fra en vektor  $u \in E_{-1}$ , og da ligningerne kun giver mening, når  $u_1 = u_2 = u_3$ , må dette betyde at vektorretningen  $(1, 1, 1)^T \in E_{-1}$ , hvilket også let ses af

$$(1, 1, 1)^T = (2, 1, 0)^T - (1, 0, -1)^T.$$

Af de tre identiske ligninger

$$x - 2y + z = 1$$

får man  $v_3 = (1, 0, 0)^T$ .

Bemærk at man lige så vel kunne have valgt fx  $(0,0,1)^T$  eller  $(0,-\frac{1}{2},0)^T$ .

Herefter bliver matricerne

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

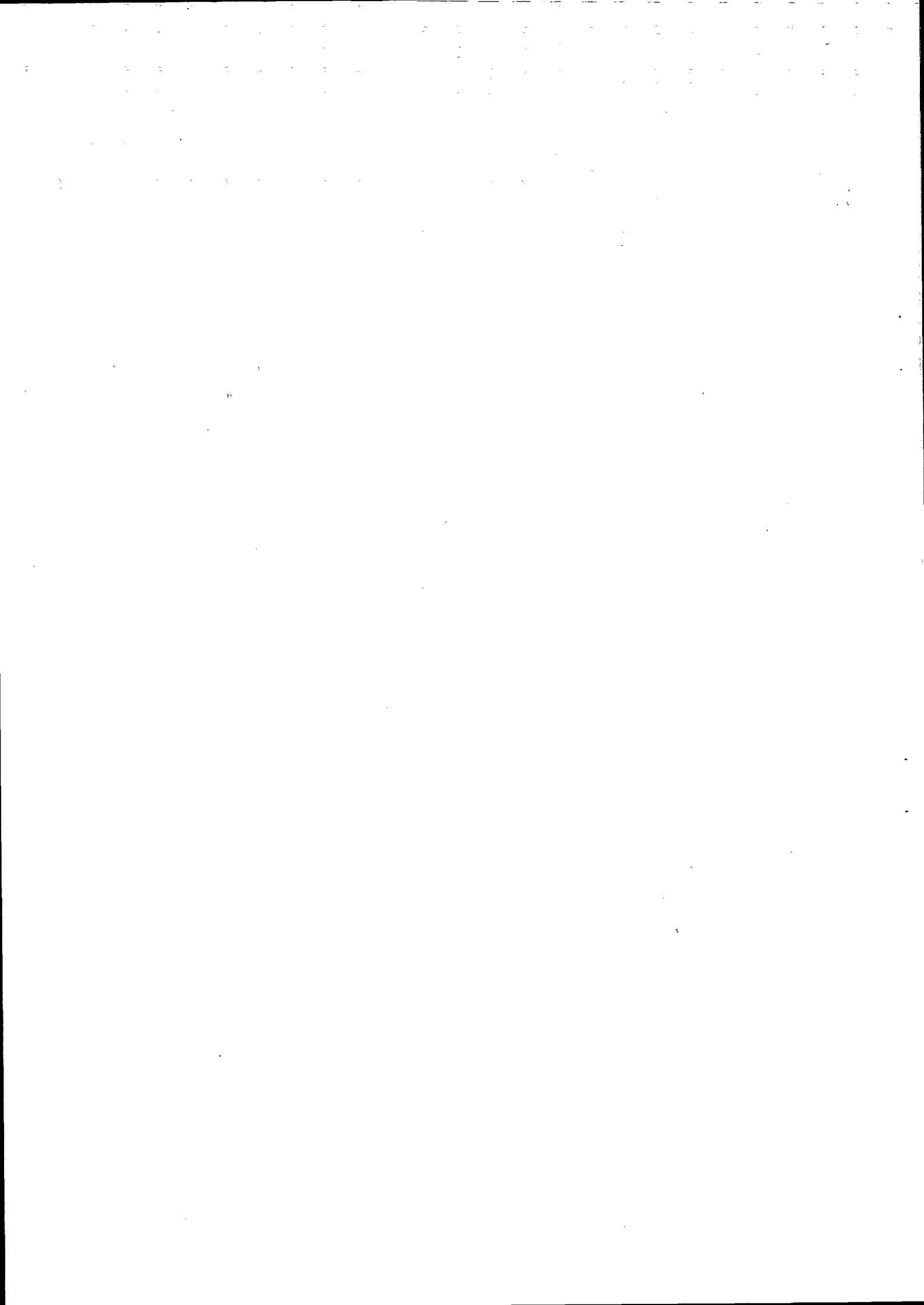
Bemærk, at egenvektoren  $(1,1,1)^T$  er medtaget i matricen S som den sidste af de to lineært uafhængige egenvektorer. Det bekræftes let ved udregning, at  $AS = SJ$ . #

Øvelse 2: Vis, at matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

kun vil have en egenværdi med to lineært uafhængige egenvektorer, og bestem derpå en basis for  $\mathbb{R}^3$ , så B vil blive transformeret over i en jordanmatrix. #

Afsluttende kan vi altså konstatere, at en matrix enten kan diagonaliseres eller kan transformeres til en jordanmatrix. Denne jordanmatrix vil i diagonalen have alle egenværdierne for matricen gentaget svarende til den algebraiske multiplicitet, og lige over diagonalen vil der stå 1-tal i netop de søjler, som svarer til søjler i transformationsmatricen S, hvor der står "syntetiske egenvektorer".



# Supplerende opgaver

1.  $C^0$  er mængden af alle reelle, kontinuerte funktioner. Der er givet følgende mængder

$$F_1 = \{ f \in C^0 \mid f(1) = 0 \}$$

$$F_2 = \{ f \in C^0 \mid f(0) = 1 \}$$

$$F_3 = \{ f \in C^0 \mid f(0) = 0 \wedge f(1) = 0 \}$$

Afgør da hvilke af disse mængder, der er underrum i  $C^0$ .

2.  $P_3$  er mængden af alle reelle polynomier af højst tredje grad. Idet  $p'$  betyder den afledede af  $p$ , defineres følgende mængder

$$Q_1 = \{ q \in P_3 \mid q'(t) - 2q(t) = t^3 \}$$

$$Q_2 = \{ q \in P_3 \mid tq'(t) - 2q(t) = 0 \}$$

$$Q_3 = \{ q \in P_3 \mid t^2q''(t) - 2tq'(t) + 2q(t) = 0 \}$$

$$Q_4 = \{ q \in P_3 \mid t^2q''(t) - 2tq'(t) + 3q(t) = 0 \}$$

Afgør da hvilke af disse mængder, der vil være underrum i  $P_3$ . Bestem endvidere samtlige de polynomier, som tilhører mængden  $Q_3$  henholdsvis mængden  $Q_4$ .

3.  $C^p$  er mængden af alle reelle,  $p$  gange (kontinuerte,) differentiable funktioner. Idet  $f'$  betyder den afledede af  $f$ , defineres følgende mængder

$$G_1 = \{ f \in C^1 \mid f' + af = 0 \}$$

$$G_2 = \{ f \in C^1 \mid f' + f^2 = 0 \}$$

$$G_3 = \{ f \in C^2 \mid f'' + af' + bf = 0 \}$$

hvor  $a$  og  $b$  er reelle tal. Afgør da hvilke af disse mængder, der vil være underrum i  $C^1$ .

4. En kvadratisk matrix  $A$  kaldes skæv-symmetrisk, hvis det gælder at  $A^T = -A$ .

- Vis, at ethvert diagonalelement i en skæv-symmetrisk matrix vil være 0.
- Nedskriv en  $3 \times 3$  skæv-symmetrisk matrix.
- Vis, at såfremt en matrix skal være både symmetrisk og skæv-symmetrisk, må den være 0-maticen.

- d. Vis, at enhver kvadratisk matrix kan skrives som sum af en symmetrisk og en skæv-symmetrisk matrix.

5. Der er givet matrixerne

$$\begin{aligned} E(1,1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & E(1,2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E(2,1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & E(2,2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vis da, at  $E(i,j) \cdot E(j,k) = E(i,k)$  for alle  $i,j,k = 1,2$  og at  $E(i,j) \cdot E(k,l) = 0$ , hvis  $i,j,k,l = 1,2$  og  $j \neq k$ .

Vis derpå, at enhver reel  $2 \times 2$ -matrix på entydig måde kan skrives som linearkombination af disse fire matrixer.

$M_{2,2}$  betegner mængden af alle reelle  $2 \times 2$ -matrixer. Vis, at  $M_{2,2}$  er et vektorrum, og fastlæg rummets dimension.

6. Fastlæg samtlige reelle  $2 \times 2$ -matrixer  $B$ , der vil kommutere med matrixen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(dvs  $AB = BA$ ). Vis, at mængden af sådanne matrixer  $B$  vil være et underrum i  $M_{2,2}$ , og bestem underrummets dimension.

7. Vi skal nu generalisere opgave 5 til  $n \times n$ -matrixer. Således står  $E(i,j)$  for den  $n \times n$ -matrix, der har 1 på den  $i,j$ -te plads og 0 på alle øvrige pladser. Godtgør da, at

$$E(i,j) \cdot E(k,l) = \delta_{j,k} \cdot E(i,l)$$

hvor  $i,j,k,l = 1,2,\dots,n$  ( $\delta_{j,k} = 1$  for  $j = k$  og ellers  $= 0$ ).

Idet  $M_{n,n}$  betegner mængden af alle reelle  $n \times n$ -matrixer, skal det vises, at  $M_{n,n}$  er et vektorrum, og bestem rummets dimension.

8.  $U_{n,n}$  betegner mængden af alle reelle, øvre  $n \times n$ -trekantmatrixer. Godtgør, at  $U_{n,n}$  er et underrum i  $M_{n,n}$ , og bestem dimensionen af  $U_{n,n}$ . Tilsvarende betegner  $S_{n,n}$  mængden af alle reelle, symmetriske  $n \times n$ -matrixer og  $T_{n,n}$  mængden af alle de skæv-symmetriske. Vis, at såvel  $S_{n,n}$  som  $T_{n,n}$  er underrum i  $M_{n,n}$  og bestem rummets dimensioner.



9. Idet  $P_2$  er mængden af alle reelle polynomier af højst anden grad betragtes de fire polynomier

$$\begin{aligned} p_0(t) &= 2t^2 + t, & p_1(t) &= t^2 \\ p_2(t) &= -t^2 + t + 1, & p_3(t) &= -t - 1 \end{aligned}$$

Vis, at disse fire er lineært afhængige, og bestem et lineært uafhængigt sæt af tre af disse polynomier.

Vis endelig, at ethvert element i  $P_2$  kan skrives som linearkombination af disse tre polynomier.

10. Man betragter vektorrummet  $C^3$  over  $C$ . Der er givet følgende sæt af vektorer

$$\begin{aligned} S_1 &= \{ (1,0,0); (0,1,i); (1,i,-1) \} \\ S_2 &= \{ (1,-1,i); (i,0,1); (0,1,i) \} \\ S_3 &= \{ (i,i,i); (1,1,-1); (1,i,0) \} \end{aligned}$$

Afgør da hvilke af disse mængder, der lineært uafhængige, og bestem koordinaterne til vektoren  $(1,2i,-3)$  med hensyn til  $S_2$ .

11. Vis, at hvert af følgende sæt af polynomier i  $P_3$  (rummet af alle reelle polynomier af grad  $\leq 3$ ) vil udgøre en basis for  $P_3$ .

$$\begin{aligned} \{ 1, 1+t, t+t^2, t^2+t^3 \} \\ \{ 1, 1+t, 1+t^2, 1+t^3 \} \end{aligned}$$

og fastlæg koordinaterne til polynomiet  $p(t) = t^3 - t^2$  i forhold til hver af baserne.

12. Betragt vektorrummet  $C^3$  over  $R$ . Hvilken dimension har dette vektorrum (se tillige kapitel 3 opgave 24).

13. Løs ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

14. Angiv for hver værdi af det reelle tal  $a$  mængden af løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned}x &+ z + aw = 1 \\x + y + z &= 1 \\y + z - w &= 1 \\x + y &- w = 1\end{aligned}$$

15. Bestem det reelle tal  $b$  således, at ligningssystemet

$$\begin{aligned}x - y + z + w &= 1 \\y + z + w &= 0 \\-x + y - 4z + 5w &= b + 4 \\2x - 2y + 5z + bw &= 1\end{aligned}$$

har mindst en løsning, og fastlæg for hvert sådant  $b$  samtlige løsninger til systemet.

16. Der er givet matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestem såvel række- som søjlerang for matricen  $B$ . Betegn  $M$  en matrix på trappeform, som er rækkeækvivalent med  $B$ , skal man udregne  $B^2$  og  $M^2$ . Vil disse to matricer have samme rækkerang?

17. Angiv en basis for løsningsrummet for ligningssystemet

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 0 & -x - 2y + 3z &= 0 \\4x + 8y - 12z &= 0 & x - y + 5z &= 0,\end{aligned}$$

og bestem de talsæt  $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$  for hvilke ligningssystemet

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= b_1 & -x - 2y + 3z &= b_2 \\4x + 8y - 12z &= b_3 & x - y + 5z &= b_4\end{aligned}$$

har mindst én løsning.

18. Bestem det reelle tal  $b$  således at ligningssystemet

$$\begin{aligned}4x - 5y - 2z + 3w &= 3 \\3x - 3y - 5z + 4w &= 4 \\2x - 5y + 4z - w &= b\end{aligned}$$

har mindst én løsning. Bestem den fuldstændige løsning til

ligningssystemet med dette valg af  $b$ .

19. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 &= 2 \\3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 3.\end{aligned}$$

20. Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

og bestem løsningsmængden til ligningssystemet  $Ax = 0$ . Fastlæg derpå vektoren  $b$ , således at ligningssystemet  $Ax = b$  har mindst én løsning.

21. Idet  $P_3$  er rummet af alle reelle polynomier af højst tredje grad, defineres operatorerne  $Q_1, Q_2: P_3 \rightarrow P_3$  ved

$$Q_1p(t) = t^2p''(t) - 2tp'(t) + 2p(t)$$

$$Q_2p(t) = t^2p''(t) - 2tp'(t) + 3p(t)$$

for alle reelle  $t$ . Bestem nulrum og billedrum for begge operatorer.

22. Idet  $C^\infty$  betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, er de to differentialoperatorer  $L_1, L_2: C^\infty \rightarrow C^\infty$  givet ved

$$L_1f = f'' + 4f' + 3f$$

$$L_2f = f'' + 4f' + 5f.$$

Bestem en basis for hver af nulrummene  $N(L_1)$  og  $N(L_2)$ , når det oplyses, at funktionen  $\phi: t \rightarrow e^{at}$  for passende valg af  $a \in \mathbb{C}$  vil tilhøre nulrummet. Hvad bliver nulrummenes dimension?

23. Når  $M_{3,3}$  er rummet af alle reelle  $3 \times 3$ -matricer, defineres en lineær afbildning  $f: M_{3,3} \rightarrow M_{3,3}$  ved, at  $f(X) = M \cdot X$ , idet matricen  $M$  er fastlagt ved

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestem nulrum og billedrum for afbildningen  $f$ .

24. Lad de lineære afbildninger  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  og  $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  i en passende valgt basis være givet ved matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at  $B(f) = N(g)$ .

25.  $C^\infty$  er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren  $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$  er for alle tal  $a, b \in \mathbb{R}$  givet ved

$$Lf = f'' + af' + bf.$$

Bestem tallene  $a$  og  $b$ , når funktionerne

$$\phi_1(t) = e^{-t} \quad \text{og} \quad \phi_2(t) = e^{2t}$$

er basis for nulrummet  $N(L)$ . Bestem tillige en basis for nulrummet, hvis  $a = 7$  og  $b = 10$ .

26. Fastlæg det reelle tal  $a$ , således at matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & a \end{pmatrix}$$

vil have egenværdien  $-1$ .

27. Lad  $A_{s,t}$  betegne matricen

$$\begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Bestem tallene  $s$  og  $t$ , når vektoren  $(1,1,1)$  er egenvektor for matricen  $A_{s,t}$ , find derpå samtlige egenværdier for matricen. Er det muligt at bestemme en basis for  $\mathbb{R}^3$  af egenvektorer for matricen?

28. Bestem samtlige egenverdier til matricen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og bestem de tilhørende egenvektorer. Kan man fastlægge en basis af egenvektorer for B?

29. Der er givet en lineær afbildning  $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$  ved

$$Lf = f'' + 4f' + f.$$

Vis, at funktionen  $\phi(t) = te^{-2t}$  tilhører egenrummet svarende til egenværdien  $-3$ , og bestem derpå en basis for dette rum.

30. Bestem det reelle tal  $s$  således, at matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & s & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

har egenværdien  $-1$ . Bestem i dette tilfælde alle egenverdier og egenvektorer. Kan matricen diagonaliseres?

31. En lineær afbildning  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fastlæg en basis for  $\mathbb{R}^4$ , som består udelukkende af egenvektorer for  $f$ .

### Opgavesæt A:

A 1. Angiv for alle talpar  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  antallet af løsninger til ligningssystemet

$$x - y + z - 2w = -1$$

$$x + 2z - w = 2$$

$$y + z + 2w = a$$

$$-x + y - z + bw = 1$$

og løs derpå ligningssystemet for  $(a,b) = (3,2)$ .

A 2. Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vis, at  $A$  ikke kan diagonaliseres.

Vis dernæst, at  $A$  ved et passende basisskifte kan bringes på Jordans normalform.

Benyt fx dette til at løse differentiaalligningssystemet

$$f'(t) = Af(t),$$

med  $f(0) = (1, 1, 1, 1)^T$ .

A 3. Idet  $C^\infty$  er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres en operator  $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$  ved

$$Lf = (D^3 + aD + bD^0)f$$

hvor  $a, b \in \mathbb{R}$ . Bestem  $a$  og  $b$  således at funktionen

$$\alpha: t \rightarrow te^{-2t}$$

er egenfunktion for  $L$  svarende til egenværdien  $8$ , og fastlæg endelig en basis for egenrummet for  $L$  svarende til egenværdien  $8$ .

A 4. Lad  $U$  og  $V$  betegne henholdsvis nulrum og billedrum for en lineær afbildning  $g$  af  $\mathbb{R}^4$  ind i sig selv fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Angiv en basis for hvert af rummene  $U$ ,  $V$  og  $U \cap V$ . Fastlæg på denne baggrund en basis for billedrummet for  $g^2$ .

**Opgavesæt B:**

B 1.  $C^\infty$  er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. Vis, at funktionen

$$\alpha: t \rightarrow t \cos t$$

tilhører nulrummet for operatoren  $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$  givet ved

$$Df = (D^4 + 2D^2 + D^0)f,$$

og fastlæg herefter en basis for nulrummet. Fastlæg tillige en basis for egenrummet svarende til egenværdien 1.

B 2. Lad  $A$  være matricen givet ved

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

og lad  $f$  og  $g$  være de lineære afbildninger svarende til henholdsvis  $A$  og  $A^T$ .

Bestem ortogonale baser for nulrummet for  $f - N(f)$  - og for billedrummet for  $g - B(g)$ . Vis, at disse to baser udgør en ortogonal basis for  $\mathbb{R}^5$ .

B 3. Lad  $B$  betegne matricen

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

hvor  $(a, b, c)$  er et sæt af komplekse tal, hvorom det gælder, at  $(1, 1, 1)$  er en egenvektor for  $B$ . Find samtlige egenværdier for  $B$ .

Afgør hvornår  $B$  er regulær, og vis, at nulrummet i modsat fald har dimension 1.

Begrund, at enhver basis bestående af egenvektorer vil være ortogonal, hvis  $a$ ,  $b$  og  $c$  er reelle tal.

B 4. De to matricer  $V$  og  $U$  er givet ved

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bevis, at  $U = V + V^2 + V^3$ ,  $U^4 = V^4 = 0$

og  $UV = VU = U - V$ .

Sætter vi  $A_t = E + tV$  og  $B_t = E + tU$

vis da, at  $B_t^{-1} = A_{-t}$ .

Vis endelig, at det for alle reelle  $t \neq 0$  gælder, at  $A_t$  er jordans normalform for  $B_t$ , og bestem en matrix  $S_t$ , så

$$B_t = S_t A_t S_t^{-1}.$$

### Opgavesæt C:

C 1. De lineære afbildninger  $f, g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  er i en passende valgt basis givet ved matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 7 & 5 & -10 \\ -3 & -5 & -6 & 8 \\ -3 & -6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vis, at  $B(f) = N(g)$  og at  $B(g) \cap N(f) = \{0\}$ , og bestem  $B(gf)$  og  $B(fg)$ .

C 2. Idet  $C^\infty$  betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle reelle talpar  $(a, b)$  en lineære operator  $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$  ved

$$Lf = (D^3 + aD + bD^0)f.$$

Fastlæg talparret  $(a, b)$ , således at funktionen

$$\beta: t \rightarrow e^{-t} \cos 2t$$

tilhører nulrummet for  $L$ .

Bestem derpå en basis for nulrummet, samt en basis for egenrummet svarende til egenværdien  $-10$ .

C 3. Vis, at matricen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\mu) = (\mu + 4)(\mu + 2)^3,$$

og vis tillige, at egenrummet svarende til egenværdien  $-2$  vil have dimension 2.

Foretag derpå et basisskifte, således at matricen  $A$  vil transformere til en jordanmatrix, og benyt fx dette til at bestemme løsningen til differentialligningssystemet

$$f'(t) = Af(t), \quad \text{hvor} \quad f(0) = (0, 1, 2, 0)^T.$$

C 4.  $P_3[-1, 1]$  er vektorrummet bestående af alle reelle polynomi-er af højst 3. grad givet på intervallet  $[-1, 1]$ . På dette



- 236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE  
HALL EFFEKTEN  
af: Anja Boisen, Peter Bøggild  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen  
Erland Brun Hansen
- 236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE  
HALL EFFEKTEN  
af: Anja Boisen, Peter Bøggild  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen  
Erland Brun Hansen
- 237/93 The Wedderburn principal theorem and  
Shukla cohomology  
af: Lars Kadison
- 238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)  
Vektorbånd og tensorer  
af: Peder Voetmann Christiansen
- 239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse  
Matematik 2. modul  
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen,  
Maria Hermannsson, Allan Jørgensen,  
Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen  
Vejleder: Mogens Niss
- 240/93 Patologiske eksempler.  
Om sære matematiske fiske betydning for  
den matematiske udvikling  
af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa  
Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes  
Kristoffer Nielsen  
Vejleder: Mogens Niss
- 241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1  
af: Bent Sørensen
- 242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel  
Analyse af Vejdirektoratets model for  
optimering af broreparationer  
af: Linda Kyndlev, Kåre Fundal, Kamma  
Tulinius, Ivar Zeck  
Vejleder: Jesper Larsen
- 243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN  
Et 1.modul fysikprojekt  
af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann  
Vejleder: Dorthe Posselt
- 244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse  
i CT-scanning  
Projektrapport  
af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen,  
Nina Skov Hansen og Christine Iversen  
Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen
- 245a+b  
/93. Time-Of-Flight målinger på krystallinske  
halvledere  
Specialerapport  
af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade  
Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen
- 246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK  
- LÆREPROCESSER I SKOLEN  
af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske  
Forskningsråd, RUC, IMPUFA
- 247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CON-  
DUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY  
DISORDERED NON-METALS  
by: Jeppe C. Dyre
- 248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH  
BOUNDARY  
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski
- 249/93 Perspectives on Teichmüller and the  
Jahresbericht Addendum to Schappacher,  
Scholz, et al.  
by: B. Booss-Bavnbek  
With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors,  
J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner,  
J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch,  
J.Radkau and T.Söderqvist
- 250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET  
VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV  
Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen,  
Tomas Højgård Jensen  
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 251/93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones  
by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreasen  
and Ebbe Thuc Poulsen
- 252/93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER  
Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgård,  
Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk  
Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen
- 253/93 Kuglepakning  
Teori og model  
af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse  
Vejleder: Mogens Niss
- 254/93 Regressionsanalyse  
Materiale til et statistikkursus  
af: Jørgen Larsen
- 255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED  
af: Peter Harremoës
- 256/93 Determination of the Frequency Dependent  
Bulk Modulus of Liquids Using a Piezo-  
electric Spherical Shell (Preprint)  
by: T. Christensen and N.B.Olaen

Liste over tidligere udkomne tekster  
tilsendes gerne. Henvendelse herom kan  
ske til IMFUFA's sekretariat  
tlf. 46 75 77 11 lokal 2263

- 227/92 "Computersimulering og fysik"  
af: Per M.Hansen, Steffen Holm,  
Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen,  
Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder,  
Ivar P. Zeck  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 228/92 "Teknologi og historie"  
Fire artikler af:  
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen,  
Hans Hedal
- 229/92 "Masser af information uden betydning"  
En diskussion af informationsteorien  
i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og  
en skitse til et alternativ baseret  
på andenordens kybernetik og semiotik.  
af: Søren Brier
- 
- 217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING  
IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"  
by: Mogens Niss
- 218/92 "A Three-Square Theorem"  
by: Lars Kadison
- 219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"  
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen  
Vejleder: Jesper Larsen
- 220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"  
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen  
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH  
APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"  
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and  
Henrik Schlichtkrull
- 222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional  
Groups and Algebras Related to Quantum Physics  
by: Johnny T. Ottesen
- 223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT  
by: Thomas P. Branson
- 224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT  
LOW TEMPERATURES  
by: Jeppe C. Dyre
- 225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent  
en-krystallinsk silicium  
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer,  
Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild  
og Thomas Hougaard  
Vejleder: Petr Viscor
- 226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL  
CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY  
CONVERSION"  
by: Bent Sørensen
- 230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk  
problem"  
et matematisk projekt af  
Karen Birkelund, Bjørn Christensen  
Vejleder: Johnny Ottesen
- 231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en  
matematisk model"  
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,  
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen  
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en  
matematisk model" Kildetekster  
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,  
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen  
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse  
af energiens bevarelse og isærdeles om  
de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz  
udførte arbejder"  
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård  
Vejleder: Dorthe Posselt
- 233/92 "The effect of age-dependent host  
mortality on the dynamics of an endemic  
disease and  
instability in an SIR-model with age-  
dependent susceptibility  
by: Viggo Andreassen
- 234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL  
BOUNDARY VALUE PROBLEM"  
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey
- 235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS  
- Modul 3 fysik projekt -  
af: Thomas Jessen
-

- D 3. Idet  $C^\infty$  betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres en lineær operator  $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$  ved

$$Lg = (D^3 - 3D + 2D^0)g.$$

Fastlæg en basis for nulrummet for  $L$ .

Funktionen  $\alpha: t \rightarrow te^{-t}$  tilhører et egenrum for  $L$ .

Bestem den tilhørende egenværdi samt en basis for egenrummet.

- D 4. Den lineære afbildning  $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at afbildningen  $F$  vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda + 2)^2$$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg endelig en basis i  $\mathbb{R}^4$ , således at den til  $F$  svarende matrix i denne basis vil være på Jordans normalform.

rum defineres det indre produkt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

Fastlæg en ortogonal basis for underrummet

$$Q = \{ p \in P_3 \mid p(1) = 0 \wedge p(-1) = 0 \}.$$

Beskriv dernæst de polynomier, der tilhører  $Q^\perp$  (det ortogonale komplement til  $Q$ ) og vis, at polynomierne

$$\alpha(t) = 5t^2 - 1, \quad \beta(t) = 7t^3 - 3t$$

er en ortogonal basis for  $Q^\perp$ .

De ortogonale baser i  $Q$  og  $Q^\perp$  vælges nu som basis for  $P_3$ .

Bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 + 3.$$

#### Opgavesæt D:

D 1. Lad  $U$  og  $V$  være nulrum og billedrum for den lineære afbildning  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , der er fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Angiv en parameterfremstilling for hvert af rummene  $U$ ,  $V$  og  $U \cap V$ , og fastlæg endelig billedrummet for afbildningen  $f^2$ .

D 2.  $P_2[-1, 1]$  er vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 2. grad givet på intervallet  $[-1, 1]$ . På dette rum defineres det indre produkt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

Med  $Q$  betegnes det underrum, der udspændes af polynomierne

$$\alpha(t) = t + 1, \quad \beta(t) = t^2 - t.$$

Vis, at  $\{ \alpha, \beta \}$  er en ortogonal basis for  $Q$ .

Bestem derpå en basis for det ortogonale komplement til  $Q$  kaldet  $Q^\perp$ .

Man vælger nu disse baser for  $Q$  og  $Q^\perp$  som basis for hele  $P_2$ , og bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 - 3.$$