# En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering
udviklingshistorie og multipel opdagelse

Kjeldsen, Tinne Hoff

*Publication date:*
1999

*Document Version*
Også kaldet Forlagets PDF

*Citation for published version (APA):*
Kjeldsen, T. H. (1999). *En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering: udviklingshistorie og multipel opdagelse*. Roskilde Universitet. Tekster fra IMFUFA Nr. 372

TEKST NR 372 1999

# En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering:

## udviklingshistorie og multipel opdagelse

Ph.d.-afhandling

af

Tinne Hoff Kjeldsen

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, DK-4000 Roskilde.

En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering: udviklingshistorie og multipel opdagelse.

Ph.D.-afhandling af: Tinne Hoff Kjeldsen (2. udgave)

IMFUFA tekst nr. 372/1999 246 sider ISSN 0106-6242

I første del af afhandlingen præsenteres en samlet fremstilling og analyse af ikke-lineær programmerings fremkomst og etablering som matematisk forskningsområde. Der argumenteres for, at fremkomsten af dualitetssætningen i lineær programmering ændrede lineær programmerings videnskabelige status fra at være en matematisk model til løsning af et praktisk problem i det amerikanske luftvåben til at blive et matematisk, interessant forskningsområde. Der argumenteres endvidere for, at dette 'statusskift' i forening med finansiel støtte fra det amerikanske militær gennem *Office of Naval Research* var en afgørende faktor for Kuhns og Tuckers udvikling af ikke-lineær programmering. Derudover analyseres og diskuteres operationsanalysens -og militærets- betydning for etableringen af ikke-lineær programmering som matematisk disciplin. Den matematikhistoriske baggrund for fremkomsten af dualitetssætningen i lineær programmering undersøges, og i den forbindelse analyseres udviklingen i John von Neumanns forståelse af minimaxsætningen for to-personers nulsum spil og de skiftende sammenhænge, den dukker op i fra 1928 til 1944. Der indgår også en analyse af Émile Borels spilteoretiske arbejder.

I anden del af afhandlingen undersøges det multiple aspekt af Kuhn-Tuckers sætning i ikke-lineær programmering. Dette aspekt dukker op, fordi man i sekundærlitteraturen kan læse at Kuhn-Tuckers sætning tidligere var blevet udledt af Ostrogradsky og Farkas i slutningen af 1800-tallet samt i nyere tid af W. Karush i 1939 og F. John i 1948. I dag tilskrives Kuhn-Tuckers sætning til Karush og tildels også til John. De historiske kendsgerninger er, at Karushs arbejde aldrig blev publiceret, mens Johns først blev afvist af *Duke Mathematics Journal* for derefter at blive publiceret i 1948 i et festskrift. Mit formål med at inddrage et aspekt af multiple opdagelser var at forstå baggrunden for den historiske kendsgerning, at et matematisk resultat på et givet tidspunkt og i en given sammenhæng kan give anledning til et nyt matematisk forskningsområde; mens et tilsvarende resultat, der af samtidige fagfolk opfattes som samme resultat, udviklet på næsten samme tidspunkt men i en anden sammenhæng ikke udløste nogen reaktion. Min undersøgelse af Karushs, Johns og Kuhns og Tuckers arbejder, samt de kontekster de blev til i, munder ud i en konklusion om, at den faglige kontekst -og i visse tilfælde også den sociologiske kontekst- havde stor betydning for de forskellige resultaters status. Der peges på sådanne kontekstbetragtninger som analyseredskaber for matematikhistoriske undersøgelser.

# Forord

Tak til Jesper, Mette, Anne og Ida for fuld opbakning.

For faglige diskussioner og konstruktiv kritik undervejs og i den afsluttende skriveproces vil jeg gerne takke min vejleder Anders H. Madsen samt Kirsti Andersen, Craig G. Fraser, Jesper Lützen, Mogens Niss, Kurt M. Pedersen, Kurt Ramskov, Sam S. Schweber, Skuli Sigurdsson og Tine Wedege.

En speciel tak til to af afhandlingens 'hovedpersoner', William Karush og Harold W. Kuhn, for at stille upubliceret kildemateriale i form af matematiske skrifter, personlige breve og interviews til min rådighed.

Jeg tilbragte forårssemesteret 1998 som *Visiting Scholar* ved *Dibner Institute for the History of Science and Technology*, Cambridge, Massachusetts. I den anledning vil jeg gerne takke instituttets direktør Jed Z. Buchwald, samt Christian og Ottilia Brorsons Rejselegat for yngre videnskabsmænd og -kvinder for økonomisk støtte til studieopholdet.

Jeg vil også gerne takke Vip.'ere, Tap.'ere og studerende ved IMFUFA for nogle gode år. Stig Andur Pedersen takkes for at have inddraget mig i arbejdet med Netværk for Matematikkens Historie og Filosofi, finansieret af Statens Naturvidenskabelige Forskningsråd, samt for at give mig muligheden for at deltage aktivt i planlægning og afholdelse af videnskabelige møder. Carsten Lunde Petersen takkes for alle de gange, han har lagt øre til mine 'udredninger', og Jørgen Larsen takkes for alle de gange, han har hjulpet mig med Tex-programmet.

Jesper Tolnø har læst korrektur på afhandlingen, tak for det. Til sidst en tak til Joe og Babak for godt kontorfællesskab.

*Tinne Hoff Kjeldsen*
Januar 1999.

# Indhold


**1 Indledning** **1**
Personlig motivation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
Videnskabelig motivering . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
Problemformulering . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
Metodeovervejelser og afgrænsning . . . . . . . . . . . . . . . . 4
Nye bidrag til det matematikhistoriske forskningsfelt . . . . . . . . 6
Kilder . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
Afhandlingens struktur . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

**I Ikke-lineær programmering: en udviklingshistorie 13**

**2 Minimaxsætningen: den tidlige spilteoris matematiske kerne 15**
Matematisk baggrund . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
To-personers nulsum spil . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
Minimaxsætningen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
Émile Borel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18
Borels første note om spilteori . . . . . . . . . . . . . . . . . 19
Borels anden spilteoretiske note . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
Borels første gennemarbejdede skrift om spilteori . . . . . . . 25
Borel bliver i tvivl . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
Borels forhåbninger . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
John von Neumann . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29
*Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* . . . . . . . . . . . . . . 31
Von Neumanns 1928 bevis i relation til fixpunktssætninger og ulighedssystemer . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
Diskussion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47

**3 Minimaxsætningen i forskellige kontekster** **51**
Minimaxsætningen dukker op i matematisk økonomi . . . . . . . . 51
Von Neumanns økonomiske model . . . . . . . . . . . . . . . . 52

Løsning af ulighedssystemet . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
Forbindelsen til minimaxsætningen . . . . . . . . . . . . . . . 54
Diskussion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
Minimaxsætningen i konveks analyse . . . . . . . . . . . . . . . . 56
Jean Villes minimax bevis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
Von Neumann og Morgenstern . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
Prioritetsdiskussion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
Konklusion og vurdering . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66

**4 Den naturvidenskabelige mobilisering og ONR 69**
Den naturvidenskabelige mobilisering i USA under 2. verdenskrig . 70
Vannevar Bush . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
NDRC og OSRD. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
Mobilisering af matematikerne . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 73
Matematik i 2. verdenskrig . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75
Fredstidsforskning . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77
Office of Naval Research . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79

**5 Lineær programmering -fra problem til teori 83**
George B. Dantzig og *Airforce* programmer -et praktisk problem . . 84
Dantzigs første arbejde med lineær programmering . . . . . . . . . 85
En økonomisk-matematisk model . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
Løsningsmetoder? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88
Von Neumann drages ind i lineær programmering . . . . . . . . . 89
Et møde i Princeton . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 89
Von Neumanns note *Discussion of a Maximum Problem* . . . . 91
Von Neumann og dualitetssætningen . . . . . . . . . . . . . . . 94
Konklusion og vurdering . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95

**6 Ikke-lineær programmering -herkomst og videreudvikling 99**
Kuhn og Tucker -elev og mester . . . . . . . . . . . . . . . . . . 100
Tucker . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 100
Kuhn . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 101
Karriereskift . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 101
ONR's matematikprogram . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102
Tuckers program . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104
Den første konference om lineær programmering . . . . . . . . . . 105
Gales, Kuhns og Tuckers dualitets- og eksistenssætninger . . . 106
Ikke-lineær programmering . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114
Kuhns og Tuckers artikel: *Nonlinear Programming* . . . . . . 115
Konklusion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123

Udviklingen af dualitetsteori for ikke-lineær programmering . . . . 123
Fenchels dualitetssætning . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123
Den videre udvikling af dualitetsteorien for ikke-lineær programmering . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127

**7 Etablering af ikke-lineær programmering i sociologisk perspektiv 131**
Den operationsanalytiske kontekst . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131
Operationsanalyse kommer til USA . . . . . . . . . . . . . . . . 133
Operationsanalyse i efterkrigstiden . . . . . . . . . . . . . . . . 135
Matematik og operationsanalyse . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137
Operationsanalysens betydning for etableringen af matematisk programmering . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 142
Den endelige etablering af ikke-lineær programmering . . . . . . . . 143

**8 Konklusion og sammenfatning 145**
Vurdering af konklusionernes gyldighed og rækkevidde . . . . 151

**II Kuhn-Tuckers sætning: en multipel opdagelse? 155**

**9 Karushs sætning -et resultat i variationsregning 157**
Variationsregning på universitetet i Chicago . . . . . . . . . . . . . 158
'Chicagoskolen' . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 158
Karushs master's afhandling . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162
Motivation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 163
Matematikken . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165
Sammenligning med Kuhns og Tuckers resultat . . . . . . . . 170
Modtagelsen af Karushs arbejde . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 172
Hvem er så denne 'helgen'? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 175

**10 Johns sætning -et bidrag til konveksitetsteori 177**
Fritz John -en kort biografi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 177
Fritz Johns artikel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 179
Matematikken . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 179
Anvendelserne . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 184
Motivation og inspiration . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 187
Konklusion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 188

**11 Analytisk mekanik 191**
Det virtuelle arbejdes princip - et mekanisk ligevægtsprincip . . . . 192
Lagranges multiplikatorregel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 192

En mand -og hans ulighed . . . . . 194
Cournot . . . . . 195
Ostrogradsky . . . . . 196
Ostrogradskys artikel fra 1834 . . . . . 196
Farkas . . . . . 199
Farkas' Lemma . . . . . 200
Diskussion . . . . . 202

**12 Teorier for multiple opdagelser** **205**
Naturvidenskabssociologi . . . . . 206
Robert K. Merton . . . . . 207
Don Patinkin . . . . . 209
Susan E. Cozzens . . . . . 210
Kuhn-Tuckers sætning diskuteret i forhold til disse teorier for multiple opdagelser . . . . . 211
Konklusion . . . . . 214

**13 Konklusion** **215**
Kontekstens betydning . . . . . 215
Vurdering af konklusionens gyldighed og generaliserbarhed . . . . . 219

**Forkortelser** **221**

**Dansk resume** **223**

**Summary in English** **225**

**Litteratur** **227**

# Kapitel 1

# Indledning

## Personlig motivation

Min interesse for ikke-lineær programmering går tilbage til foråret 1994, hvor jeg fulgte et kursus i emnet[1].

Der var specielt tre forhold, der vakte min historiske interesse. Det ene er den omstændighed, at teoriens hovedsætning, *Kuhn-Tuckers sætning*, som Harold W. Kuhn og Albert W. Tucker beviste i 1950 i artiklen *Nonlinear Programming* [Kuhn og Tucker, 1950], var blevet bevist to gange tidligere: Første gang i 1939 i en *master's* afhandling af William Karush, som studerede ved *University of Chicago* [Karush, 1939], og anden gang i 1948 af Fritz John i en artikel, som blev afvist af *Duke Mathematics Journal*, men som senere blev publiceret i en samling af essays i forbindelse med Richard Courants 60 års fødselsdag [John, 1948]. Der var således tale om tre beviser for den samme sætning udledt inden for en periode på 11 år. De tre beviser blev modtaget vidt forskelligt: Karushs blev aldrig publiceret, Fritz Johns blev først afvist, og da det blev publiceret, udløste det ikke nogen reaktion, men blot 2 år senere opstod der med Kuhns og Tuckers bevis et nyt matematisk forskningsområde. I den forbindelse opstår der adskillige interessante matematikhistoriske spørgsmål: Hvorfor var det først tredje gang, at sætningen gav anledning til starten på en matematisk teori og et nyt matematisk forsk-

[1]Ved et ikke-lineært programmeringsproblem forstås følgende problem:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimer} & f(x) & \\ \text{under bibetingelserne} & g_i(x) & \leq 0 \quad \text{for } i = 1, \ldots, m \\ & x \in X, & \end{array}$$

hvor funktionerne $f$, $g_1, \ldots, g_m$ er funktioner defineret på $\mathbf{R}^n$, $X$ er en delmængde af $\mathbf{R}^n$, og $x$ er en n-dimensional vektor $(x_1, \ldots, x_n)$.

ningsområde? Eller, hvad der måske er mere interessant: Hvorfor opstod der overhovedet en selvstændig matematisk teori om ikke-lineær programmering? I hvilken grad var det det samme, der blev bevist i de tre tilfælde? Hvad var baggrunden for udviklingen af sætningen i de tre tilfælde?

Det andet, som vakte min historiske nysgerrighed, var spørgsmålet om Kuhns og Tuckers motivation, hvor kom dette 'ikke-lineære programmeringsproblem' fra? I følge Kuhn var det et ønske om at udvide dualitetssætningen for lineær programmering[2] til det kvadratiske tilfælde, der var baggrunden for det arbejde, der førte til udviklingen af Kuhn-Tuckers sætning i 1950 og dermed ikke-lineær programmering [Kuhn, 1991, s.92]. Hvor kom dualitetssætningen i lineær programmering fra? Og hvilken betydning fik den for fremkomsten af ikke-lineær programmering. Hvad var drivkræfterne og historien bag ikke-lineær programmerings fremkomst?

Den tredje omstændighed, som fangede min interesse, var at det amerikanske militær tilsyneladende havde haft indflydelse på teoriens opståen. Kuhns og Tuckers første arbejde med ikke-lineær programmering foregik inden for rammerne af et forskningsprojekt, der var støttet af *Office of Naval Research* (ONR). Hvilken form for indflydelse var der tale om? Var den på nogen måde afgørende for teoriens opståen?

## Videnskabelig motivering

En matematikhistorisk undersøgelse med udgangspunkt i ovenstående spørgsmål kan belyse spørgsmålet om, hvordan en given matematisk teori (i dette tilfælde ikke-lineær programmering) konkret historisk er opstået. Dertil kommer, at den vil være et bidrag til den nyere matematikhistorie, som er mangelfuldt beskrevet. Det 20. århundrede er et stort forskningsfelt i de øvrige naturvidenskabers historie som f.eks fysikhistorie og biologihistorie, men er stærkt underudviklet inden for matematikhistorien.

Derudover vil et sådan matematikhistorisk studium, også kunne kaste lys over hvilke mekanismer, der kan være styrende for fremkomsten af et nyt matematisk forskningsområde. Dertil kommer, at en sådan undersøgelse i dette

[2] Et lineært programmeringsproblem kan beskrives som et ikke-lineært programmeringsproblem, hvor både den funktion, der skal optimeres, samt de funktioner, der beskriver bibetingelserne, er lineære funktioner. Til et lineært programmeringsproblem kan man formulere et andet lineært programmeringsproblem ud fra de samme data. Dette problem kaldes det duale problem. Er det oprindelige problem, også kaldet det primale problem, et minimeringsproblem er det duale et maksimeringsproblem. Dualitetssætningen for lineær programmering siger: Hvis det primale (duale) problem har en endelig, optimal løsning så har det duale (primale) problem også en endelig, optimal løsning, og i så fald er de optimale værdier for det primale hhv. duale problem ens.

tilfælde vil kunne belyse matematikkens udvikling i samspil med indflydelse fra det omgivende samfund og dermed bidrage til en øget forståelse af, at matematik er indlejret i en offentlighed, der støtter matematisk aktivitet, samt være med til at afklare hvilken indflydelse dette kan have på matematikkens udvikling. Endelig vil en matematikhistorisk analyse og diskussion af de forskellige udgaver af Kuhn-Tuckers sætning bidrage til den del af videnskabsteorien, der behandler fænomenet multiple opdagelser[3]. Den kan give et perspektiv på disse teoriers anvendelighed på matematik, samt pege på yderligere eller andre aspekter, som det kan være nyttigt at betragte og diskutere multiple opdagelser i matematik udfra med henblik på at opnå en dybere forståelse af matematikkens udvikling.

# Problemformulering

Med baggrund i ovenstående personlige og videnskabelige motivering har jeg opstillet følgende mere konkrete problemstillinger, som har været styrende for det arbejde, der ligger til grund for denne afhandling:

**Problemstilling 1:**

> Hvad er den matematikhistoriske baggrund for dualitetsætningen i lineær programmering, og hvilken betydning havde den for udviklingen af ikke-lineær programmering?

En anden af afhandlingens centrale problemstillinger er *multipel opdagelses* aspektet. Ole I. Franksen skiver i sin artikel *Irreversibility by Inequality Constraints Part III: Towards Mathematical Programming* følgende om Kuhn-Tuckers sætning:

> ... *Cournot and Ostrogradsky* ... *created from Fouriers Inequality a theorem independently reestablished in 1950 by H. W. Kuhn and A. W. Tucker.* [Franksen, 1985III, s.338]

Tilsyneladende var Kuhn-Tuckers sætning således blevet bevist ikke blot de to gange af Karush hhv. Fritz John i nyere tid, men allerede i 1827 skulle Cournot have formuleret sætningen og i 1834 Ostrogradsky. Det førte til følgende problemstilling:

[3]Jeg har oversat den engelske betegnelse *multiple discoveries* med *multiple opdagelser.*

**Problemstilling 2:**

> I hvilken grad var det den samme sætning, som Cournot, Ostrogradsky, Karush, Fritz John samt Kuhn og Tucker havde udviklet? Hvorfor gav de tidligere fremstillinger af resultatet ikke anledning til et nyt matematisk forskningsområde? Hvorfor gav Kuhns og Tuckers resultat anledning til et nyt matematisk forskningsområde? Hvilke specielle omstændigheder var til stede i Kuhns og Tuckers tilfælde?

Den tredje problemstilling omhandler det faktum, at Kunhs og Tuckers arbejde med udviklingen af Kuhn-Tuckers sætning, og dermed ikke-lineær programmering, blev udført under kontrakt med *Office of Naval Research*, samt den kendsgerning, at lineær programmering udsprang af et forsøg på at løse et praktisk problem inden for det amerikanske luftvåben. Spørgsmålet lyder kort og godt:

**Problemstilling 3:**

> Hvilken rolle spillede militæret for, og hvilken indflydelse havde det på, fremkomsten af ikke-lineær programmering som matematisk forskningsområde.

Dertil kommer spørgsmålet:

**Problemstilling 4:**

> Hvad var drivkræfterne bag ikke-lineær programmerings fremkomst og etablering som matematisk forskningsområde?

## Metodeovervejelser og afgrænsning

Jeg har kaldt denne ph.d.-afhandling for *En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering: udviklingshistorie og multipel opdagelse.* Med denne titel vil jeg henlede opmærksomheden på flere forhold:

For det første, at jeg har bestræbt mig på at anvende en kontekstuel metode i min tilgang til problemstillingerne. Jeg har således forsøgt at analysere og fortolke materialet ud fra forskellige kontekster. Jeg skelner mellem to betydninger af ordet 'kontekst'. Den ene betegner den matematiske kontekst. Inden for den matematiske kontekst taler jeg om 'ren matematisk indhold' og 'den faglige kontekst'. Ved en sætnings 'rent matematiske indhold' forstår jeg en sætnings matematiske betydning betragtet isoleret fra den matematiske sammenhæng, den oprindeligt blev udviklet i. Når jeg taler om den faglige kontekst, eller den matematikfaglige kontekst refererer jeg til den betydning af ordet, der dækker over den matematiske sammenhæng en matematisk sætning optræder i. Den matematiske kontekst knytter sig således internt til fagområdet. Den anden betydning af ordet går på sammenhænge, der er eksterne i forhold til det matematiske fagområde, altså sammenhænge der ikke referer direkte til et specifikt matematisk område, disciplin eller teori. Det kan være samfundsmæssige sammenhænge, sociale og institutionelle, og det kan være sammenhænge med andre videnskabelige fagområder. Der er mange eksterne kontekster, og jeg har begrænset mig til at behandle aspekter af den militære indflydelse samt inddrage institutionelle forhold. Jeg vil således ikke komme ind på algoritmeudviklingens historie. Jeg vil heller ikke optrævle den økonomihistoriske side af sagen, ligesom jeg heller ikke vil behandle historien om teoriens anvendelser[4].

For det andet at afhandlingen falder i to dele. Den ene del har jeg givet overskriften 'udviklingshistorie', og heri er præsenteret en analyse, fortolkning og diskussion af historien bag ikke-lineær programmerings fremkomst og etablering som matematisk disciplin med de dele af de opstillede problemstillinger, der refererer hertil, som udgangspunkt og styringsredskab. I denne del af afhandlingen har sigtet således været at 'skrive matematikhistorie', og ikke at benytte eller teste en videnskabsteoretisk eller -sociologisk teori for matematikkens udvikling. I anden del af afhandlingen behandler jeg multipel opdagelses aspektet af Kuhn-Tuckers sætning. Inden jeg startede projektet, havde jeg forventet, at den historiske analyse af de forskellige beviser for (og formuleringer af) Kuhn-Tuckers sætning ville afsløre, at det historisk set slet ikke drejede sig om samme resultat, og at *multipel opdagelses* aspektet blot var et resultat af *wiggish* eller anakronistisk historieskrivning [Kragh, 1987, s.89]. Det vil sige en historieskrivning, hvor de historiske videnskabelige kilder analyseres ud fra den viden, man i dag besidder inden for området. Det viste sig dog, at det ikke forholdt sig helt så simpelt, hvilket førte til, at jeg diskuterede det multiple aspekt af sætningerne i forhold til 'ren matematisk indhold' og den matematikfaglige kontekst. I denne del inddrager jeg også forskellige videnskabssociologiske teorier for multiple opdagelser i naturvidenskaberne og diskuterer, i hvilken grad de kan være med til at belyse de rejste spørgsmål i problemstilling 2. I diskussionen inddrager jeg også i visse tilfælde sociologiske kontekster af lokal hhv. global karakter[5].

[4]Disse forhold har alle haft indflydelse på ikke-lineær programmerings historiske udvikling, og inddragelse af disse vil uden tvivl kaste nyt lys over ikke-lineær programmerings historie, men i et tre årigt ph.d. forløb har jeg ikke kunnet finde tid til at foretage grundige analyser af disse aspekter.

[5]De sociologiske konteksters betydning for et matematisk resultats betydning og ud-

# Nye bidrag til det matematikhistoriske forskningsfelt

Mit arbejde med første del af afhandlingen har givet anledning til følgende nye bidrag til det matematikhistoriske forskningsfelt:

> En samlet fremstilling og analyse af ikke-lineær programmerings fremkomst og etablering som matematisk forskningsområde. Herunder en analyse og diskussion af lineær programmerings overgang fra at være en løsningsmodel til et praktisk problem til at blive et matematisk interessant forskningsområde. Karakteriseringen af et sådan skift i lineær programmerings videnskabelige status samt analysen af betydningen heraf for ikke-lineær programmerings opståen er ikke tidligere hverken diskuteret eller antydet i litteraturen.
>
> Betydningen af det amerikanske militærs indflydelse, gennem *Office of Naval Research*'s matematikprogram, på udviklingen af ikke-lineær programmering som matematisk forskningsområde er ikke tidligere blevet analyseret og diskuteret i matematikhistorien. Det samme gør sig gældende for operationsanalysens rolle i etableringen af ikke-lineær programmering. Analyserne af ikke-lineær programmerings historie ud fra disse to vinkler repræsenterer nye bidrag til det 20. århundredes matematikhistorie.
>
> Det er velkendt, at Werner Fenchel udledte det første dualitetsbegreb for ikke-lineær programmering, men den historiske baggrund herfor er ikke tidligere blevet undersøgt. Min matematikhistoriske analyse og fremstilling af denne udvikling, samt diskussionen af betydningen af ONR's matematikprogram herfor, er derfor nyt i matematikkens historie.
>
> Min karakterisering af lineær programmerings skift i videnskabelig status udleder jeg som konsekvens af udviklingen af dualitetssætningen i lineær programmering. Min beskrivelse og analyse af historien bag denne dualitetssætning indeholder en matematikhistorisk analyse af John von Neumanns udvikling af minimaxsætningen i to-personers nulsum spil. Spilteoriens historie og dermed også von Neumanns bidrag har været genstand for en del interesse specielt inden for de sidste 10 år, men også tidligere bidrag

bredelse er ikke fuldstændigt behandlet. En fuldstændig behandling af disse forhold ligger uden for tidsrammerne i herværende ph.d. projekt.

> findes.[6] Af disse er Kuhn og Tucker de eneste, der behandler den tekniske side af von Neumanns bevis, men de giver ikke en historisk analyse af von Neumanns udvikling af minimaxsætningen. Min analyse af udviklingen i von Neumanns forståelse gennem tiden (fra 1928 til 1944) af de forskellige kontekster minimaxsætningen dukker op i viser, at von Neumanns erkendelse af minimaxsætningens sammenhæng med fixpunktssætninger og lineære ulighedssystemer i modsætning til det indtryk der ellers gives i sekundærlitteraturen, ikke var tilstede i hans første bevis fra 1928 men var en gradvis proces.

Mit arbejde med anden del af afhandlingen leder frem til en diskussion af den faglige konteksts betydning for et matematisk resultats anerkendelse og udbredelse. En sådan diskussion er jeg ikke stødt på i matematikhistorielitteraturen.[7]

# Kilder

Ikke-lineær programmerings historie er ikke fuldstændig fraværende i matematikhistorielitteraturen. Det vigtigste bidrag er et essay af Kuhn selv, hvori han fortæller om ikke-lineær programmerings historie baseret på erindringer men også på læsning af historiske kilder og korte brevvekslinger med Karush og John [Kuhn, 1976, 1991][8]. Kuhns essay indeholder nyttige historiske oplysninger og interessante personlige erindringer om kontakt mellem de involverede parter. I den forstand er dette essay selv et historisk dokument. Betragtet som matematikhistorie er det hovedsageligt en internalistisk fremstilling, og den indeholder ingen analyser og diskussioner. Kuhn har f.eks ingen overvejelser over betydningen af den militære indflydelse, han bemærker blot i en parentes, at arbejdet støttes af ONR. Han gør opmærksom på, at motivationen bag Karushs, Johns og Kuhns og Tuckers arbejder var forskellige, men der er ingen diskussion af forskellene mellem deres arbejder, og hvilken betydning det havde for den historiske udvikling. Han diskuterer

[6] Se [Kuhn og Tucker, 1958], [Heims, 1980], [Ingrao og Israel, 1990], [Mirowski, 1991, 1992], [Leonard, 1992, 1995], [Dell'Aglio, 1995].

[7] A. Rupert Hall berører problemfeltet i sine afsluttende kommentarer til Newton-Leibniz debatten i bogen *Philosophers at War* [Hall, 1980]. Skuli Sigurdsson forfølger Halls oplæg i en artikel fra 1992, hvori han argumenterer for, at ækvivalensen mellem Newtons og Leibnizs udviklinger af differentialregningen bryder sammen, når man erkender, at de forkellige formalismer, teorierne er formuleret i, peger frem mod forskellige retninger for videre forskning, og derfor frembringer forskellige former for viden [Sigurdsson, 1992, s.110].

[8] De to udgaver af essayet er næsten identiske.

heller ikke baggrunden for, at Kuhns og Tuckers arbejde kunne lancere et matematisk forskningsområde, mens de øvrige udledninger af Kuhn-Tuckers sætning ikke udløste nogen reaktion.

Bidrag til ikke-lineær programmerings forhistorie findes i artiklerne [Grattan-Guiness, 1970, 1994], [Prékopa, 1980], [Franksen, 1985III]. Prékopas og Franksens artikler giver nyttige historiske oplysninger og tekniske fremstillinger af historiske kilder af Fourier, Cournot, Ostrogradsky og Farkas. Der igennem beskriver de den matematiske sammenhæng mellem problemer i analytisk mekanik og en udvidelse af Lagranges multiplikatorregel. De fortolker disse problemstillinger som optimering under bibetingelser og udleder på baggrund heraf Kuhn-Tuckers sætning. Men der er ingen analyser af ikke-lineær programmerings fremkomst, etablering og udvikling. Grattan-Guiness' to artikler behandler hovedsageligt lineær programmering, men berører også kort ikke-lineær programmering. Han nævner de tidlige værker inden for analytisk mekanik samt Karushs og Johns arbejder, men der er ingen beskrivelser eller analyser, det har mest karakter af en opremsning af oplysninger. Han kommenterer for eksempel slet ikke den militære indflydelse. Der findes en (upubliceret) ph.d.-afhandling af Sonja Brentjes om lineær programmering[9]. Den behandler primært lineær programmerings forhistorie og hovedsageligt den russiske udvikling. Den berører også fremkomsten af dualitetssætningen, men der er ingen analyser af von Neumanns arbejder.

Afhandlingen bygger hovedsageligt på analyser af publiceret materiale i form af matematiske artikler, tidsskrifter, lærebøger og noter. Dertil kommer analyser af publicerede erindringer og interviews, samt sekundærlitteratur inden for videnskabshistorie og -teori. Der er inddraget upublicerede kilder i form af curriculum vitae for de vigtigste personer, Karushs brevkorrespondance og *master's* afhandling.[10] Dertil kommer et personligt interview med H. W. Kuhn, foretaget på *Princeton University* den 23. april 1998. Jeg har også benyttet upubliceret materiale fra Fenchel Arkivet, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet.

Mit arbejde med besvarelsen af de opstillede problemstillinger er præsenteret i denne ph.d.-afhandling. Udover at behandle de opstillede problemstillinger har jeg også haft et ønske om at fortælle en historie. Det indebærer, at der ind i mellem er beskrivelser, som er mere udførlige, end de ville være, hvis pointerne var præsenteres i artikelform. Der er korte biografier af de vigtigste personer, hvilket også begrundes i ønsket om at fortælle en sammenhængende historie. Flere steder er der forholdsvis lange beskrivelser og

[9]M. Niss har venligst stillet sit eksemplar af afhandlingen til min rådighed. S. Brentjes takkes for at have sendt mig kopier af noget af sit undersøgelsesmateriale.

[10]Kuhn og Karush takkes for at have stillet dette materiale til min rådighed.

diskussioner af nogle af de matematiske kilder, hvilket skyldes, at de fleste af mine konklusioner bygger på analyser af disse. Derudover fungerer de også som 'historie-fremstillinger', idet jeg henvender mig både til matematikere og videnskabshistorikere, og især matematikere kan have en interesse i at se, hvordan deres forgængere oprindeligt greb de matematiske problemstillinger an. Med samme begrundelse har jeg været 'kildetro' med hensyn til matematisk notation, idet jeg ikke har uniformiseret den matematiske notation mellem de forskellige kilder.

# Afhandlingens struktur

## Del I: kapitel 2 - kapitel 8

I første del af afhandlingen undersøges den historiske baggrund for fremkomsten af dualitetssætningen i lineær programmering, dens betydning for fremkomsten af ikke-lineær programmering, samt udviklingen af ikke-lineær programmering og dens etablering som matematisk disciplin.

Kapitel 2 og kapitel 3 behandler den matematikhistoriske udvikling af minimaxsætningen i to-personers nulsumspil, og de forskellige faglige kontekster sætningen dukker op i. Jeg har lagt hovedvægten på von Neumanns bearbejdelse af minimaxsætningen, og analyserer udviklingen i hans forståelse gennem tiden (fra 1928 til 1944) af de mange aspekter af minimaxsætningen og dens sammenhæng med forskellige fagområder inden for 'ren' matematik samt anvendelsesområdet matematisk økonomi. I kapitel 2 er der også en analyse af Émile Borels arbejder fra 1920'erne med minimaxsætningen i to-personers nulsum spil. Hans arbejde havde ingen direkte indflydelse på fremkomsten af dualitetssætningen i lineær programmering og kunne derfor sagtens udelades. Grunden til, at det alligevel er med i afhandlingen, er, at der i 1953 opstod en kort prioritetsdebat mellem von Neumann og den franske matematiker Fréchet, på vegne af Borel, om, hvem der skulle tildeles 'æren' for udviklingen af spilteori. Prioritetsspørgsmålet i sig selv er ikke særlig interessant, men de argumenter, der blev benyttet, er til gengæld meget interessante. Diskussionen heraf berører spørgsmålet om den faglige konteksts betydning for, hvilken form for ny forskning en matematisk sætning kan pege frem imod. Dette knytter an til diskussionen om 'ren matematisk indhold' i forhold til indholdet belyst ud fra en matematikfaglig kontekst, som jeg beskæftiger mig med i anden del af afhandlingen. Analysen af Borels tekster er således beskrevet i afhandlingen, fordi min diskussion af prioritetsdebatten i forhold til Borel og von Neumann illustrerer nogle af de ideer, der ligger til grund for min konklusion på anden del af afhandlingen. Denne udvikling er behandlet som matematikhistorie med vægt på idéudvikling af matematiske begreber og sætninger, og mit materiale her er hovedsagelig kilder i form af publicerede matematiske artikler.

I kapitel 4 og kapitel 5 behandles historien bag lineær programmerings fremkomst i USA efter 2. verdenskrig. Her spillede den amerikanske mobilisering af naturvidenskabsfolk under 2. verdenskrig samt den efterfølgende finansiering af forskning fra offentlige -hovedsagelig militære - instanser en afgørende rolle. Så, hvor kapitel 2 og kapitel 3 er matematikhistorie med vægt på idéudvikling af matematiske begreber og sætninger, er kapitel 4 og kapitel 5 en analyse af, hvordan mekanismer i det omgivende samfund fungerede som styringsredskab og drivkraft for forskningen. I kapitel 4 beskrives 'fusionen' mellem militæret, industrien og universiteterne under 2. verdenskrig samt den efterfølgende organisering af forskning med offentlig - og det vil i dette tilfælde sige militær - finansiering efter krigen. Specielt har jeg lagt vægt på oprettelsen af *Office of Naval Research* (ONR), som blev etableret i den amerikanske flåde kort efter krigens afslutning, fordi det var ONR, der tog initiativet til at oprette det projekt, som Tuckers og Kuhns arbejde med ikke-lineær programmering blev udført under. Efter krigen blev George B. Dantzig ansat i luftvåbnet til at forske i løsningen af et konkret, logistisk problem. Dette førte i et samspil mellem økonomisk teori og matematisk modellering til udviklingen af lineær programmering. I første halvdel af kapitel 5 behandles Dantzigs udvikling af lineær programmering i luftvåbnet efter krigen. Minimaxsætningen og lineær programmering blev forbundet med hinanden ved et møde mellem Dantzig og John von Neumann i Princeton i 1947. I anden halvdel af kapitel 5 beskrives og analyseres denne historie med henblik på de konsekvenser, det fik for lineær programmerings videnskabelige status.

*Office of Naval Research* oprettede og finansierede et forskningsprojekt, der havde til opgave at undersøge forbindelsen mellem lineær programmering og spilteori samt forske i den underliggende matematiske struktur. Tucker blev leder af dette projekt. I kapitel 6 fortælles historien bag Tuckers og Kuhns involvering i foretagendet, og deres første arbejde med lineær programmering og spilteori analyseres. I sidste halvdel af kapitel 6 analyseres Kuhns og Tuckers artikel om ikke-lineær programmering, som var det arbejde, der lancerede teorien. Kapitlet afsluttes med en beskrivelse af den matematiske teoriudvikling for ikke-lineær programmering efter Kuhns og Tuckers arbejde.

I kapitel 7 diskuteres ikke-lineær programmerings etablering som matematisk disciplin i et sociologisk perspektiv. Operationsanalysens betydning for etableringen af ikke-lineær programmering analyseres, og den endelige etablering af feltet beskrives via fremkomsten af lærebøger, symposier og oprettelsen af *The Mathematical Programming Society.* Kapitel 8 er konklusionen på første del af afhandlingen.

## Del II: kapitel 9 - kapitel 13

Anden del af afhandlingen har *multipel opdagelses* aspektet som hovedproblemstilling. I kapitel 9 og kapitel 10 leveres en matematikhistorisk analyse af hhv. William Karushs og Fritz Johns arbejder, idet der lægges vægt dels på den matematiske idéudvikling, dels på hvilken kontekst de forskellige arbejder blev til i. Her dækker begrebet kontekst både over interne, matematiske kontekster og mere eksterne, institutionelle kontekster. I kapitel 11 forholder jeg mig til ikke-lineær programmerings forhistorie, idet jeg diskuterer resultaterne i sekundærlitteraturen i forhold til mine egne analyser. I kapitel 12 diskuterer jeg de forskellige beviser for Kuhn-Tuckers sætning ud fra videnskabssociologiske teorier for multiple opdagelser i naturvidenskab. I kapitel 13 konkluderes der på anden del af afhandlingen.

# Del I

# Ikke-lineær programmering: en udviklingshistorie

# Kapitel 2

# Minimaxsætningen: den tidlige spilteoris matematiske kerne

Formålet med kapitel 2 og 3 er at følge det første af to uafhængige spor, som, ved John von Neumanns sammenkobling i 1947, banede vejen for opdagelsen af dualitetssætningen i lineær programmering.

Det drejer sig om den matematikhistoriske udvikling af minimaxsætningen i to-personers nulsum spil og de forskellige faglige kontekster, sætningen dukkede op i. Hovedvægten er lagt på von Neumanns bearbejdelse af minimaxsætningen, idet jeg analyserer udviklingen i hans forståelse af de forskellige aspekter af minimaxsætningen og dens sammenhæng med forskellige fagområder inden for 'ren' matematik og matematisk økonomi. Denne fremstilling beskriver, hvordan von Neumanns forståelse af minimaxsætningen udvikledes og modnedes fra hans første bevis i 1928 til 1944, hvor beviset optrådte i en noget anderledes form i von Neumanns og Morgensterns spilteoretiske klassiker *Theory of Games and Economic Behavior* [von Neumann og Morgenstern, 1944]. Denne udvikling af de matematiske ideer bag minimaxsætningen var afgørende for von Neumanns erkendelse i 1947 af sammenhængen mellem to-personers nulsum spil og lineær programmering.

Kapitlet starter med en kort introduktion til to-personers nulsum spil og minimaxsætningen.

Derefter følger en analyse af Émile Borels spilteoretiske arbejder fra 1920'erne. Til sidst kommer en gennemgang af von Neumanns første bevis for minimaxsætningen i 1928 efterfulgt af en matematikhistorisk fortolkning af von Neumanns forståelse af minimaxsætningen og dens relation til uligheder og fixpunktssætninger i 1928, diskuteret i forhold til de fortolkninger, der ellers er kommet til udtryk i sekundærlitteraturen[1].

[1] I løbet af 1990'erne er der udkommet et par matematikhistoriske analyser af Borels

# Matematisk baggrund

Spilteori handler om at give en matematisk model for spil, der involverer et strategibegreb. Det vil sige, at der er tale om spil, hvis udfald ikke udelukkende afhænger af held, men også kan påvirkes af strategiske overvejelser og af spillernes dygtighed. Af hensyn til de læsere, der ikke kender noget til spilteori, vil jeg give en kort ahistorisk redegørelse for, hvad der menes med begreberne to-personers nulsum spil og minimaxsætningen.

## To-personers nulsum spil

Ved et to-personers nulsum spil forstås et spil med to deltagere, hvor det beløb, den ene spiller vinder, er lig med det beløb, den anden spiller taber. Summen af de to spilleres gevinster er altså nul.

Man skal forestille sig to spillere $A$ og $B$, som spiller et spil, hvori $A$ har $m$ strategier til sin rådighed, og $B$ har $n$. Ved en strategi for spiller $A$ forstås en fuldstændig plan for, hvilke træk spiller $A$ vil foretage for enhver tænkelig situation, der måtte opstå i løbet af spillet, hvad enten den opstår tilfældigt, for eksemple ved lodtrækning, eller ved et træk foretaget af spiller $B$. En strategi er således en plan, der, ved fastlæggelse af spiller $A$'s $i$'te træk, tager højde for alt, hvad der er foregået indtil da. Hver spiller vælger sin strategi uden at kende noget til modstanderens valg af strategi. Hvis $A$ vælger sin $i$'te strategi, og $B$ vælger sin $j$'te, skal $B$ betale et beløb, $g(i,j) \in \mathbf{R}$ bestemt af spillets regler, til $A$. $A$ skal da betale beløbet $-g(i,j)$ til $B$. Man kan så opstille spillets *udbytte* matrix $G$, hvis $(i,j)$'te indgang er $g(i,j)$. Det antages, at spillerne udelukkende bekymrer sig om at maksimere deres forventede gevinst.

Omvendt kan enhver matrix $G$ fortolkes som *udbytte* matrix for et spil, hvor spiller $A$ agerer ved at vælge en af rækkerne i $G$, mens spiller $B$ agerer ved at vælge en søjle. De enkelte elementer $g_{ij}$ repræsenterer da udbetalingen til $A$, hvis $i$'te række og $j$'te søjle vælges. Et sådant spil kaldes et *to-personers nulsum spil* eller et *matrixspil.*

## Minimaxsætningen

Antag nu at spiller $B$ blev tvunget til at fortælle spiller $A$, hvilken strategi han vil benytte, og antag $B$ vil vælge strategien $y' \in \{1, \dots, n\}$. Spiller $A$ vil

og von Neumanns bidrag til udviklingen af to-personers nulsum spil og minimaxsætningen [Dimand og Dimand, 1992], [Mirowski, 1991, 1992], [Leonard, 1992, 1995] og [Dell'Aglio, 1995], men ingen af dem behandler den tekniske side af von Neumanns første bevis for minimaxsætningen.

forsøge at maksimere sin gevinst og må derfor antages at vælge sin strategi $x' \in \{1, \dots, m\}$, således at

$$g(x', y') = \max_x g(x, y').$$

Idet $g$ er defineret på en endelig mængde findes et sådan maksimumspunkt $x'$, hvor $\max_x g(x, y')$ antages.

Det bedste, spiller $B$ kan gøre i denne situation, vil være at vælge $y'$ således at

$$\max_x g(x, y') = \min_y \max_x g(x, y) = \overline{v}.$$

$\overline{v}$ kan fortolkes som den største gevinst, $A$ kan garantere sig selv, hvis $B$ spiller $y'$.

Omvendt, hvis $A$ tvinges til at afsløre sin strategi $x'$, vil $B$ vælge $y'$, således at

$$g(x', y') = \min_y g(x', y).$$

$A$ kan da bedst beskytte sig ved at vælge $x'$, således at

$$\min_y g(x', y) = \max_x \min_y g(x, y) = \underline{v}.$$

Her kan $\underline{v}$ fortolkes, som den største gevinst $A$ kan garantere sig selv uafhængigt af $B$'s valg af strategi.

Det kan let vises, at der gælder, at

$$\max_x \min_y g(x, y) \leq \min_y \max_x g(x, y).$$

I stedet for at lade $A$ og $B$ vælge en strategi blandt deres mulige strategier kan man lade dem specificere, med hvilken sandsynlighed de vil vælge de forskellige strategier. I så fald siger man, at de vælger en *blandet* strategi. Lad $\xi_i$ betegne sandsynligheden for, at spiller $A$ vælger strategi $i$, og lad $\eta_j$ være sandsynligheden for, at $B$ vælger strategi $j$:

$$A: \qquad \xi_1, \dots, \xi_m, \quad \xi_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1$$

$$B: \qquad \eta_1, \dots, \eta_n, \quad \eta_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1.$$

Vælger $A$ nu den blandede strategi $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, og vælger $B$ den blandede strategi $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, så er spillets forventede værdi for $A$ lig med

$$h(\xi, \eta) = \sum \sum g(i, j) \xi_i \eta_j,$$

og den forventede værdi for $B$ vil være $-h(\xi, \eta)$.

Ved at gå over til at betragte blandede strategier opnås, at spillernes forventede værdier udtrykkes ved hjælp af en bilinear form, $h$, og for sådanne kan man vise, at der altid gælder, at der findes $\xi_0$, $\eta_0$ således at

$$h(\xi_0, \eta_0) = \max_\xi \min_\eta h(\xi, \eta) = \min_\eta \max_\xi h(\xi, \eta) \quad (= M).$$

Dette resultat kaldes *minimaxsætningen*. $M$ kaldes *spillets værdi*, og $\xi_0$, $\eta_0$ kaldes for *optimale strategier.*[2]

## Émile Borel

Den franske matematiker Émile Félix-Édouard-Justin Borel (1871-1956) var den første, der forsøgte at opbygge en matematisk teori for spil. Før Borels arbejde finder man kun spredte eksempler udført på specifikke spil. Det første, man kender til, stammer fra James Waldegrave (1684-1741), der analyserede kortspillet *le Her* [Dimand og Dimand, 1992, s.15-17]. Waldegraves arbejde forblev stort set ubemærket, og Borel kendte ifølge [Dimand og Dimand, 1992, s.18] intet til det, men det fremgår af ét af Borels spilteoretiske arbejder, at han kendte til en analyse fra 1899 af spillet baccarat foretaget af Joseph Bertrand (1822-1900) [Borel, 1924, s.204]. Ernst Zermelo (1871-1953) skrev i 1913 en artikel om skak [Zermelo, 1913], men Borel kendte tilsyneladende ikke Zermelos arbejde [Dimand og Dimand, 1992, s.18].

Borel er som matematiker bedst kendt for sit arbejde inden for målteori, sandsynlighedsregning og funktionsteori. Fra 1909 og frem til efter 1. verdenskrig var han ansat ved Sorbonne universitetet i Paris som professor i funktionsteori, hvorefter han overgik til en stilling som professor i sandsynlighedsregning og matematisk fysik, et skift fra såkaldt ren matematik til anvendt matematik, der også afspejler en udvikling, man kan følge i hans arbejder i perioden 1906 til 1920 [May, 1970, s.302-304].

De fleste af sine nye og originale ideer havde Borel udviklet før 1. verdenskrig, og hans publikationer derefter er hovedsagelig videreudviklinger og anvendelser af tidligere ideer samt løsning af mindre problemer [May, 1970, s.304]. Dette er dog ikke tilfældet med hans arbejde inden for spilteori, som først blev påbegyndt i 1921. Hans første publicerede arbejde om spilteori er noten *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique*, som blev trykt i *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* i 1921 [Borel, 1921]. To år senere blev den efterfulgt af noten *Sur les jeux où le hasard se combine avec l'habileté des joueurs* [Borel, 1923], og året efter indgik

[2]Se for eksempel [Karlin, 1987], [Goldman og Tucker, 1956].

spilteori som et kapitel i Borels store værk om sandsynlighedsregning [Borel, 1924]. I 1926-27 publicerede han yderligere tre noter om spilteori i *Comptes Rendus*, men derefter gik der 10 år, før Borel igen skrev om spilteori, denne gang til bogen *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* fra 1938 [Borel, 1938a].

Men hvor kom så denne spilteori fra? Hvordan fik Borel ideen til at matematisere spil? Mens det samme spørgsmål stillet i forhold til von Neumann har givet anledning til en del diskussioner og spekulationer[3], giver Borels spilteoretiske arbejder ikke anledning til en tilsvarende undren. Der er ingen tvivl om, at Borels engagement i den spilteoretiske problemstilling har rod i hans arbejde med sandsynlighedsregning. På det tidspunkt, da Borels første note om spilteori udkom, havde han beskæftiget sig meget med sandsynlighedsregningsteori og i den forbindelse også med hasardspil. Dertil kommer, at han inkluderede spilteori i sit store værk om sandsynlighedsregning og dens anvendelser, hvilket jeg ser som et udtryk for, at Borel opfattede spilteori - om ikke ligefrem som sandsynlighedsregning- så i al fald som en anvendelse heraf. Jeg ser derfor Borels arbejde med spilteori eller, som han selv kaldte det, spil *hvori spillernes evner indgår*, som en naturlig fortsættelse af hans sandsynlighedsregningsarbejde. Et synspunkt som yderligere underbygges af, at indfaldsvinklen i hans første spilteoretiske arbejde fra 1921 er holdt i en sandsynlighedsregnings kontekst, hvilket vil fremgå af nedenstående diskussion af 1921-noten.

## Borels første note om spilteori

Borel indskrænkede sig til at betragte spil med kun to deltagere. Han valgte at se på spil, som er symmetriske i den forstand, at hvis to spillere $A$ og $B$ vælger samme metode, vil deres chancer for at vinde være lige store. Med en metode, '*méthode de jeu*', mente Borel det samme, som det vi i dag kalder for en ren strategi:

> *c'est un code qui, dans toutes les circonstances possibles (supposées en nombre fini), fixe exactement ce que le joueur doit faire.* [Borel, 1921, s.1304]

Borel ønskede at undersøge, om det kunne lade sig gøre at bestemme en '*méthode de jeu meilleure*', altså om man kan finde en måde at spille på, som er bedre end alle andre.

Hans analyse af den ovenfor skitserede situation, hvor der er to spillere $A$ og $B$ samt endelig mange strategier, har baggrund i sandsynlighedsregning.

[3] Se [Mirowski, 1991, 1992] og [Leonard, 1992].

Hans udgangspunkt var, at hvis $A$ vælger strategi $C_i$, og $B$ vælger strategi $C_k$, kan man udregne sandsynligheden $a$ for, at $A$ vinder. Sandsynligheden for at $B$ vinder, vil da være $b = 1 - a$. Borel præciserede ikke nærmere, hvordan disse sandsynligheder kunne beregnes men pointerede blot, at det kunne gøres ved at betjene sig af sandsynlighedsregningen.

For at markere disse sandsynligheders afhængighed af de valgte strategier $C_i$ og $C_k$ satte Borel

$$a = {}^1/_2 + \alpha_{ik},$$

$$b = {}^1/_2 + \alpha_{ki},$$

hvor $\alpha_{ik}$ og $\alpha_{ki}$ ligger mellem $-{}^1/_2$ og $+{}^1/_2$ og opfylder relationen

$$\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0.$$

Idet han antog, at spillet er symmetrisk, har $A$ og $B$ lige store chancer for at vinde, hvis de vælger at spille efter samme strategi, og derfor satte han

$$\alpha_{ii} = 0.$$

Borels næste skridt var at udelukke alle '*manières de jouer mauvaises*' altså alle dårlige måder at spille på, idet han karakteriserede en metode $C_i$ som dårlig, hvis $\alpha_{ih} \leq 0$ for alle $h$. I sådan et tilfælde vil der jo gælde, at hvis $A$ vælger metode $C_i$, så vil, uanset hvilken metode $B$ vælger, $A$'s chance for at vinde være mindre end eller lig med en halv. Efter at have udelukket sådanne dårlige metoder kan der være fremkommet nye dårlige metoder, nemlig de $C_j$ for hvilke $\alpha_{jk}$ er negativ eller 0 for alle metoder $C_k$, der ikke allerede er frasorteret som dårlige. Disse metoder udelukkede Borel også. Til sidst endte han med udelukkende at have metoder $C_h$, for hvilke $\alpha_{hk}$ er positiv for mindst én værdi af $k$.

Borel konkluderede da, at

> *s'il existait une manière de jouer $C_h$ telle que $\alpha_{hk}$ soit toujours positif ou nul, cette manière de jouer serait la meilleure.* [Borel, 1921, s.1305]

Han gav ikke en præcis definition af '*den bedste spillemåde*', og det er i denne første artikel lidt uklart, hvad han egentlig mente. Af Borels analyse kan man dog se, at han var tilfreds med en metode, der sikrede, at man ikke kom i taberposition, det vil sige en metode, for hvilken sandsynligheden for at vinde var mindst ${}^1/_2$. Det kan umiddelbart forekomme underligt, som Robert

J. Leonard har bemærket [Leonard, 1992, s.34], at Borel udelukkede metoder, der giver sandsynlighed $^1/_2$ for at vinde, som dårlige, mens han blandt de ikke-dårlige metoder søgte en, der kunne sikre, at sandsynligheden for at vinde blev mindst $^1/_2$. Det sidste kan måske forklares med, at de spil, Borel tænkte på, var forudsat symmetriske. Dermed findes der ingen metode $C_m$, som med garanti vil give spiller $A$ en sandsynlighed på over $^1/_2$ for at vinde, thi spiller $B$ ville da ved at vælge samme metode også sikre sig en sandsynlighed på over $^1/_2$ for at vinde, hvilket er absurd. Men det forklarer ikke, hvorfor Borel inkluderede metoder $C_i$, for hvilke $\alpha_{ih} = 0$ for alle $h$, i mængden af dårlige metoder, men senere i artiklen regner Borel på det tilfælde, hvor spillerne har tre strategier tilbage efter frasorteringen af de dårlige, og i disse udregninger benytter han, at han ved, at $\alpha_{hk}$ er positiv for mindst én værdi af $k$. Der er således en 'regne-teknisk' grund til at Borel udelukkede disse metoder.

## Blandet strategi

Er man i den situation, at der ikke foreligger en sådan '*bedste*' måde at spille på, foreslog Borel, at man måske kunne benytte sig af det, vi i dag kalder for en blandet strategi:

> *Dans le cas où cette meilleure manière n'existe pas, on peut se demander s'il n'est pas possible, à défaut d'un code choisi une fois pour toutes, de jouer d'une manière avantageuse en variant son jeu.* [Borel, 1921, s.1305]

For at kunne give en præcis matematisk formulering af denne 'variering' af spillet, således at kun karakteristika fra selve spillet indgår og ikke eventuelle psykologiske observationer om modparten, beskrev Borel 'varieringen' ved hjælp af sandsynligheder. Han lod $p_k$ betegne sandsynligheden for, at spiller $A$ på et givet tidspunkt i spillet vælger koden $C_k$. Den tilsvarende sandsynlighed for $B$ kaldte han $q_k$. Er $n$ antallet af metoder, der er tilbage (efter at de dårlige er luget ud), har man

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} q_k = 1. \tag{2.1}$$

Sandsynligheden for, at $A$ vinder, bliver da lig med

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (^1/_2 + \alpha_{ik}) p_i q_k, \tag{2.2}$$

hvilket er lig med $1/2 + \alpha$, hvor

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} p_i q_k. \tag{2.3}$$

## Tilfældet $n = 3$

Ovenstående er udelukkende en slags analyse af problemstillingen, nemlig at finde en '*méthode de jeu meilleure*'. Der er endnu ikke fremlagt noget bevis for eksistensen af en sådan. For at få en fornemmelse herfor behandlede Borel tilfældet, hvor der kun er 3 'gode' strategier tilbage. Han gjorde rede for, at man altid kan finde positive tal $p_1$, $p_2$, $p_3$, som opfylder (2.1), og således at $\alpha$ i (2.3) er nul, ligegyldigt hvad $q_1$, $q_2$, $q_3$ er. Dette kan bevises rent algebraisk, idet eksistensen af $p_1$, $p_2$, $p_3$ kommer ud på eksistensen af en løsning til et homogent lineært ligningssystem med tre ligninger og tre ubekendte, hvis koefficientmatrix, som er skævsymmetrisk med 0'er i diagonalen, har determinant 0. Borel kunne således konkludere at:

> *Il est donc possible d'adopter une manière de jouer permettant de lutter avec des chances égales contre tout joueur.* [Borel, 1921, s.1306]

Robert W. Dimand og Mary Ann Dimand skriver i deres artikel *The Early History of the Theory of Strategic Games from Waldegrave to Borel* at denne

> *solution of the choice of a mixed strategy when only three pure strategies are left after elimination of bad strategies is a minimax solution.* [Dimand og Dimand, 1992, s.20]

For den konstruktion, som Borel har valgt, nemlig et to-personers nulsum symmetrisk spil, kan sandsynlighederne $\alpha_{ij}$ fortolkes som 'udbetaling', og at maximere $\alpha$ kommer da ud på at maximere sin forventede udbetaling. Værdien af et sådant spil er 0, hvilket vil sige, at man spiller lige op. Borel har gjort rede for, at dette altid kan lade sig gøre i den slags spil, hvor der er 3 gode metoder, ved eventuelt at vælge en blandet strategi. Men Borel talte ikke på noget tidspunkt i 1921-noten om, at $A$ skal maksimere sin sandsynlighed for at vinde, kun at $A$ skal forsøge at vælge en spillemetode, som sikrer, at $A$ ikke taber. At spiller $B$ maksimerer sin egen sandsynlighed for at vinde ved at minimere $A$'s sandsynlighed for at vinde er der ingen overvejelser om overhovedet. Borel diskuterede i 1921 ikke eksplicit sammenhængen mellem spiller $A$'s og spiller $B$'s modsatrettede interesser. Det ligger naturligvis i symmetrien, men der er, så vidt jeg kan se, ikke noget, der kan minde om minimax overvejelser i dette første spilteoretiske arbejde af Borel.

### Tilfældet $n > 3$

For $n > 3$ påstod Borel:

> *Mais il est aisé de voir que, dès que n dépasse* 3*, cette circonstance ne se présentera que pour des valeurs trés particulières des* $\alpha_{ik}$*; en général, quels que soient les p, il sera possible dans* (5) [(2.3)] *de choisir les q de manière que* $\alpha$ *ait un signe fixé d'avance. Lorsqu'il en est ainsi, quelle que soit la variété introduite par A dans son jeu, du moment que cette variété est définie, il suffit que B la connaisse pour qu'il puisse varier son jeu de manière à avoir un avantage sur A; la réciproque est également vraie; nous devons en conclure que le calcul des probabilités ne peut servir qu'á permettre l'élimination des manières de jouer mauvaises et le calcul des* $\alpha_{ik}$*; pour le surplus, l'art du jeu dépend de la psychologie et non des mathématiques.* [Borel, 1921, s.1306]

Borel gav ikke nogen nærmere forklaring på sin konklusion om, at der for spil med mere end 3 ikke-dårlige metoder i almindelighed ikke findes nogen blandet strategi $p_1$, $p_2$, $p_3$, som kan sikre, at $\alpha = 0$, ligegyldigt hvad $q_1$, $q_2$, $q_3$ er, det var blot '*let at se*'. Her kommer Borel i konflikt med minimaxsætningen, som von Neumann viste 7 år senere. Den siger nemlig, at for den slags spil, som Borel analyserede, altså to-personers nulsum spil med værdi 0, kan man for vilkårligt $n$ finde en blandet strategi $p = (p_1, ..., p_n)$, således at $\alpha$ i (2.3) er 0, ligegyldigt hvad $q = (q_1, ..., q_n)$ er.

## Borels anden spilteoretiske note

To år senere publicerede Borel endnu en note om spilteori i *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* [Borel, 1923]. Her formulerede han sin påstand -eller hypotese- fra 1921-noten som et åbent spørgsmål, han gerne ville have svar på i det generelle tilfælde. Han udtrykte problemet rent analytisk på følgende noget knudrede facon:

> *Étant donné un entier n, déterminer*
>
> $$\frac{n(n-1)}{2}$$
>
> *constantes* $\alpha_{ik}$ $(i = 1, 2, ..., n;\ k = 1, 2, ..., i-1)$ *telles que, si l'on pose*
>
> $$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik}(x_i y_k - x_k y_i)$$

> *il ne soit pas possible de déterminer des valeurs positives ou nulles, mais non toutes nulles, des variables $y_1, y_2, ..., y_n$ ayant la propriété suivante: les $\alpha$ et les $y$ étant ainsi choisis, la fonction $f(x, y)$ ne peut pas prendre de valeurs négatives pour des valeurs positives des variables $x_1, x_2, ..., x_n$, quelle que soit la manière dont sont choisies ces valeurs positives. Cette détermination des $\alpha_{ik}$ est-elle possible?* [Borel, 1923, s.1117]

Hvad er det egentlig for et problem, Borel gerne vil have løst? Det er præcis det samme, som han løste for $n = 3$ i 1921-noten, hvor han viste, at ligegyldigt hvilke $\alpha_{ik}$-er man betragter, kan man altid finde $p_1$, $p_2$, $p_3$, så $\alpha = 0$ ($f(x, y) = 0$), ligegyldigt hvad $q$'erne er. For $n = 3$ er svaret således benægtende og fortæller, at spiller $A$ altid kan vælge en metode at spille på (dvs. vælge $p_1$, $p_2$, $p_3$), således at $A$ er sikret en sandsynlighed på mindst $1/2$ for at vinde, uanset hvilken metode spiller $B$ vælger. Borel hævdede i denne note [Borel, 1923, s.1117], at han i 1921-noten viste, at svaret er negativt for $n = 5$. [4] Det fremgår yderligere, at en vis M. Robert Deltheil har regnet på problemet, og hans resultater har fået Borel til at tro, at svaret også er negativt for $n = 7$. Men i bund og grund var Borel stadig overbevist om (og dermed stadig i konflikt med den senere minimaxsætning), at spørgsmålet ikke generelt skulle besvares med et nej:

> *Il me semble cependant à peu près certain que la résponse doit devenir affirmative lorsque n est suffisamment grand.* [Borel, 1923, s.1117]

Borel efterlyste dels et stringent bevis for sin formodning og dels mindst ét system af værdier $\alpha_{ik}$, som opfylder betingelsen for et $n$ så lille som muligt. Her ses i øvrigt et eksempel på Borels syn på matematisk metode, som Kenneth O. May har givet følgende karakteristik af:

> *... his* [Borels] *research methods belong rather to the nineteenth century. He abjured generalizations except when it was forced on him. He was motivated by specific problems and applications. He disliked formalism ("pure symbolism turning about itself"), logicism, and intuitionism (both too removed from the physical reality that he thought should guide mathematics).* [May, 1970, s.304]

Borel var ikke tilfreds med et rent eksistensbevis for sin formodning, han forlangte også et konkret eksempel på et sådan system af værdier $\alpha_{ik}$.

[4] Faktisk viste han det, som vi har set, kun for $n = 3$; At han selv skrev $n = 5$ er nok fordi, han viste det for $n = 5$ i det spilteoretiske kapitel, der er inkluderet i hans sandsynlighedsregningsbog, som blev publiceret i 1924, og han skelnede tilsyneladende ikke mellem disse to skrifter.

## Borels første gennemarbejdede skrift om spilteori

Borels første gennemarbejdede skrift om spilteori er kapitlet *Sur les jeux ou interviennent le hasard et l'habilite des joueurs*, der indgår i hans bog om sandsynlighedsregning fra 1924 [Borel, 1924]. I forhold til 1921-noten er der sket en hel del, ikke så meget resultatsmæssigt men mere i afklaring af spørgsmål og begreber. I 1924 er det stillede spørgsmål ikke, om der findes en bedste metode, hvilket i øvrigt ikke var klart defineret i 1921-noten, men hvad den forventede gevinst for en spiller er. I stedet for at betragte spillernes sandsynlighed for at vinde, som han gjorde i 1921, lod han nu $\alpha_{ik}$ betegne det beløb, som spiller 2 skal give spiller 1, hvis spiller 1 vælger metode $C_i$, og spiller 2 vælger metode $C_k$. Hermed indførte Borel det, vi i dag kalder for *udbytte.* Hovedbegrebet blev dermed den matematiske forventning *l'espérance mathématique*, og spiller 1's intentioner er da at maximere sin matematiske forventning.

Borels opbygning af kapitlet afspejler hans matematikmetode og -syn. Først kommer et meget simpelt eksempel, hvor samtlige mulige tilfælde underkastes en grundig gennemregning. Derefter udvides dette eksempel, og til sidst opstilles den generelle problemstilling, som han dog stadig ikke formåede at løse, idet han stadig opstillede den hypotese, der, som vi så ovenfor, er i konflikt med den senere udviklede minimaxsætning.

Det eneste, jeg vil kommentere fra Borels tekst fra 1924, er det simple eksempel, han åbner diskussionen med. Her omtaler han nemlig for første gang, at det handler om at maksimere den matematiske forventning, og eksemplet kan tolkes som en problemstilling, der involverer maksimering under bibetingelser, hvilket er interessant i forbindelse med den kobling, der senere blev foretaget mellem to-personers nulsum spil og lineær programmering.

Eksemplet er et af de simpleste spil, man kan tænke sig, nemlig det der i dag går under navnet 'sten, saks, papir', og som Borel udtrykte ved, at de to spillere $J$ og $J'$ på en hemmelig måde vælger et af tre kort $A$, $B$, $C$, hvor $A$ slår $B$, som slår $C$, som til gengæld slår $A$. Han lod $x$, $y$, $z$ betegne sandsynlighederne for at spiller $J$ vælger hhv. $A$, $B$ og $C$, mens $x'$, $y'$, $z'$ betegnede de tilsvarende sandsynligheder for spiller $J'$.[5] Der skal så naturligvis gælde, at $x+y+z = x'+y'+z' = 1$. Den matematiske forventning, $E$, for spiller $J$ efter et spil bliver da:

$$E = xy' - x'y + yz' - y'z + zx' - z'x,$$

idet det er forudsat, at spiller $J'$ betaler én enhed til spiller $J$, hvis $J$ vinder. Hvis $E$ er positiv, vil $J$ vinde, ellers vil $J'$, hvis $E = 0$, vil $J$ og $J'$ spille lige

[5] Borel præciserede ikke yderligere, hvor disse sandsynligheder kommer fra.

op. Borel angav nu, at spiller $J$'s intentioner er at maximere $E$, så her er der for første gang tale om optimering. I den efterfølgende analyse omskrev Borel $E$, så

$$E = x(y' - z') + y(z' - x') + z(x' - y')$$

og argumenterede for, at hvis ikke alle leddene $(y' - z')$, $(z' - x')$, $(x' - y')$ er nul, kan de ikke alle tre have samme fortegn, da deres sum jo er nul. Han betragtede først tilfældet, hvor to af størrelserne, $y' - z' = h$ og $z' - x' = k$, er positive. $E$ får da formen

$$E = hx + ky - (h + k)z, \qquad h,\ k \text{ er positive,}$$

og det ses, at en nødvendig betingelse for at opnå maksimum er, at $z = 0$. Borel konkluderede videre, at for $h > k$ vil maximum indtræffe, når $x = 1$ og $y = 0$, mens det for $h < k$ vil indtræffe, når $x = 0$ og $y = 1$. Men, argumenterede Borel, det er klart, at hvis $J$ rent faktisk benytter en af disse løsninger, det vil sige udelukkende spiller kort $A$ eller kort $B$, vil der ikke gå lang tid, før han tiltrækker sig $J'$'s opmærksomhed, som man så kan forvente vil indrette sit spil herefter. Spiller $J$ skal altså udover at forsøge at maksimere $E$ også opføre sig sådan, at $J'$ ikke kan forudsige, hvilket kort $J$ vil vælge. Borels konklusion blev da, at

> *Le joueur $J$ cherchera à rendre cette somme aussi grande que possible, tout en évitant de rendre $z$ trop petit.* [Borel, 1924, s.208]

I en vis forstand kan man altså sige, at det handler om optimering under bibetingelse, idet spiller $J$'s 'opgave' bliver at gøre summen $E$ så stor som mulig og samtidig undgå at gøre $z$ for lille.

Borel afsluttede analysen med at give den løsning, som efter von Neumanns arbejde i 1928 kom til at gå under navnet 'minimaxløsningen', idet det jo er klart, som Borel udtrykte det, at hvis

> *... l'on suppose $x' = y' = z'$, on aura, quels que soient $x$, $y$, $z$:*
>
> $$E = 0$$
>
> *Le joueur $J'$ est ainsi assuré de ne pas perdre systématiquement, quelle que soit la manière de jouer de $J$; le jeu est devenu équitable; mais, réciproquement, il n'a aucune chance de gagner systématiquement, quelque extravagante que soit la manière de jouer de $J$.* [Borel, 1924, s.208-209]

## Borel bliver i tvivl

To år senere, i 1926, publicerede Borel en ny spilteoretisk note *Un théoreme sur les systemes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche* i *Comptes Rendus* [Borel, 1926a]. Her opstillede han to sætninger $A$ og $B$, som er hinandens modsætninger. Sætning $A$ er negationen af Borels hypotese, og sætning $B$ er hypotesen. Borel skrev:

> *J'avais espéré pouvoir démontrer le théorème B pour $n \geq 7$; de nouvelles recherches tendent à me faire croire, au contraire, que pour $n = 7$, comme pour $n = 5$, c'est le théorème A qui est vrai.* [Borel, 1926a, s.926]

Han er således begyndt at tvivle på, at hans hypotese holder for $n = 7$, og det, at han opstillede begge sætninger og har sin egen hypotese stående til sidst, har man tolket som de første tegn på, at Borel ikke længere var så sikker på sin hypotese og var begyndt at spekulere på, om den mon skulle vise sig at være forkert.[6]

Året efter, i 1927, kom den sidste spilteoretiske note fra Borels side, inden von Neumanns artikel blev publiceret. Der er ingen nye resultater og formålet var blot at klargøre forbindelsen mellem spilteori og Borels ligningssystemer [Borel, 1927].

Ovenstående citat fra 1926-noten illustrerer således meget godt, hvor langt Borel nåede med spilteori[7]. Året efter kom von Neumann med svaret på Borels problem, idet han viste minimaxsætningen, som fortæller, at Borels oprindelige hypotese var forkert.

## Borels forhåbninger

I betragtning af at Borel ikke nåede frem til noget egentligt resultat, kan man måske undre sig over, at han overhovedet publicerede sine spilteoretiske overvejelser. I slutningen af den første note fra 1921 antydede han, at visse sandsynlighedsteoretiske og analytiske problemer inden for krigsførelse og økonomi minder om problemerne i spil, men han påpegede også, at de som regel ville være meget mere komplekse, og hans slutkommentar til problemstillingen var:

[6] Se [Fréchet, 1953b, s.122].

[7] May skriver, at Borel beviste minimaxsætningen for tre spillere, og at han i 1927 "*conjectured its truth*" [May, 1970, s.304], men Borel behandlede på intet tidspunkt spil med tre spillere.

> *Le seul conseil que le géomètre puisse donner, en l'absence de tout renseignement psychologique, au joueur A dont l'adversaire B cherche à utiliser les remarques précédentes, c'est de varier son jeu de telle manière que les probabilités attribuables par un observateur extérieur à ses diverses manières de jouer ne soint jamais définies; ... on peut douter qu'il soit possible d'indiquer un moyen effectif et sûr de mettre en action un tel conseil.* [Borel, 1921, s.1307-1308]

Man kan som sagt godt undre sig over, at Borel har publiceret dette arbejde, hvis essens, hvis man skal gå efter resultaterne i noten (eller snarere manglen på resultater), jo er, at denne form for matematisk analyse ikke rigtigt fører til noget. Der findes f.eks. efter Borels overbevisning på dette tidspunkt ikke en 'bedste metode' i de tilfælde, hvor der er mere end 5 ikke-dårlige metoder. Han pegede godt nok på, at der kunne være visse militære og økonomiske anvendelser, men i samme åndedrag betvivlede han, som det fremgår af ovenstående citat, stærkt brugbarheden af de foregående matematiske analyser. Jeg tror, at grunden til, at han publicerede, kan findes i hans spilteoriarbejde fra 1924. Her skrev han:

> *On sait que le calcul des probabilités a ses origines dans l'étude de problèmes relatifs aux jeux de hasard; c'est peu à peu que par l'étude des problèmes simples qui se posent à propos du jeu de dés, ou même du jeu plus élémentaire encore de pile ou face, on a été conduit à imaginer les méthodes par lesquelles peuvent être traités des problèmes plus complexes. Il est en effet particulièrement avantageux d'essayer, pour ainsi dire, tout nouvel outil mathématique, en l'utilisant d'abord dans les cas les plus simples parmi ceux auxquels il peut s'adapter. L'étude des jeux dans lesquels interviennent à la fois le hasard et l'habitude des joueurs me paraît de même pouvoir fournir l'occasion de recherches mathématiques dont les applications pourront dépasser les limites du domaine resteint auquel est limité cette première étude; elles pourront s'étendre aux questions très nombreuses dans lesquelles des inconnues psychologiques figurent en même temps que des inconnues algébriques; mais, avant de penser a cette extension, il convient de s'attacher tout d'abord à l'étude approfondie de cas particuliers les plus simples; la présente note est une simple introduction à cette étude.* [Borel, 1924, s.204]

Denne passage viser, at Borel havde store forhåbninger til den 'nye teori'. Den siger også en hel del om Borels syn på matematisk metode, idet den til fulde bekræfter første halvdel af Kenneth O. Mays føromtalte karakteristik af Borel.

## John von Neumann

Borels problem fik sin endelige afklaring i 1928, hvor den ungarsk fødte matematiker John (Johann) von Neumann (1903-1957) publicerede sin første spilteoretiske artikel *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* [von Neumann, 1928], hvis fornemmeste resultat var beviset for den senere så berømte minimaxsætning. I modsætning til Borel skrev von Neumann i begyndelsen kun denne ene artikel, og først 16 år senere udkom hans andet spilteoretiske arbejde, nemlig klassikeren *Theory of Games and Economic Behavior*, som var et fælles arbejde med den østrigske økonom Oskar Morgenstern. 1928-artiklen stod derfor i lang tid som en slags 'singularitet' blandt von Neumanns øvrige matematiske værker, hvilket har givet anledning til en del spekulationer over, hvorfor von Neumann fandt på at gå i gang med et projekt om matematisering af spil.

De personer, der har udtalt sig i litteraturen, kan deles i to lejre: Dem der hælder til teorien om, at von Neumann nok har 'stjålet' ideen fra Borel, og dem der mener, at von Neumanns tætte kontakt til Hilbert i Göttingen i 1920'erne kan forklare det tilsyneladende umotiverede, spilteoretiske arbejde fra von Neumanns side.

I den første gruppe hænges synspunktet op på en analyse af von Neumanns intellekt og hans måde at arbejde på. Et eksempel herpå er følgende citat fra matematikeren S. Ulams nekrolog over von Neumann:

> *Von Neumann's awareness of results obtained by other mathematicians and the inherent possibilities which they offer is astonishing. Early in his work, a paper by Borel on the minimax property led him to develop in the paper,* Zur Theorie der Gesellschaft-Spiele, *ideas which culminated later in one of his most original creations, the theory of games.* [Ulam, 1958, s.7]

Denne analyse støttes af Steve J. Heims, som i sin dobbelt-biografi over von Neumann og Norbert Wiener skrev:

> *Von Neumann, to his chagrin, sometimes had to rely on others for the first intuition and suggestions of a problem, although he would outshine others in its systematic formulation and solution. He later claimed that he had quite independently of Borel arrived at a similar stage in his thinking about parlor games, and he well*

> *may have, though he published nothing on the subject until 1928.* [Heims, 1980, s.84]

Selvom Heims efterlader den mulighed, at von Neumann arbejdede uafhængigt af Borel, indikerer han samtidig, at von Neumann kunne have fået ideerne fra Borel.

Von Neumann hævdede selv, at han arbejdede uafhængigt af Borel. Det er ikke muligt at bekræfte dette med sikkerhed, men jeg finder, at der er visse omstændigheder, der taler for von Neumanns påstand: Han præsenterede sine resultater første gang i december 1926 ved det ugentlige seminar på matematisk institut i Göttingen [von Neumann, 1928, s.295], og selve artiklen blev sendt ind til *Mathematische Annalen* i juli 1927. Næsten et helt år senere sørgede von Neumann for at få sit resultat fremlagt ved Videnskabernes Akademi i Paris, hvor Borel ved mødet d. 14 maj 1928 præsenterede en note af von Neumann, hvori von Neumann beskrev sit minimax-resultat og understregede, at han havde arbejdet uafhængigt af Borel [von Neumann, 1928a]. I selve artiklen fastslog von Neumann igen, at han ikke arbejdede med 'lånte' fjer, idet han påpegede, at han først blev gjort opmærksom på Borels arbejde i korrekturlæsningsfasen:

> *Während der endgültigen Abfassung dieser Arbeit wurde mir die Note von Herrn E. Borel in den Comptes rendus vom 10. Jan. 1927 (Sur les systèmes de formes linéares ... et la théorie du jeu, s.52-55) bekannt.* [von Neumann, 1928, s.306]

Jeg opfatter den sene præsentation af von Neumanns resultater for Akademiet som en bekræftelse på hans påstand. Han fik Borel til at præsentere noten så sent som i maj 1928, kort tid før selve artiklen udkom. Hvis det hele tiden havde været von Neumanns hensigt at formidle sit resultat til omverdenen så hurtigt som muligt, ville han nok have sendt noten til *Comptes rendus* allerede i december 1926 i forbindelse med det afholdte foredrag i Göttingen, eller i juli 1927 da han sendte artiklen ind til *Mathematische Annalen.* I stedet for kom noten først ganske få måneder, inden selve artiklen blev offentliggjort, hvilket passer fint med, at han først i korrekturlæsningsfasen blev opmærksom på Borels arbejde og derfor først på dette sene tidspunkt handlede i forhold til omverdenen, idet han måske pludselig blev bange for, at Borels arbejder gennem de sidste 6 år havde inspireret andre matematikere til at udarbejde en spilteori. For at komme sådanne eventuelle tilfælde i forkøbet ville det være fornuftigt at få sit resultat trykt hurtigst muligt i *Comptes rendus.*

Den anden gruppe forklarer von Neumanns indgang til spilteori ud fra de øvrige forhold i von Neumanns faglige liv i de år, der grænser op til publiceringen af artiklen. I årene 1921-23 opholdt von Neumann sig ved universitetet i

Berlin, hvor han kom i kontakt med nogle af Hilberts tidligere studerende. Det var også i denne periode, at von Neumann selv fik forbindelse med Hilbert, hvilket blev starten på et samarbejde, der kom til at præge von Neumann for altid. Von Neumanns arbejde i årene efter afspejler da også tydeligt forbindelsen til Göttingen, hvor Hilberts program for matematikkens grundlag og hans ønske om at axiomatisere matematisk fysik styrede von Neumanns egen forskning i denne tidlige periode af von Neumanns matematiske karriere. En gennemgang af von Neumanns publikationsliste viser, at de fleste af hans artikler fra ca. 1925 til 1929 '*deal with attempts to spread the spirit of axiomatization even through physical theory*' [Ulam, 1958, s.10]. I 1925 publicerede han en artikel om axiomatiseringen af mængdelæren, og i 1927 kom yderligere to artikler om axiomatiseringen af mængdelæren, samt en artikel om Hilberts bevisteori og syv artikler om kvantemekanik: matematisk begrundelse og axiomatisering.

Philip Mirowski argumenterer i artiklerne *When Games Grow Deadly Serious: The Military Influence on the Evolution of Game Theory* og *What Were von Neumann and Morgenstern Trying to Accomplish?* overbevisende for, at von Neumanns spilteori kom direkte ud af Hilberts formalistprogram. Han ser således von Neumanns arbejde som en naturlig konsekvens af Hilberts axiomatiseringsprojekt især axiomatiseringen af kvantemekanikken [Mirowski, 1991, 1992][8]. Dertil kommer, at Zermelo, der også var involveret i arbejdet med matematikkens grundlag og ligeledes opholdt sig i Göttingen, i 1913 publicerede et arbejde om mængdelærens anvendelse på teorien for skak.

## *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*

De to helt essentielle punkter i von Neumanns første artikel om spilteori fra 1928 er matematiseringen af *Gesellschaftsspiele* samt beviset for minimaxsætningen for to-personers nulsum spil. I sekundærlitteraturen er jeg kun stødt på én analyse af von Neumanns første bevis for minimaxsætningen, og den er foretaget af Kuhn og Tucker [Kuhn og Tucker, 1958]. Men jeg er stødt på adskillige udtalelser om beviset. Dimand og Dimand f.eks. noterede, at

> *Von Neumann's proof was a complicated one, combining elementary and topological concepts in a manner not easy for the reader to follow.* [Dimand og Dimand, 1992, s.24]

Hos Robert J. Leonard kan man læse, at

> ...[1928-artiklen] *primarily containing a long and difficult proof of the existence of an equilibrium value for the two-person, discrete*

[8]Se også [Leonard, 1992, 1995].

> *game, based on functional calculus and topology.* [Leonard, 1992, s.44]

Ingrao og Israel skriver:

> *Von Neumann's demonstration is highly technical and difficult. It involves seeking a solution to a certain system of equations and inequalities and thus the solution to a problem of algebraic character of which, however, von Neumann demonstrates the close connection with fixed-point theorems and especially with Brouwer's theorem.* [Ingrao og Israel, 1990, s.211]

Heims påpeger om beviset, at

> *His proof was a tour de force. The minimax theorem is a statement belonging to algebra, dealing with the existence of a solution for a certain set of equations and inequalities. However, von Neumann did not find the means to prove the theorem altogether within that branch of mathematics. Instead he made use of topology, a branch of mathematics dealing with the mapping of one shape or set of points onto another. Von Neumann's proof is complicated; ....* [Heims, 1980, s.91]

Disse kommentarer til von Neumanns første bevis for minimaxsætningen afslører ikke ret meget om selve beviset, men går fint i spænd med von Neumanns egen vurdering fra 1944:

> *The proof of our theorem, given in the first paper* [1928 artiklen], *made a rather involved use of some topology and of functional calculus. ... All these proofs are definitely non-elementary.* [von Neumann og Morgenstern, 1944, s.154, note 1]

Kuhn og Tucker gennemgår i deres essay *John von Neumann's Work in the Theory of Games and Mathematical Economics* hovedtrækkene i beviset, men sætter det ind i en moderne ramme og fremhæver især forbindelsen til konveks analyse og fixpunktssætninger [Kuhn og Tucker, 1958]. I næste kapitel vil jeg med baggrund i følgende historiske analyse af 1928-artiklen og senere arbejder af von Neumann, som behandles i næste kapitel, argumentere for, at von Neumanns erkendelse af minimaxsætningens sammenhæng med konveksitetsteori og fixpunktssætninger først udkrystaliseredes langt senere.

**Hvad er et *Gesellschaftsspiel* ?**

Von Neumann lagde kort og godt ud med at formulere det spørgsmål, som artiklen beskæftiger sig med:

> *$n$ Spieler, $S_1$, $S_2, \ldots, S_n$, spielen ein gegebenes Gesellschaftsspiel $B$. Wie muß einer dieser Spieler, $S_m$, spielen, um dabei ein möglichst günstiges Resultat zu erzielen?* [von Neumann, 1928, s.295]

Om dette problem skrev von Neumann, at det var velkendt, og at der knap findes en situation i det daglige liv, hvor det ikke dukker op. Men, påpegede han, meningen er ikke fri for flertydighed. Thi hvad sker der, når $n > 1$? Ja så vil hver spillers skæbne ikke kun afhænge af hans egne handlinger, men også af de andre spilleres handlinger, og deres opførsel er motiveret af samme selviske interesser som den første spillers opførsel:

> *Man fühlt, daß ein gewisser Zirkel im Wesen der Sache liegt.* [von Neumann, 1928, s.295]

Von Neumanns første problem blev derfor at finde frem til en klar formulering af spørgsmålet. Hvad præcist er et *Gesellschaftsspiel*? Nedenstående citat giver et indblik i, hvor omfattende von Neumann opfattede begrebet:

> *Es fallen unter diesen Begriff sehr viele, recht verschiedenartige Dinge: von der Roulette bis zum Schach, vom Bakkarat bis zum Bridge liegen ganz verschiedene Varianten des Sammelbegriffes 'Gesellschaftsspiel' vor. Und letzten Endes kann auch irgendein Ereignis, mit gegebenen äußeren Bedingungen und gegebenen Handelnden (den absolut freien Willen der letzteren vorausgesetzt), als Gesellschaftsspiel angesehen werden, wenn man seine Rückwirkungen auf die in ihm handelnden Personen betrachtet.* [von Neumann, 1928, s.295]

Til det sidste tilføjede von Neumann i en fodnote:

> *Es ist das Hauptproblem der klassischen Nationalökonomie: was wird, unter gegebenen äußeren Umständen der absolut egoistische 'homo oeconomicus' tun?* [von Neumann, 1928, s.295]

Man må sige, at denne brede tolkning af *Gesellschaftsspiele* lægger op til et temmelig ambitiøst projekt.

Ved at samle de fælles træk i ovenstående situationer udledte von Neumann en kvalitativ beskrivelse af spilbegrebet. Han argumenterede på følgende måde: Et spil består af en vis række af hændelser, og hver af disse kan have et endeligt antal forskellige udfald. I nogle tilfælde afhænger nogle af hændelsernes udfald udelukkende af tilfældigheder, hvilket vil sige, at sandsynlighederne, med hvilken hver af de mulige resultater vil optræde, er kendt, men ingen af spillerne har indflydelse på dem. Alle andre hændelser afhænger af spillernes $S_1$, $S_2, \ldots, S_n$ frie vilje, og for hver af disse hændelser er det kendt (af de øvrige spillere), hvilken spiller, $S_m$, der bestemmer udfaldet, og hvad hans informationssituation mht. resultatet af andre tidligere hændelser er på det tidspunkt, hvor han tager sin beslutning. Endelig, efter at udfaldet af alle hændelser er kendt, kan man i henhold til en given regel udregne, hvilket beløb spillerne skal betale til hinanden [von Neumann, 1928, s.296].

For at kunne arbejde matematisk med begrebet gav von Neumann den ovenstående kvalitative beskrivelse en mere præcis form:

**Definition:** Til en fuldstændig beskrivelse af et spil er følgende data, som i deres helhed er *die Spielregel*, nødvendige:

a) Antallet af hændelser eller 'trækninger', som udelukkende er tilfældige, og antallet af hændelser eller 'trin', som er bestemt af den individuelle spillers frie vilje, skal specificeres. Lad disse tal være hhv. $z$ og $s$, og betegn 'trækkene' med

$$E_1, E_2, \ldots, E_z$$

og 'trinene' med

$$F_1, F_2, \ldots, F_s.$$

b) Antallet af mulige resultater af hver 'trækning', $E_\mu$, og af hvert 'trin', $F_\nu$, skal specificeres. Lad disse tal være hhv. $M_\mu$ og $N_\nu$ ($\mu = 1, 2, \ldots, z$; $\nu = 1, 2, \ldots, s$). I det følgende vil resultaterne blive benævnt med deres respektive tal $1, 2, \ldots, M_\mu$ og $1, 2, \ldots, N_\nu$.

c) For hver 'trækning' $E_\mu$ skal sandsynlighederne $\alpha_\mu{}^{(1)}$, $\alpha_\mu{}^{(2)}, \ldots, \alpha_\mu{}^{(M_\mu)}$ for de forskellige resultater $1, 2, \ldots, M_\mu$ være givet. Det er klart, at der må gælde

$$\alpha_\mu{}^{(1)} \geq 0,\ \alpha_\mu{}^{(2)} \geq 0, \ldots, \alpha_\mu{}^{(M_\mu)} \geq 0,$$

$$\alpha_\mu{}^{(1)} + \alpha_\mu{}^{(2)} + \ldots + \alpha_\mu{}^{(M_\mu)} = 1.$$

d) For ethvert 'trin' $F_\nu$ skal det specificeres, hvilken spiller $S_m$ der bestemmer udfaldet af dette 'trin' ( 'hvis trin' $F_\nu$ er). Dertil skal numrene på alle 'trin og trækninger', hvis udfald spilleren kender på det tidspunkt, hvor han træffer sin beslutning om $F_\nu$, være angivet. Disse 'trækninger' og 'trin' kaldes 'tidligere' end $F_\nu$.

For at hele dette skema skal være konsistent og tillade en tids-causal fortolkning, skal $F_{\nu_q}$ altid være 'tidligere' end $F_{\nu_{q+1}}$, $(q = 1,\ 2, \dots,\ p)$.

e) Endelig skal der være givet $n$ funktioner $f_1,\ f_2, \dots, f_n$, som alle afhænger af $z + s$ variable. De $z + s$ variable kan antage værdierne hhv.:

$$1,\ 2, \dots, M_1; \quad 1,\ 2, \dots, M_2; \quad \dots; \quad 1,\ 2, \dots, M_z;$$

$$1,\ 2, \dots, N_1; \quad 1,\ 2, \dots, N_2; \quad \dots; \quad 1,\ 2, \dots, N_s.$$

Disse funktioner antager reelle værdier, og deres sum

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n \equiv 0$$

er identisk 0. Hvis resultaterne af de $z$ 'trækninger' og $s$ 'trin' i et spil, som er tilendebragt, var hhv.

$$x_1,\ x_2, \dots, x_z, \quad y_1,\ y_2, \dots, y_s,$$

hvor

$$x_\mu \in \{1,\ 2, \dots, M_\mu\}, \quad y_\nu \in \{1,\ 2, \dots, N_\nu\},$$

for

$$\mu = 1,\ 2, \dots, z, \quad \nu = 1,\ 2, \dots, s,$$

skal spillerne $S_1,\ S_2, \dots, S_n$ modtage summerne

$$f_1(x_1, \dots, x_z, y_1, \dots, y_s),\ f_2(x_1, \dots, x_z, y_1, \dots, y_s),\ \dots,$$

$$f_n(x_1, \dots, x_z, y_1, \dots, y_s)$$

fra de øvrige spillere.

Hermed har von Neumann givet en præcis definition af begrebet *Gesellschaftsspiel.* Men hvad med det mest fordelagtige resultat for spiller $S_m$? Det definerede von Neumann til at være størst mulig værdi af $f_m$. Men, spørger von Neumann, '*wie soll überhaupt irgendein Wert von $f_m$ durch $S_m$ 'erzielt' werden?*' [von Neumann, 1928, s.297]. Værdien af $f_m$ afhænger af de variable $x_1, \dots, x_z,\ y_1, \dots, y_s$, hvoraf kun nogle er bestemt af $S_m$'s handlinger (nemlig de $y_\nu$ for hvilke $S_m$ har 'trinet' $F_\nu$). De øvrige variable afhænger dels af de andre spilleres beslutninger, dels af tilfældigheder:

> *Es soll versucht werden, die Rückwirkungen der Spieler aufeinander zu untersuchen, die Konsequenzen des (für alles soziale Geschehen so charakteristischen!) Umstandes, daß jeder Spieler auf die Resultate aller anderen einen Einfluß hat und dabei nur am eigenen interessiert ist.* [von Neumann, 1928, s.298]

Allerede her ser man tydeligt forskellen mellem Borels og von Neumanns tilgang til emnet. Von Neumann startede med at give helt præcise definitioner på de indgående begreber. Han lavede en slags matematisering af hele problemkomplekset, mens Borels tilgang mere var en ad hoc analyse. En anden væsentlig forskel er, at von Neumann helt fra starten gør det klart, at det er dynamikken mellem spillerne, der er det centrale. Man kan ikke se på én spiller særskilt, idet én spillers handlemåder er flettet ind i de øvrige spilleres handlemåder; man er nødt til at betragte spillernes handlemåder samtidigt. Dette er, som det vil blive klart senere, helt afgørende for hans bevis for minimaxsætningen, idet denne betragtningsmåde leder frem til saddelpunktsegenskaber.

### Generelle forenklinger

For overhovedet at kunne arbejde med dette spilbegreb viste von Neumann, at det kunne forenkles betydeligt uden at tabe noget i generalitet. Ved at indføre det, vi i dag kalder for strategibegrebet, og som von Neumann, i lighed med Borel, kaldte for *Spielmethode*, reducerede han antallet af trin til antallet af spillere, således at det $\nu$'te 'trin' er spiller $S_\nu$'s. Relationen 'tidligere' forsvinder dermed ud af billedet. Sin fremgangsmåde tro matematiserede von Neumann også *Spielmethode* begrebet, og han fandt, at han kunne slutte, at der kun er et endeligt antal 'Spielmethoden', $S_1{}^{(m)}$, $S_2{}^{(m)}, \ldots, S_{\Sigma m}{}^{(m)}$, til rådighed for spiller $S_m$. Efter indførelsen af *Spielmethode* begrebet viste von Neumann ved at bruge antagelsen om fraværet af cykler, at forløbet af et spil er beskrevet på en tilladelig og utvetydig måde, hvis blot man specificerer

1. hvilke strategier $\overline{S}^{(1)}$, hhv. $\overline{S}^{(2)}, \ldots, \overline{S}^{(n)}$ de forskellige spillere $S_1$, hhv. $S_2, \ldots, S_n$ vil benytte,
2. hvad resultaterne af 'trækkene' $E_1$, $E_2, \ldots, E_z$ er.

På dette sted i artiklen fremhævede von Neumann to punkter. For det første: Det ligger nedarvet i begrebet *Spielmethode*, at al den information om de øvrige deltageres handlinger og udfaldet af 'trækkene', som en spiller er i stand til at få kendskab til, allerede er indeholdt i 'strategien'. Konsekvensen heraf bliver, at hver spiller må vælge sin strategi (*Spielmethode*) i fuldstændig uvidenhed om, hvilke valg resten af spillerne foretager og af resultaterne af 'trækkene'. For det andet: Det er blevet uvæsentligt, at 'trækkene' $E_1,\ E_2,\dots,E_z$ er adskilte hændelser, idet spillerne må agere, det vil sige vælge deres strategi, uden på forhånd at kende udfaldet af 'trækkene'. Men i så fald kan man kombinere alle $z$ 'trækninger' i en enkelt 'trækning' $H$, hvis udfald vil være en samling af tal

$$x_1,\ x_2,\dots,x_z \quad (x_\mu = 1,\ 2,\dots,M_\mu,\ \mu = 1,\ 2,\dots,z),$$

med de respektive sandsynligheder

$$\alpha_1{}^{(x_1)}\alpha_2{}^{(x_2)}\dots\alpha_z{}^{(x_z)},$$

eller, hvad der er det samme, tallene

$$1,\ 2,\dots,M \quad (M = M_1 M_2\cdot\dots\cdot M_z),$$

med tilhørende sandsynligheder

$$\beta_1,\ \beta_2,\dots,\beta_M.$$

Dermed kan 2. modificeres på følgende måde:

2'. Resultatet af 'trækningen' $H$ skal specificeres. ($H$ kan have udfaldet $1,\ 2,\dots,M$ med respektive sandsynligheder $\beta_1,\ \beta_2,\dots,\beta_M$).

Den sidste forenkling, som von Neumann foretog, var helt at slippe af med 'trækket' $H$. Dette gjorde han ved at erstatte de faktiske resultater $(f_m)$ for de individuelle spillere med deres forventede værdier. For at være præcis:

Hvis spillerne $S_1,\ S_2,\dots,S_n$ har valgt 'strategierne'

$$S_{u_1}{}^{(1)},\ S_{u_2}{}^{(2)},\dots,S_{u_n}{}^{(n)},$$

hvor

$$u_m = 1,\ 2,\dots,\Sigma_m, \quad m = 1,\ 2,\dots,n,$$

og hvis udfaldet af 'trækket' $H$ er tallet $\nu$ $(= 1,\ 2,\dots,M)$, så er resultatet for spillerne $S_1,\ S_2,\dots,S_n$ hhv.

$$f_1(\nu,u_1,u_2,\dots,u_n),\ f_2(\nu,u_1,u_2,\dots,u_n),\dots,f_n(\nu,u_1,u_2,\dots,u_n).$$

Hvis man kun kendte valgene af $u_1,\ u_2,\dots,u_n$, og endnu ikke kendte 'trækket' $\nu$, ville den forventede værdi af $f_1,\ f_2,\dots,f_n$ være

$$g_m(u_1,\dots,u_n) = \sum \beta_\nu f_m(\nu,u_1,\dots,u_n), \quad (m = 1,\ 2,\dots,n),$$

$(f_1 + \ldots + f_n \equiv 0$ medfører at $g_1 + \ldots + g_n \equiv 0)$. Det er, som von Neumann bemærkede, fuldstændig i overensstemmelse med ånden i sandsynligheds-regningens metoder at ignorere 'trækket' og udelukkende arbejde med de forventede værdier $g_1, \ldots, g_n$.

Hermed har von Neumann fået formuleret begrebet *Gesellschaftsspiel* på en endnu mere skematiseret og simplificeret måde uden tab af generalitet:

> Hver af spillerne $S_1$, $S_2, \ldots, S_n$ vælger et tal. $S_m$ vælger et af tallene $1, 2, \ldots, \Sigma_m$. Hver spiller foretager sit valg uden at være informeret om de øvrige spilleres valg. Efter at have foretaget valgene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_m = 1, 2, \ldots, \Sigma_m,\ m = 1, 2, \ldots, n)$ modtager spillerne følgende sum:
>
> $$g_1(x_1, \ldots, x_n),\ g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots,\ g_n(x_1, \ldots, x_n),$$
>
> hvor der gælder $g_1 + \ldots + g_n = 0$. [von Neumann, 1928, s.301-302]

## Tilfældet $n = 2$

Indtil nu har von Neumann blot defineret de indgående begreber og omformuleret de fastlagte definitioner. Han var i 1928 ikke i stand til at komme videre med det generelle tilfælde:

> *Weiter können wir zunächst in der bisherigen Allgemeinheit nicht kommen, es erweist sich vielmehr als zweckmäßig, jetzt den einfachsten Fall für n zu betrachten.* [von Neumann, 1928, s.302]

I det følgende betragtes således kun *Gesellschaftsspiele* med to spillere. Idet $g_1 + g_2 \equiv 0$, satte von Neumann $g_1 = g$, $g_2 = -g$, og beskrev spillet på følgende måde:

Spillerne $S_1$, $S_2$ vælger et vilkårligt tal blandt tallene $1, 2, \ldots, \Sigma_1$, hhv. $1, 2, \ldots, \Sigma_2$, uden at vide, hvad den anden spiller har valgt. Efter at have valgt tallene $x$ hhv. $y$ modtager de beløbet $g(x, y)$ hhv. $-g(x, y)$.

$g(x, y)$ kan være en hvilken som helst funktion (defineret for $x = 1, 2, \ldots, \Sigma_1$, $y = 1, 2, \ldots, \Sigma_2$).

> *Es ist leicht, sich ein Bild von den Tendenzen zu machen, die in einem solchen 2-Personen-Spiele miteinander kämpfen: Es wird von zwei Seiten am Werte von $g(x, y)$ hin und her gezerrt, nämlich durch $S_1$, der ihn möglichst groß, und durch $S_2$, der ihn möglichst klein machen will. $S_1$, gebietet über die Variable $x$, und $S_2$ über die Variable $y$. Was wird geschehen?* [von Neumann, 1928, s.302]

Ja, hvad vil der mon ske? Von Neumann analyserede situationen på følgende måde: Hvis $S_1$ har valgt tallet $x_0$ ($x_0 = 1,\ 2, \ldots, \Sigma_1$), det vil sige 'strategien' $x_0$, vil hans resultat $g(x_0, y)$ stadig afhænge af $S_2$'s valg af $y$, men uanset hvilket $y$ $S_2$ vælger, vil der gælde, at

$$g(x_0, y) \geq \min_y g(x_0, y).$$

Hvis $S_2$, i strid med spillets regler, kendte $x_0$, ville $S_2$ ifølge antagelsen vælge $y_0$ således, at[9]

$$g(x_0, y_0) = \min_y g(x_0, y).$$

Det bedste $S_1$ kan gøre er da at vælge $x_0$ således, at

$$\min_y g(x_0, y) = \max_x \min_y g(x, y).$$

Det vil sige, $S_1$ kan med sikkerhed sørge for at:

$$g(x_0, y) \geq \max_x \min_y g(x, y),$$

uafhængigt af, hvilket $y$ $S_2$ vælger. Samme argument holder for $S_2$, som med sikkerhed kan sørge for, at

$$g(x, y_0) \leq \min_y \max_x g(x, y),$$

ligegyldigt, hvilket $x$ $S_1$ vælger.[10] Hvis nu der findes et $x_0$, $y_0$, således at

$$(*) \qquad g(x_0, y_0) = \max_x \min_y g(x, y) = \min_y \max_x g(x, y) \quad (= M),$$

sluttede von Neumann af ovenstående og af det faktum, at $S_1$ ønsker at maximere $g(x, y)$, samtidig med at $S_2$ ønsker at minimere $g(x, y)$, at $S_1$ og $S_2$ nødvendigvis må vælge strategierne $x_0$ hhv. $y_0$, og dermed vil resultatet af spillet være lig med $M$. Thi $S_1$ er interesseret i at gøre $g(x, y)$ stor og kan forhindre den i at blive mindre end $M$. $S_2$ er på den anden side interesseret i at gøre $g(x, y)$ lille og kan forhindre, at $g(x, y)$ bliver større end $M$ [von Neumann, 1928, s.302-303].

Det er ikke altid sikkert, at der findes $x_0$, $y_0$ så (*) gælder. Von Neumann gav følgende eksempel på et $g$, hvor der gælder '<':

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = 2,$$

[9] Idet $g$ er defineret på en endelig mængde findes $y_0$ så $g(x_0, y_0) = \min_y g(x_0, y)$.

[10] I det $g$ er defineret på en endelig mængde findes $x_0$, $y_0$, hvor de forskellige minimums- hhv. maksimumsværdier antages.

$$g(1,1)=1,\quad g(1,2)=-1,$$

$$g(2,1)=-1,\quad g(2,2)=1.$$

Her er $\max_x \min_y g(x,y) = -1$, mens $\min_y \max_x g(x,y) = 1$, hvilket von Neumann fortolkede således:

> $\max_x \min_y g(x,y)$ er det bedste resultat, $S_1$ kan opnå, hvis '*ihn $S_2$ vollkommen durchschaut*', thi hvis $S_1$ spiller $x$, vil $S_2$ spille et $y$, således at $g(x,y) = \min_y g(x,y)$. På tilsvarende måde ses, at det bedste resultat, $S_2$ kan opnå, hvis $S_1$ ved, hvad $S_2$ vil spille, er $g(x,y) = \min_y \max_x g(x,y)$. Hvis de to tal er lig med hinanden, gør det således ingen forskel, om en af spillerne er en bedre psykolog end den anden, resultatet af spillet vil altid være det samme. Dette er klart ikke tilfældet med ovenstående eksempel, her afhænger det hele netop af at lure modparten, altså gætte om han vil vælge 1 eller 2. [von Neumann, 1928, s.303-304]

For at komme videre herfra gjorde von Neumann præcis det samme som Borel. Han indførte de blandede strategier, hvilket er temmelig oplagt at gøre, hvis man lytter til egen erfaring fra spil som for eksempel 'sten, saks, papir'. I stedet for at vælge et $x$ hhv. et $y$, specificerer $S_1$ og $S_2$ med hvilke sandsynligheder, de vil vælge de forskellige *Spielmethoden*: $S_1$ vælger sandsynlighederne

$$\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_{\Sigma_1}\quad (\xi_1 \geq 0,\ \xi_2 \geq 0,\ldots,\xi_{\Sigma_1} \geq 0,\quad \sum \xi_i = 1),$$

og fra en urne, hvor tallene $1,\ 2,\ldots,\Sigma_1$ optræder med sandsynlighederne $\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_{\Sigma_1}$, trækker han et tal og vælger så det udtrukne tal. Tilsvarende vælger $S_2$ $\Sigma_2$ sandsynligheder

$$\eta_1,\ \eta_2,\ldots,\eta_{\Sigma_2}\quad (\eta_1 \geq 0,\ \eta_2 \geq 0,\ldots,\eta_{\Sigma_2} \geq 0,\quad \sum \eta_j = 1).$$

Sæt

$$(\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_{\Sigma_1}) = \xi,\qquad (\eta_1,\ \eta_2,\ldots,\eta_{\Sigma_2}) = \eta.$$

Hvis $S_1$ vælger $\xi$, og $S_2$ vælger $\eta$, er den forventede værdi af beløbet, som $S_1$ modtager,

$$h(\xi,\eta) = \sum_{p=1}^{\Sigma_1}\sum_{q=1}^{\Sigma_2} g(p,q)\xi_p\eta_q,$$

og den forventede værdi af beløbet, som $S_2$ modtager, er $-h(\xi,\eta)$. Den nye funktion indeholder den gamle, thi sættes $\xi_x = \eta_y = 1$ og alle andre lig 0, er $h(\xi,\eta) = g(x,y)$. Von Neumann lavede nu den samme analyse som før og konkluderede, at $S_1$ er i stand til at opnå den minimale forventede værdi $\max_\xi \min_\eta h(\xi,\eta)$ (uanset hvad $S_2$ gør), og $S_2$ kan forhindre, at $S_1$'s forventede værdi overstiger den maksimale værdi $\min_\eta \max_\xi h(\xi,\eta)$. Ved at overgå til blandede strategier bliver spillernes forventede værdier udtrykt ved bilinear formen $h$, og for den gælder, som von Neumann viste, at der findes et $\xi_0$, $\eta_0$ så:

$$\max_\xi \min_\eta h(\xi,\eta) = \min_\eta \max_\xi h(\xi,\eta) = h(\xi_0,\eta_0),$$

hvilket præcis er det resultat, man i dag kalder for minimaxsætningen for to-personers nulsum spil.

## Von Neumanns bevis for minimaxsætningen

Von Neumann viste faktisk en generalisering af ovenstående, idet han viste, at lighedstegnet gælder for en større klasse af funktioner end bilinear former. Han formulerede minimaxsætningen på følgende måde:

> For kontinuerte funktioner $f$ af to variable $\xi \in \mathbf{R}^M$, $\eta \in \mathbf{R}^N$, $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\xi_1 + \ldots + \xi_M \leq 1$, $\eta_1 + \ldots + \eta_N \leq 1$ som opfylder:
>
> **(K)**. *Wenn* $f(\xi',\eta) \geq A$, $f(\xi'',\eta) \geq A$ *ist, so ist auch für jedes* $0 \leq \nu \leq 1$, $\xi = \nu\xi' + (1-\nu)\xi''$ *(d.h.* $\xi_p = \nu\xi'_p + (1-\nu)\xi''_p$, $p = 1, 2, \ldots, M$*)* $f(\xi,\eta) \geq A$. *Wenn* $f(\xi,\eta') \leq A$, $f(\xi,\eta'') \leq A$ *ist, so ist auch für jedes* $0 \leq \nu \leq 1$, $\eta = \nu\eta' + (1-\nu)\eta''$ *(d.h.* $\eta_q = \nu\eta'_q + (1-\nu)\eta''_q$, $q = 1, 2, \ldots, N$*)* $f(\xi,\eta) \leq A$.
>
> ... *Für diese Funktionen* $f(\xi,\eta)$ *werden wir beweisen:*
>
> $$\max_\xi \min_\eta f(\xi,\eta) = \min_\eta \max_\xi f(\xi,\eta),$$
>
> *wobei* $\max_\xi$ *über* $\xi_1 \geq 0, \ldots, \xi_M \geq 0$, $\xi_1 + \ldots + \xi_M \leq 1$, *und* $\min_\eta$ *über* $\eta_1 \geq 0, \ldots, \eta_N \geq 0$, $\eta_1 + \ldots + \eta_N \leq 1$ *zu erstrecken ist.* [von Neumann, 1928, s.307]

Herefter bemærkede han, at idet $h(\xi,\eta)$ (se s.40) er en bilinear form og dermed lineær i $\xi$ for hvert $\eta$ og lineær i $\eta$ for hvert $\xi$, er det klart, at $h$ dels er kontinuert dels har egenskaben **(K)**.

Von Neumann startede beviset med at omskrive

$$\max_\xi \min_\eta f(\xi,\eta) = \min_\eta \max_\xi f(\xi,\eta)$$

til

$$\begin{aligned}&\max_{\substack{\xi_1\geq 0\\ \xi_1\leq 1}}\max_{\substack{\xi_2\geq 0\\ \xi_1+\xi_2\leq 1}}\dots\max_{\substack{\xi_M\geq 0\\ \xi_1+\dots+\xi_M\leq 1}}\min_{\substack{\eta_1\geq 0\\ \eta_1\leq 1}}\min_{\substack{\eta_2\geq 0\\ \eta_1+\eta_2\leq 1}}\dots\min_{\substack{\eta_N\geq 0\\ \eta_1+\dots+\eta_N\leq 1}} f(\xi,\eta)\\ =&\min_{\substack{\eta_1\geq 0\\ \eta_1\leq 1}}\min_{\substack{\eta_2\geq 0\\ \eta_1+\eta_2\leq 1}}\dots\min_{\substack{\eta_N\geq 0\\ \eta_1+\dots+\eta_N\leq 1}}\max_{\substack{\xi_1\geq 0\\ \xi_1\leq 1}}\max_{\substack{\xi_2\geq 0\\ \xi_1+\xi_2\leq 1}}\dots\max_{\substack{\xi_M\geq 0\\ \xi_1+\dots+\xi_M\leq 1}} f(\xi,\eta)\end{aligned}$$

og satte

$$M^{\xi_r}f(\xi_1,\dots,\xi_r,\eta_1,\dots,\eta_s)=\max_{\xi_1+\dots+\xi_r\leq 1}{}_{\xi_r} f(\xi_1,\dots,\xi_r,\eta_1,\dots,\eta_s),$$

$$M^{\eta_s}f(\xi_1,\dots,\xi_r,\eta_1,\dots,\eta_s)=\min_{\eta_1+\dots+\eta_s\leq 1}{}_{\eta_s} f(\xi_1,\dots,\xi_r,\eta_1,\dots,\eta_s),$$

hvorved $f$'s afhængighed af $\xi_r$ hhv. $\eta_s$ elimineres. Med disse omskrivninger er det følgende identitet, som skal bevises:

$$M^{\xi_1}M^{\xi_2}\dots M^{\xi_p}M^{\eta_1}M^{\eta_2}\dots M^{\eta_q}f=M^{\eta_1}M^{\eta_2}\dots M^{\eta_q}M^{\xi_1}M^{\xi_2}\dots M^{\xi_p}f.$$

Med $p=M$ og $q=N$ er dette ækvivalent med von Neumanns formulering af minimaxsætningen.

Med disse omskrivninger som redskab fik von Neumann kogt beviset ned til beviset for følgende to lemmaer:

$\alpha$) Hvis $f=f(\xi_1,\dots,\xi_r,\eta_1,\dots,\eta_s)$ er kontinuert og opfylder (**K**), så er $M^{\xi_r}f$ og $M^{\eta_s}f$ kontinuerte og opfylder (**K**).

$\beta$) Hvis $f=f(\xi_1,\dots,\xi_r,\eta_1,\dots,\eta_s)$ er kontinuert og opfylder (**K**), så gælder at

$$M^{\xi_r}M^{\eta_s}f=M^{\eta_s}M^{\xi_r}f.$$

Det er let at indse, at minimaxsætningen direkte kan afledes af $\alpha$) og $\beta$).

Von Neumanns bevis for $\alpha$) er lige ud ad landevejen. Det er klart, at $M^{\xi_r}f$ og $M^{\eta_s}f$ er kontinuerte, idet $f$ er kontinuert. For at vise at $M^{\xi_r}f$ og $M^{\eta_s}f$ opfylder (**K**), benyttede von Neumann sætningen om, at en kontinuert funktion på en afsluttet og begrænset mængde antager sin minimums- og maximumsværdi, samt at $f$ selv opfylder (**K**). (For en detaljeret gennemgang henvises til [von Neumann, 1928, s.308-309]).

$\beta$) er kernen i hele beviset, og von Neumanns bevis for at $\beta$) holder, er noget mere kompliceret. Jeg vil gennemgå hele beviset trin for trin, idet jeg slavisk følger von Neumann. Derefter vil jeg kommentere beviset og til sidst sætte det i relation til Kuhns og Tuckers beskrivelse.

Han skal altså vise, at for alle $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$, $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ er $M^{\xi_r} M^{\eta_s} f = M^{\eta_s} M^{\xi_r} f$. Von Neumann startede med at betragte $f$ for fastholdt $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$, $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$. $f$ er da en funktion af $\xi_r$ og $\eta_s$ alene, og det er klart, at $f$ stadig er kontinuert og opfylder (**K**). Idet von Neumann skrev $\xi$, $\eta$ i stedet for $\xi_r$, $\eta_s$ skal han vise, at

$$\max_{\substack{\xi \\ 0\le\xi\le a}} \min_{\substack{\eta \\ 0\le\eta\le b}} f(\xi,\eta) = \min_{\substack{\eta \\ 0\le\eta\le b}} \max_{\substack{\xi \\ 0\le\xi\le a}} f(\xi,\eta),$$

hvor $a = 1 - \xi_1 - \ldots - \xi_{r-1}$ og $b = 1 - \eta_1 - \ldots - \eta_{s-1}$. Dette, bemærkede von Neumann, kan også formuleres på en anden måde:

> *Es gibt einen 'Sattelpunkt'* $\xi_0$, $\eta_0$ $(0 \le \xi_0 \le a,\ 0 \le \eta_0 \le b)$, *d.h.* $f(\xi_0, \eta)$ *nimmt in* $0 \le \eta \le b$ *sein Minimum für* $\eta = \eta_0$ *an, und* $f(\xi, \eta_0)$ *nimmt in* $0 \le \xi \le a$ *sein Maximum für* $\xi = \xi_0$ *an.* [von Neumann, 1928, s.309]

Thi det gælder altid, at

$$\max_\xi \min_\eta f(\xi,\eta) \le \min_\eta \max_\xi f(\xi,\eta),$$

på den anden side, hvis der findes et saddelpunkt $(\xi_0, \eta_0)$, er

$$\max_\xi \min_\eta f(\xi,\eta) \ge \min_\eta f(\xi_0,\eta) = f(\xi_0,\eta_0),$$

$$\min_\eta \max_\xi f(\xi,\eta) \le \max_\xi f(\xi,\eta_0) = f(\xi_0,\eta_0).$$

Dette giver den 'anden ulighed' og

$$\max_\xi \min_\eta f(\xi,\eta) = \min_\eta \max_\xi f(\xi,\eta) = f(\xi_0,\eta_0).$$

Han mangler således at vise eksistensen af et sådant saddelpunkt.

Hertil betragtede von Neumann først til et hvert fast $\xi$ mængden af $\eta$, $0 \le \eta \le b$, for hvilke $f(\xi, \eta)$ antager sin minimumsværdi. Denne mængde er afsluttet, fordi $f$ er kontinuert, og konveks, da $f$ opfylder betingelsen (**K**), og dermed er den et delinterval af $[0, b]$. Von Neumann betegnede delintervallet med $[K'(\xi), K''(\xi)]$. Altså, for $\xi$ fast:

$$\{\eta' \in [0,b] \,|\, \min_\eta f(\xi,\eta) = f(\xi,\eta')\} = [K'(\xi), K''(\xi)] \subseteq [0,b].$$

Tilsvarende fås for fast $\eta$, at de $\xi$, $0 \le \xi \le a$, for hvilke $f(\xi, \eta)$ antager sit maximum, udgør et afsluttet delinterval af $[0, a]$. Von Neumann betegnede dette delinterval med $[L'(\eta), L''(\eta)]$.

Det vil sige, for hvert $\xi \in [0, a]$ findes et interval $[K'(\xi), K''(\xi)] \subseteq [0, b]$, således at samtlige $\eta$ heri er minimumspunkter for $f(\xi, *)$. For hvert $\eta \in [0, b]$ findes et interval $[L'(\eta), L''(\eta)] \subseteq [0, a]$, således at hvert $\xi$ heri er maximumspunkt for $f(*, \eta)$.

Von Neumann viste derefter, at kontinuiteten af $f$ sikrer, at $K'$,$L'$ og $K''$, $L''$ er nedadtil hhv. opadtil halvkontinuerte funktioner [von Neumann, 1928, s.310, note 10].

Han betragtede så for et givet $\xi^*$ følgende mængde, som jeg har kaldt $D(\xi^*)$:

$$D(\xi^*) = \{\xi^{**} | \exists \eta^* : \min_\eta f(\xi^*, \eta) = f(\xi^*, \eta^*) \text{ og } \max_\xi f(\xi, \eta^*) = f(\xi^{**}, \eta^*)\},$$

det vil sige

$$D(\xi^*) = \cup[L'(\eta^*), L''(\eta^*)] \text{ over } \eta^* \in [K'(\xi^*), K''(\xi^*)].$$

I intervallet $K'(\xi^*) \leq \eta^* \leq K''(\xi^*)$ vil den nedadtil halvkontinuerte funktion $L'$ antage sin minimumsværdi, og den opadtil halvkontinuerte funktion $L''$ vil antage sin maximumsværdi. Dermed vil mængden $D(\xi^*)$ indeholde et mindste såvel som et største element. Ydermere vil $D(\xi^*)$ indeholde alle $\xi'$ liggende imellem det mindste og det største element. Von Neumann gav følgende indirekte bevis for denne påstand:

Thi antages det, at der findes et $\xi'$ mellem mindste og største element, som ikke er indeholdt i $D(\xi^*)$, betyder det, at hvert interval $[L'(\eta^*), L''(\eta^*)]$ vil ligge enten helt til venstre for $\xi'$ eller helt til højre for $\xi'$, og da $\xi'$ ligger imellem mindste og største element i $D(\xi^*)$, vil der findes intervaller både til højre og til venstre for $\xi'$. Idet $\eta^*$ gennemløber et interval, vil begge slags $\eta^*$-er, dvs. de $\eta^*$, der svarer til intervaller $[L'(\eta^*), L''(\eta^*)]$ helt til venstre for $\xi'$, og de $\eta^*$, der svarer til intervaller $[L'(\eta^*), L''(\eta^*)]$ helt til højre for $\xi'$, have et fælles '*Höufungspunkt*', $\eta'$. Idet der vilkårligt tæt på $\eta'$ forekommer både $L'(\eta^*) \leq \xi'$ og $L''(\eta^*) \geq \xi'$, må nødvendigvis $L'(\eta') \leq \xi'$ og $L''(\eta') \geq \xi'$, idet $L'$ og $L''$ er nedadtil hhv. opadtil halvkontinuerte. Men så tilhører $\xi'$ alligevel et af intervallerne, nemlig $[L'(\eta'), L''(\eta')]$.

Alt i alt betyder ovenstående, at mængden $D(\xi^*)$ udgør et afsluttet delinterval af $[0, a]$, som von Neumann betegnede $[H'(\xi^*), H''(\xi^*)]$. For at fuldføre beviset godtgjorde von Neumann, at der findes et $\xi^* \in [0, a]$, som også er et $\xi^{**}$, det vil sige et $\xi^*$, for hvilket $H'(\xi^*) \leq \xi^* \leq H''(\xi^*)$. Beviset herfor er helt analogt til beviset for, at $D(\xi^*)$ var et afsluttet interval, idet $H'$ og $H''$ er nedadtil hhv. opadtil halvkontinuerte funktioner. En antagelse om, at intet sådan $\xi^*$ findes, vil betyde, at alle intervaller $[H'(\xi^*), H''(\xi^*)]$ vil ligge helt til venstre eller helt til højre for $\xi^*$. Som før vil begge slags $\xi^*$-er have et fælles '*Höufungspunkt*' $\xi'$, og dette $\xi'$ vil tilhøre intervallet $[H'(\xi'), H''(\xi')]$.

Von Neumann har således vist, at der findes et $\xi^* \in [0, a]$, som opfylder at $\xi^* \in D(\xi^*)$. Idet det betyder, at der findes et $\eta^*$, så $\min_\eta f(\xi^*, \eta) = f(\xi^*, \eta^*)$, samtidig med at $\max_\xi f(\xi, \eta^*) = f(\xi^*, \eta^*)$, indebærer dette at punktet $\xi^*$, $\eta^*$ er et saddelpunkt for $f$. Von Neumann har dermed fuldført beviset for minimaxsætningen.

## Von Neumanns 1928 bevis i relation til fixpunktssætninger og ulighedssystemer

Von Neumanns bevis må i sandhed siges at være *a tour de force* [Heims, 1980, s.91]. Hvad angår de øvrige udtalelser fra sekundærlitteraturen, som jeg citerede inden gennemgangen af artiklen (se s.31), kan man se, at der også siges, at von Neumann '*demonstrates the close connection with fix-point theorems and especially Brouwer's theorem*' [Ingrao og Israel, 1990, s.211], samt at beviset handler om eksistens af en løsning til et system bestående af ligninger og uligheder [Ingrao og Israel, 1990, s.211], [Heims, 1980, s.91]. Jeg synes ikke, disse forhold er særlig indlysende. Von Neumann taler på intet tidspunkt om fixpunkter, og han opstillede ikke noget system af ligninger og uligheder, som skal løses.

Alligevel skriver Kuhn og Tucker i deres omtale af von Neumanns bevis for minimaxsætningen fra 1928, at

> *The analytic proofs of the Minimax Theorem given by von Neumann were of two essentially different types. Proofs of the first type (see [A] and [B]) are based explicitly on extensions of the Brouwers fixed point theorem*; [Kuhn og Tucker, 1958, s.112]

[*A*] er von Neumanns 1928-artikel, og [*B*] er en artikel fra 1937, som jeg vil behandle i næste kapitel. I von Neumanns bevis kan man 'udtrække' et bevis for en udvidelse af Brouwers fixpunktssætning, og dermed kommer eksistensen af et saddelpunkt for funktionen $f(\xi, \eta)$ ud på det samme som eksistensen af et fixpunkt for en 'punkt til mængde' afbildning, eller i nutidig terminologi, et fixpunkt for en korrespondance. Forbindelsen fås på følgende måde:

Von Neumann endte med at vise eksistensen af et $\xi^*$, som opfylder at $\xi^* \in [H'(\xi^*), H''(\xi^*)]$. Sættes $F(\xi^*) = [H'(\xi^*), H''(\xi^*)]$, kan $F$ opfattes som en korrespondance, der sender punkterne $\xi$ i $[0, a]$ ind i mængder $F(\xi)$, som er delintervaller af $[0, a]$. Et punkt $\xi^*$, som ved $F$ afbildes ind i et interval, som indeholder punktet selv, er en slags fixpunkt for korrespondancen. Dermed bliver eksistensen af et saddelpunkt det samme som eksistensen af et fixpunkt for korrespondancen $F$.

Jeg er dog ikke overbevist om, at von Neumann på dette tidspunkt havde indsigt i, at hans bevis for eksistensen af et saddelpunkt giver et bevis for eksistensen af et sådant fixpunkt. I næste kapitel vil jeg vende tilbage til denne diskussion, idet jeg der vil behandle en anden tekst af von Neumann, som underbygger mit synspunkt.

### Minimaxsætningen og ulighedssystemer

I en analyse af, hvilken konsekvens minimaxsætningen har for valg af *Spielmethoden*, betragtede von Neumann mængden $A$ af alle $\xi$, for hvilke $\min_\eta h(\xi,\eta)$ antager sin maksimale værdi $M$, samt mængden $B$ af alle $\eta$, for hvilke $\max_\xi h(\xi,\eta)$ antager sin minimale værdi $M$. Det vil sige:

$$A = \{\xi \in \mathbf{R}^{\Sigma_1} : \min_\eta h(\xi,\eta) \text{ antager sin max. værdi } M\}$$

$$B = \{\eta \in \mathbf{R}^{\Sigma_2} : \max_\xi h(\xi,\eta) \text{ antager sin min. værdi } M\}$$

Det følger da uden videre, at

1. hvis $\xi$ tilhører $A$, så gælder altid $h(\xi,\eta) \geq M$ (thi $h(\xi,\eta) \geq \min_\eta h(\xi,\eta) = M$, idet $\xi$ tilhører $A$),
2. hvis $\eta$ tilhører $B$, så gælder altid $h(\xi,\eta) \leq M$,
3. hvis $\xi$ ikke tilhører $A$, så findes et $\eta$, for hvilket $h(\xi,\eta) < M$,
4. hvis $\eta$ ikke tilhører $B$, så findes et $\xi$, for hvilket $h(\xi,\eta) > M$,
5. hvis $\xi$ tilhører $A$, og $\eta$ tilhører $B$, så er $h(\xi,\eta) = M$.

Det er således klart, argumenterede von Neumann, at $S_1$ skal vælge et $\xi$ tilhørende $A$, og $S_2$ skal vælge et $\eta$ tilhørende $B$. For ethvert sådan valg vil spillet have værdien $M$ for $S_1$ og værdien $-M$ for $S_2$ [von Neumann, 1928, s.305].

Von Neumann gjorde i 1928 ikke mere ud af disse uligheder, men ovenstående kan tolkes derhen, at det drejer sig om at finde $\xi^*$, $\eta^*$, således at ulighederne

$$\xi^* \geq 0, \quad \eta^* \geq 0, \quad \max_\xi h(\xi,\eta^*) \leq M, \quad \min_\eta h(\xi^*,\eta) \geq M$$

og ligningerne

$$\xi_1{}^* + \ldots + \xi_{\Sigma_1}{}^* = 1, \;\; \eta_1{}^* + \ldots + \eta_{\Sigma_2}{}^* = 1$$

er opfyldt samtidigt.

Kuhn og Tucker udleder i deres essay [Kuhn og Tucker, 1958, s.111] følgende forbindelse mellem 'løsninger' $(\xi^*, \eta^*, M)$ til 'minimaxproblemet' og nedenstående system af ligninger og uligheder[11]:

Lader man $g(p,q)$ være elementerne i en matrix $A$, er $h(\xi,\eta) = \xi A\eta$, og en løsning, $(\xi^*, \eta^*)$, til de $2\Sigma_1 + 2\Sigma_2$ lineære uligheder:

$$\xi^* \geq 0, \quad \eta^* \geq 0, \quad A\eta^* \leq M, \quad \xi^* A \geq M,$$

og de to lineære ligninger:

$$\xi_1{}^* + \ldots + \xi_{\Sigma_1}{}^* = 1, \quad \eta_1{}^* + \ldots + \eta_{\Sigma_2}{}^* = 1$$

vil også være en løsning til systemet

$$\xi^* \geq 0, \quad \eta^* \geq 0, \quad \max_\xi h(\xi, \eta^*) \leq M, \quad \min_\eta h(\xi^*, \eta) \geq M,$$

$$\xi_1{}^* + \ldots + \xi_{\Sigma_1}{}^* = 1, \ \eta_1{}^* + \ldots + \eta_{\Sigma_2}{}^* = 1.$$

Løsningen kan således karakteriseres algebraisk som løsning til et system af lineære uligheder og ligninger, men denne forbindelse til ulighedsteori var ikke klart formuleret i 1928. Von Neumann opfattede ikke på dette tidspunkt minimaxsætningen som en sætning om løsninger til ulighedssystemer; denne indsigt kom, som vi skal se i næste kapitel, først senere. Det skal retfærdigvis nævnes, at Kuhn og Tucker ikke påstår, at von Neumann faktisk foretog denne karakterisering i 1928, men de efterlader alligevel det indtryk, at von Neumann arbejdede inden for en ramme af konveksitetsteori, idet de i deres i deres kommentarer til von Neumanns bevis skrev, at '*the notion of quasiconvexity was used*' [Kuhn og Tucker, 1958, s.112]. Det er sandt i den forstand, at egenskaben (**K**) er den måde, man i dag definerer, at en funktion $f$ er quasikonveks, men von Neumann talte ikke om quasikonveksitet i 1928-artiklen. I en senere kommentar til en udtalelse af den franske matematiker Fréchet påpegede von Neumann eksplicit, at forbindelsen til konveks analyse ikke var indlysende i 1928, og at den erkendelse først kom senere. Jeg vender tilbage til denne diskussion i næste kapitel.

# Diskussion

Vurderes Borels spilteoretiske arbejde ud fra minimaxsætningen, må man nok konkludere, at han ikke kom ret langt. Han hældede til en hypotese,

[11] Jeg har ændret Kuhns og Tuckers notation, så den svarer til von Neumanns. Kuhn og Tucker kalder $(\xi^*, \eta^*, M)$ for $(x^0, y^0, v)$.

som er i konflikt med minimaxsætningen, og selv om han i 1926 og 1927 efterlyste en afgørelse, hvilket kan tolkes som om, Borel er blevet i tvivl om gyldigheden af sin hypotese, så kom han ikke ret langt i de teoretiske overvejelser. Jeg mener dog ikke, at man yder Borel fuld retfærdighed, hvis man udelukkende vurderer hans arbejde efter minimaxsætningen eller manglen på samme. Han analyserede en helt ny problemstilling, som ikke tidligere havde været genstand for systematisk matematisk behandling. Han udkrystaliserede elementer, som også i dag er centrale i spilteori så som strategibegrebet og blandet strategi. Godt nok formulerede han en hypotese, som er i strid med minimaxsætningen, men jeg synes ikke, det er så underligt, at hans umiddelbare intuition åbenbart har været, at han ikke kunne forestille sig, at der generelt vil gælde, at man kan vælge sig en strategi, som sikrer, at man ikke taber, selv om modstanderen kender denne strategi.

I artiklen *Divergences in the History of Matematics: Borel, von Neumann and the Genesis of Game Theory* argumenterer Luca Dell'Aglio blandt andet for, at Borel havde en psykologisk fortolkning af begrebet blandet strategi, og at dette

> *... constituted the conceptual basis of Borel's negation of the minimax theorem in his earlier research into game theory.* [Dell'Aglio, 1995, s.21]

Med psykologisk fortolkning henviser Dell'Aglio til den omstændighed, at Borel i sine artikler om spilteori flere gange taler om, at den spiller, som er en bedre psykolog, det vil sige den spiller, som er bedre til at observere og analysere sin modstanders måde at spille på, vil have en fordel frem for en spiller, som ikke observerer sin modstander. Dell'Aglio forklarer Borels standpunkt ved at sammenligne Borels arbejde med von Neumanns og konkluderer, at

> *... the divergence over the validity of the minimax theorem was ultimately due to a difference in the conceptual and technical structure underlying the two theories. In other words, Borel and von Neumann produced different theoretical forecasts because they were working on different basic problems.* [Dell'Aglio, 1995, s.40]

De to forskellige problemer, Dell'Aglio omtaler, fremkommer, mener Dell'Aglio, idet von Neumanns udgangspunkt var '*the possibility of the existence of equilibria in games played by equal players*' [Dell'Aglio, 1995, s.40], mens '*Borel took into consideration a similar problem but supposing one player has acquainted himself with the psychological characteristics of* *his opponent'* [Dell'Aglio, 1995, s. 40]. Minimaxsætningen giver et bekræftende svar på von Neumanns hypotese om eksistens af ligevægt, idet den siger, at der i to-personers nulsum spil eksisterer optimale strategier.

Jeg forstår ikke helt, i hvilken forstand Dell'Aglio mener, at von Neumann og Borel behandler to forskellige problemer. Både von Neumann og Borel havde som udgangspunkt, at man vælger sin strategi uden at vide, hvad modparten gør. I Borels udregninger for tilfældene, hvor der er 3 og 5 ikke-dårlige strategier tilbage, leder han, ligesom von Neumann, efter en strategi, som vil sikre, at man ikke kommer i taberposition, uanset hvad den anden spiller gør. Det vil sige, han leder efter en strategi, hvor resultatet af spillet ikke ændres til ens bagdel, selv om modstanderen kendte ens strategi på forhånd, og i sådan en situation er det ligegyldigt, om den ene spiller er en bedre 'psykolog' end den anden. Jeg mener, at forskellen optræder, fordi Borel i 1921 ikke kan forestille sig, at der generelt kan findes strategier, der er således, at modstanderen ikke kan vælge en vinderstrategi, selv om han kender den andens strategi.

Så vidt jeg kan se, findes den helt afgørende forskel på von Neumann og Borel i deres tilgange til *beviset* for -hhv. forsøg på modbevis/bevis af- minimaxsætningen. Borel så ikke på begge sandsynlighedsfordelinger $\xi$, $\eta$ samtidigt, han betragtede aldrig samspillet mellem de to spilleres samtidige og uafhængige valg af strategier. Det gjorde von Neumann, og det gav anledning til de forskellige minmax hhv. maxmin overvejelser, og det er netop samspillet mellem disse, der leder ham frem til erkendelsen af løsningen som et saddelpunkt. En anden væsentlig forskel mellem Borels og von Neumanns 'beviser' er deres arbejdsmetode. Borel havde en temmelig 'gammeldags' fremgangsmåde. Han betragtede ikke det generelle tilfælde, men arbejdede sig fremad ved at regne på specifikke eksempler. Han forsøgte at finde konstruktive løsninger. I modsætning hertil er von Neumanns matematiske tilgang i høj grad præget af de nye, axiomatiske tendenser i matematisk forskning. Han betragtede det generelle tilfælde, og hans bevis er ikke et konstruktivt bevis for eksistensen af optimale strategier, men et rent eksistensbevis. Det er nok tvivlsomt, hvor begejstret Borel har været for von Neumanns bevis. En tredje forskel på de to slags spilteoriartikler er, at det er meget nemt at følge Borels tanker. Hans noter virker meget, som om de er skrevet, stort set som han har tænkt tankerne; de giver, om man så kan sige, et kig ind i værkstedet. Von Neumanns tekst er derimod fuldstændig blottet for antydninger af, hvordan ideerne er dukket op, og set fra et matematikhistorisk synspunkt er denne axiomatiske fremstillingsform meget slørende for, hvordan ideerne har udviklet sig. Dertil kommer, at von Neumann udover henvisningen til Borel, der blev tilføjet i korrekturlæsningsfasen, ikke henviser til tidligere arbejder hverken af sig selv eller andre.

# Kapitel 3

# Minimaxsætningen i forskellige kontekster

I dette kapitel fortsættes historien om von Neumanns udvikling af minimaxsætningen frem til 1944, hvor den havde en udformning, og havde gennemgået et forløb, som gjorde det muligt for von Neumann at gennemskue sammenhængen mellem lineær programmering og spilteori. Det er en historie om, hvordan minimaxsætningen, nogle gange overraskende, dukker op i forskellige matematiske sammenhænge.

Først gennemgås, hvordan minimaxsætningen dukker op i et arbejde af von Neumann om en matematisk-økonomisk model. Derefter diskuteres von Neumanns kommentarer til dette fænomen i forhold til mine påstande i forrige kapitel om von Neumanns manglende erkendelse af sammenhængen mellem minimaxsætningen og fixpunktssætninger i 1928.

Derefter redegøres der for den udvikling, der resulterede i, at von Neumann i 1944 nåede frem til en forståelse af minimaxsætningens relationer til lineære ulighedssystemer og konveksitetsteori.

Til sidst diskuteres den i indledningen omtalte prioritetsdebat mellem von Neumann og Fréchet.

## Minimaxsætningen dukker op i matematisk økonomi

I forrige kapitel blev det nævnt, at der gik 16 år, fra von Neumann publicerede sit første spilteoretiske arbejde, til han igen publicerede inden for spilteori. Minimaxproblemet derimod stiftede han bekendtskab med igen allerede 4 år senere, ganske vist i en lidt anden iklædning, idet den pludselig dukkede op i en matematisk-økonomisk model, som von Neumann udviklede. Han holdt foredrag om modellen for første gang i vinteren 1932 ved Princeton universitetets matematiske seminar, og 6 år senere blev arbejdet publiceret på opfordring af Karl Menger under titlen *Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes* [von Neumann, 1937] i *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* [Menger, 1937].

## Von Neumanns økonomiske model

Von Neumanns model er en lineær produktionsmodel, hvor han ikke skelnede mellem det, der forbruges, og det, der bliver produceret i produktionsprocessen. Han analyserede en situation, hvor der er $n$ 'varer' $G_1, \ldots, G_n$, og $m$ produktionsprocesser $P_1, \ldots, P_m$. Han lod $y_1, \ldots, y_n$ betegne priserne på varerne $G_1, \ldots, G_n$, mens $x_1, \ldots, x_m$ betegnede den intensitet, hvormed processerne $P_1, \ldots, P_m$ benyttes. Endelig lod han $a_{ij}$ hhv. $b_{ij}$ betegne antallet af enheder, som forbruges hhv. produceres af varen $G_j$ ved processen $P_i$.

Von Neumann var udelukkende interesseret i tilfælde, hvor hele økonomien udvider sig, uden at strukturen ændrer sig, det vil sige tilfælde, hvor forholdene mellem intensiteterne $x_1 : \ldots : x_m$ forbliver uforandret, selvom $x_1, \ldots, x_m$ ændres. I så fald er intensiteterne multipliceret med en fælles faktor $\alpha$ per tidsenhed. Denne faktor kaldes *udvidelseskoefficienten* for hele økonomien [Von Neumann, 1937, s.75]. De ubekendte er intensiteterne, $x_1, \ldots, x_m$, udvidelseskoefficienten, $\alpha$, priserne, $y_1, \ldots, y_n$, på varerne, og $\beta = 1 + \frac{z}{100}$, hvor $z$ er rentefoden i % pr. tidsenhed.

Von Neumanns analyse resulterede i følgende system af uligheder, som skal løses:

$$x_i \geq 0, \tag{3.1}$$

$$y_j \geq 0, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i > 0, \tag{3.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j > 0, \tag{3.4}$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i, \tag{3.5}$$

hvor $y_j = 0$, hvis der gælder skarpt '<'.

$$\beta \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geq \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j, \tag{3.6}$$

hvor $x_i = 0$, hvis der gælder skarpt '>'.

Ulighed (3.5) betyder, at det ikke er muligt at forbruge mere af varen $G_j$ i den totale proces end det, der produceres. Hvis der forbruges mindre, end der produceres, bliver $G_j$ en 'gratis vare', og dens pris $y_j = 0$. Ulighed (3.6) optræder, fordi der ikke er nogen profit i modellen; alt eventuelt overskud geninvesteres. (3.6) betyder, at i ligevægt '=' kan der ikke skabes profit af nogen proces $P_i$, og hvis der er tab, det vil sige '>', vil $P_i$ ikke blive brugt, og dermed $x_i = 0$ [Von Neumann, 1937, s.75-76].

I samspillet mellem på den ene side intensiteterne $x_i$ og på den anden side priserne $y_j$ er der en form for dualitet, som udtrykkes i ulighederne (3.1), (3.3) og (3.5) i de variable $x_i$, $\alpha$ og begrebet 'ubenyttet proces' på den ene side og ulighederne (3.2), (3.4), (3.6) i de variable $y_j$, $\beta$ og begrebet 'gratis vare' på den anden side:

> ... *Die duale Symmetrie ..., scheint bemerkenswert.* [Von Neumann, 1937, s.76]

Dette er von Neumanns eneste kommentar om dualitet på dette tidspunkt, men det viser, at han i 1937 var opmærksom på dualitetsrelationer i forbindelse med visse typer af ulighedssystemer, selv om han ikke efterforskede fænomenet yderligere på dette tidspunkt.

## Løsning af ulighedssystemet

Von Neumann var interesseret i at undersøge, hvornår det opstillede ulighedssystem har løsninger. Hertil omformulerede han først ulighedssystemet til et saddelpunktsproblem, hvilket han derefter igen omdannede til et fixpunktproblem.

Han lod $X = (x_1, \ldots, x_m)$ og $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ være variable opfyldende (3.1), (3.3) hhv. (3.2), (3.4) og betragtede funktionen

$$\phi(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j}$$

Det vil sige forholdet mellem den totale indtægt og de totale omkostninger. Von Neumann argumenterede herefter for, at en løsning af ulighedssystemet (3.1) til (3.6) kommer ud på eksistensen af et saddelpunkt for funktionen $\phi$, og dermed fik han spørgsmålet vedrørende en løsning af (3.1) til (3.6) formuleret som følger:

(*) Betragt $(X, Y)$ i mængden begrænset af (3.1) til (3.4). Find et saddelpunkt $X = X_0$, $Y = Y_0$ for $\phi$. [von Neumann, 1937, s.78]

Dermed fik von Neumann formuleret spørgsmålet om en løsning til ulighedssystemet (3.1) til (3.6) som et spørgsmål om eksistens af et saddelpunkt. Ligesom i spilteori artiklen fra 1928 bliver det afgørende skridt således at vise eksistensen af et saddelpunkt for en vis funktion. I 1928-artiklen gik han, som vi så i forrige kapitel (se s.41), lige til sagen, men her i 1937 viste han i stedet for et 'fixpunkts'-lemma, som er det lemma, der optræder i artiklens titel under navnet *eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes.* Von Neumann viste herefter, at eksistensen af et saddelpunkt for $\phi$ er en umiddelbar konsekvens af dette lemma[1] [von Neumann, 1937, s.80].

## Forbindelsen til minimaxsætningen

Von Neumann var helt klar over sammenhængen mellem spilteoriproblemet og problemet om eksistens af en løsning til ulighedssystemet:

> *Die Lösbarkeit unseres Problems hängt sonderbareweise mit jener eines in der Theorie der Gesellschaftsspiele auftretenden Problems zusammen, das der Verf. anderwärtig behandelt hat ... Jenes Problem ist ein Specialfall von (*) und wird durch unsere Lösung von (*) auf eine neue Weise miterledigt.* [Von Neumann, 1937, s.79, fodnote 2]

Dette er den første udtalte erkendelse af, at der er en sammenhæng mellem løsning af ulighedssystemer og minimaxløsninger i to-personers nulsum spil. Forbindelsen var dog ikke triviel. I 1928-artiklen er der, som det blev pointeret i forrige kapitel, intet, der tyder på, at von Neumann var klar over

[1] Jeg vil ikke komme nærmere ind på dette lemma men blot bemærke, at von Neumann formulerede resultatet på følgende måde: Lad $S^0$, $T^0$ være ikke-tomme, konvekse, afsluttede delmængder af $\mathbf{R}^m$ hhv. $\mathbf{R}^n$. Lad $V$, $W$ være to afsluttede, delmængder af $S^0 \mathrm{x} T^0$. Antag at for hvert $X \in S^0$ er mængden $Q(X) = \{Y | (X, Y) \in V\}$ ikke-tom, afsluttet og konveks. Antag tilsvarende at for hvert $Y \in T^0$ er mængden $P(Y) = \{X | (X, Y) \in W\}$ ikke-tom, afsluttet og konveks. Under disse forudsætninger gælder der, at $V$, $W$ har mindst ét punkt til fælles [von Neumann, 1937, s.79-80].

forbindelsen med ulighedssystemer, og jeg opfatter hans udtalelse fra 1937 om, at løsningen af ulighedssystemet på '*sonderbareweise*' hænger sammen med spilteoriproblemet, som tegn på, at det kom lidt bag på ham. Havde han allerede i 1928 været klar over analogien mellem minimaxløsninger i spilteori og løsning af passende ulighedssystemer, ville han nok ikke ti år senere omtale forbindelsen som '*sonderbar*'.

Von Neumanns bevis for eksistensen af en løsning til saddelpunktsproblemet i 1937-artiklen bygger direkte på et fixpunktresultat, som han formulerede og beviste i samme artikel. Resultatet kaldte han en generalisering af Brouwer's fixpunktssætning, og han lod det indgå i selve artiklens titel. Senere i artiklen fremhævede han yderligere, at resultatet har almen matematisk interesse:

> *Dieser verallgemeinerte Fixpunktssatz ... ist auch an sich von Interesse.* [Von Neumann, 1937, s.73]

I forrige kapitel gjorde jeg rede for, at der i von Neumanns bevis fra 1928 indirekte er et bevis for en udvidelse af Brouwers fixpunktssætning (se s.45). Fixpunktsegenskaber blev dog overhovedet ikke nævnt i 1928, og jeg tror, som nævnt i forrige kapitel, ikke, han var sig denne sammenhæng fuldt bevidst på dette tidspunkt. Havde han været bevidst om fixpunktssætningen i 1928, ville han formentlig have fremhævet denne generalisering allerede på dette tidspunkt. Et andet argument herfor er, at han eksplicit påpegede, at spilteoriproblemet fra 1928 her i 1937 løses '*på en ny måde*'.

## Diskussion

I dette arbejde fra 1937 kan man således se, at von Neumann er klar over, at der er en sammenhæng mellem minimaxløsninger for to-personers nulsum spil, som han udviklede i sin spilteoriartikel fra 1928, og ulighedssystemer. Dertil kommer, at det foregår i en matematisk-økonomisk kontekst. I dette arbejde af von Neumann sker der således en kobling mellem minimaxløsninger, ulighedssystemer og produktionsprocesser, samtidig med at der ses en spirende bevidsthed om dualitetsrelationer i forbindelse med visse typer af ulighedssystemer. Denne sammenknytning af begreberne *minimaxløsninger*, *ulighedssystemer*, *produktionsprocesser* og *dualitetsrelationer* indeholder, som vi senere skal se, alle de essentielle ingredienser til udviklingen af dualitetssætningen i lineær programmering, og de danner en stor del af baggrunden for det matematisk-teoretiske grundlag, som von Neumann udstyrede lineær programmering med i 1947.[2]

[2]Se kapitel 5.

Den historie, der er fortalt indtil nu, kan også tjene som illustration af, hvordan matematik kan udvikle sig: Først opstår et problem (løsning af topersoners nulsum spil) i forbindelse med en ny slags matematiske spørgsmål (spilteori). Problemet løses, og man er i første omgang ikke klar over, hvilke andre grene af matematikken det er forbundet med, og det kan være vanskeligt, måske umuligt, at gennemskue det i starten. Senere dukker problemet eller et lignende problem så op igen i en anden sammenhæng (von Neumanns økonomiske model), og man indser forbindelsen, samtidig med at problemets kompleksitet opløses, og man kan trække det essentielle i bevisgangen ud (fixpunktsteknikker), og nye, generelle resultater (udvidelsen af Brouwers fixpunktssætning) opstår. Resultater, som måske er interessante i sig selv, uden for den specielle ramme de oprindelig blev udviklet i.

# Minimaxsætningen i konveks analyse

Von Neumann fik således koblet minimaxsætninger sammen med ulighedssystemer, men hans bevis for minimaxsætningen byggede ikke på ulighedsalgebra. Det første algebraiske bevis for minimaxsætningen blev publiceret i 1938 og havde rødder tilbage til Borel, som tilsyneladende mistede interessen for spilteori, efter von Neumann publicerede sit første bevis for minimaxsætningen i 1928. Den sidste af Borels noter, som blev behandlet i forrige kapitel, var fra 1927, og vi skal helt frem til 1938, før Borel igen publicerede noget inden for spilteori. Det skete i forbindelse med udgivelsen af bogen *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, hvor Borel skrev et kapitel om spilteori [Borel, 1938a]. Det er bemærkelsesværdigt, at Borel i dette kapitel overhovedet ikke henviser til von Neumanns minimaxsætning, og Leonard tolker dette som en bevidst udeladelse fra Borels side:

> *This can only be regarded as an act of deliberate omission by Borel.* [Leonard, 1992, s.46]

Det betyder dog ikke, at von Neumanns minimaxsætning glimrer ved sit fravær, idet den er behandlet i bogen af en af Borels studerende, Jean Ville, i en note, hvori minimaxsætningen omtales som *Théorème de M. von Neumann.* Ville er gået over i spilteorihistorien som den første, der fandt et algebraisk bevis for minimaxsætningen og dermed startede en udvikling, der førte til etableringen af minimaxsætningen i konveks analyse.

## Jean Villes minimax bevis

Ville betragtede en situation med to spillere $A$ og $B$, der spiller et spil, hvor $A$ kan vælge mellem $n$ strategier $A_1, \ldots, A_n$, og $B$ kan vælge mellem $m$

strategier $B_1, \dots, B_m$. Ved at indføre blandede strategier opstillede Ville den matematiske forventning, $G$, for spiller $B$:

$$G = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i X_j,$$

hvor

$$x_1, \dots, x_n, \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

betegner spiller $A$'s blandede strategi, og

$$X_1, \dots, X_m, \quad X_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} X_j = 1,$$

betegner spiller $B$'s blandede strategi. Ville lod $a_{ij}$ betegne det beløb, der tilfalder spiller $B$, hvis $A$ vælger strategien $A_i$, og $B$ vælger strategien $B_j$. Dermed er $G$ et udtryk for $B$'s matematiske forventning, mens $-G$ beskriver $A$'s matematiske forventning.

Von Neumanns minimaxsætning siger, at der altid findes blandede strategier $X_0$, $x_0$ således, at

$$\max_X \min_x G = G(X_0, x_0) = \min_x \max_X G.$$

Ville vil i denne note

> *donner une démonstration élémentaire de cette proposition.* [Ville, 1938, s.108]

Kernen i Villes bevis er et korollar til følgende sætning om lineære former:

> Lad der være givet $p$ lineære former i $n$ variable:
>
> $$f_j(x) = \sum a_j{}^i x_i \quad (j = 1, \dots, p;\ i = 1, \dots, n)$$
>
> med følgende egenskab[3]:
>
> For alle $x \geq 0$ eksisterer et $j$ i $\{1, \dots, p\}$, således at $f_j(x) \geq 0$.
>
> Så gælder: Der findes mindst et system af ikke-negative koefficienter
>
> $$X_1, \dots, X_p \quad \text{med} \quad X_1 + \dots + X_p = 1,$$

[3]Med $x \geq 0$ menes $x_i \geq 0$ for $i = 1, \dots, n$.

således at

$$\sum_{j=1}^{p} X_j f_j(x) \geq 0 \quad \text{for alle } x \geq 0.$$

[Ville, 1938, s.105]

Ville beviste ovenstående sætning ved først at vise den for to lineære former i $n$ variable, og derefter viste han det endelige resultat ved induktion efter antallet af lineære former.

I sit bevis for von Neumanns sætning brugte Ville følgende korollar, som han udledte direkte af ovenstående sætning:

> Lad $f_1, \ldots, f_p$ være $p$ lineære former i $n$ variable $x_1, \ldots, x_n$, og lad $\phi$ være endnu en lineær form i de samme variable. Hvis i ethvert punkt $x \geq 0$ mindst én af formerne $f_j$ antager en værdi større end eller lig med $\phi$'s værdi, så findes der en linearkombination
>
> $$\psi = X_1 f_1 + \ldots + X_p f_p, \; X_j \geq 0, \; X_1 + \ldots + X_p = 1,$$
>
> således at $\psi \geq \phi$ for alle $x \geq 0$. [Ville, 1938, s.107]

Med dette resultat ved hånden konstruerede Ville følgende bevis for minimaxsætningen. Han betragtede de $m$ lineære former

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ f_m(x) &= a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{nm}x_n. \end{aligned}$$

Idet

$$G = \sum_j X_j \sum_i a_{ij} x_i = \sum_j X_j f_j(x),$$

er det klart, argumenterede Ville, at hvis x allerede er valgt, så bliver

$$\max_{\substack{X_j \geq 0 \\ \sum X_j = 1}} G = \max\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}.$$

Da jo $X_j \geq 0$ og $X_1 + \ldots + X_m = 1$, fås max ved at give mest vægt til den største af konstanterne $f_j(x)$.

Ville lod så $\mu$ betegne tallet $\min_x \max_X G$ og lod $x^0$ være således, at

$$\max_X G(x^0, X) = \mu.$$

Da er $\mu$ defineret ved følgende to betingelser:

**a)** For hvert $x$ findes et $j$, så

$$f_j(x) \geq \mu.$$

**b)** Der findes mindst et $x^0$ således, at for $x = x^0$ har man

$$f_j(x^0) \leq \mu \quad \text{for alle } j,$$

hvilket ikke er svært at vise, og Ville gør da heller ikke noget ud af det. For at kunne bruge sit korollar omformulerede Ville betingelsen **a)** til:

**a')** For hvert $x$ findes et $j$, således at

$$f_j(x) \geq \mu(x_1 + \ldots + x_n), \; x_i \geq 0 \; (i = 1, \ldots, n).$$

Sættes $\phi = u(x_1 + \ldots + x_n)$, sikrer korollaret således eksistensen af ikkenegative koefficienter

$${X_1}^0, \ldots, {X_m}^0; \; \sum {X_i}^0 = 1,$$

således at

$$\sum {X_j}^0 f_j \geq \mu(x_1 + \ldots + x_n).$$

Vælger spiller $B$ dette $X^0$ som sin blandede strategi, vil $B$'s matematiske forventning være

$$G = \sum {X_j}^0 f_j \geq \mu,$$

ligegyldigt hvad A vælger. Men så er

$$G \geq \min_x \max_X G$$

for dette valg af strategier, og da den anden ulighed altid gælder, har Ville hermed bevist, at der findes et 'strategipar', hvor der gælder lighedstegn, og dermed har han vist von Neumanns sætning.

Villes bevis er det første, kendte bevis for minimaxsætningen, som udelukkende bygger på et resultat om lineære uligheder [Leonard, 1992]. Matematikhistorisk set er Villes bevis vigtigt, fordi det belyser en udvikling i beviset for minimaxsætningen henimod teorien om ulighedssystemer og konveks analyse. Det er første gang, minimaxsætningen bevises helt inden for en ramme af ulighedsteori, og som det vil fremgå af næste afsnit, var von Neumanns bevis for minimaxsætningen i spilteoribogen *Theory of Games and Economic Behavior* fra 1944 direkte inspireret af dette bevis af Ville.

## Von Neumann og Morgenstern

Den endelige cementering af spilteori i almindelighed og minimaxsætningen i særdeleshed i en kontekst af lineære uligheder og konveksitetsteori blev foretaget af von Neumann og den østrigske økonom Oskar Morgenstern i deres klassiker *Theory of Games and Economic Behavior* fra 1944 [von Neumann og Morgenstern, 1944]. Ifølge Kuhn og Tucker byggede von Neumanns og Morgensterns bevis for minimaxsætningen direkte på ovenstående bevis af Ville:

> *Oskar Morgenstern has told us that he drew Ville's article to von Neumann's attention after seeing it quite by chance while browsing in the library of the Institute for Advanced Study. They decided at once to adopt a similar elementary procedure, trying to make it as pictorial and simple to grasp as possible.* [Kuhn og Tucker, 1958, s.116]

Morgensterns begejstring over opdagelsen af Villes bevis fremgår tydeligt af hans dagbogsnotater. Juleaftensdag 1941 skrev han om Villes bevis og von Neumanns reaktion herpå:

> *Both* [Borels bog og Villes bevis] *are unknown to Johnny. Now he has discovered additional proofs that are becomming increasingly simple and are purely algebraic!! It necessitates some modification in the text, but we can print it.* (Citeret i [Rellstab, 1992, s.87])

De nye beviser af von Neumann, som Morgenstern omtaler, var helt anderledes end von Neumanns tidligere beviser, og det bevis, der optræder i *Theory of Games and Economic Behavior* er, som vi skal se, et algebraisk bevis, der faldt inden for det, von Neumann og Morgenstern selv karakteriserede som

> *the mathematico-geometrical theory of linearity and convexity.* [von Neumann og Morgenstern, 1944, s.128]

### *The theorem of the Alternative for Matrices*

Det helt essentielle redskab i von Neumann/Morgenstern beviset for minimaxsætningen i 1944 er *The Theorem of the Alternative for Matrices*, som på sin side er et direkte resultat af sætningen om *støttehyperplaner*, som i von Neumanns og Morgensterns bog havde følgende udformning:

> Givet $x_1, \dots, x_p$ tilhørende $\mathbf{R}^n$ samt et $y$ tilhørende $\mathbf{R}^n$, da vil $y$ enten tilhøre det konvekse hylster $C$ af $x_1, \dots, x_p$, eller der findes

> en hyperplan, som indeholder $y$, og således at $C$ er helt indeholdt i et halvrum afgrænset af denne hyperplan. [von Neumann og Morgenstern, 1944, s.134]

Von Neumann og Morgenstern betragtede en $(nxm)$ matrix, som jeg har kaldt $A$, med elementer $a(i,j)$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. Med henblik på at inddrage ovenstående resultat om støttende hyperplaner, som i øvrigt er et af de helt essentielle resultater i konveksitetsteori, konstruerede von Neumann og Morgenstern det konvekse hylster $C$ af de $m$ søjlevektorer i $A$ samt de $n$ basisvektorer i $\mathbf{R}^n$. Idet de satte $y$ lig 0, kunne de slutte, at 0 enten tilhører det konvekse hylster $C$ eller en hyperplan $H$, hvis ene halvrum indeholder $C$. I det første tilfælde viste von Neumann og Morgenstern, at der findes et $x$ i $\mathbf{R}^m$ med $x_1 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0$, $\sum_{j=1}^m x_j = 1$, således at ulighederne

$$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x_j \leq 0$$

er opfyldt for $i = 1, \ldots, n$. I det andet tilfælde, hvor 0 ikke tilhører $C$, viste de, at det gav anledning til en vektor $w$ i $\mathbf{R}^n$ med $w_1 > 0, \ldots, w_n > 0$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, således at følgende uligheder er opfyldt:

$$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)w_i > 0 \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, m.$$

Dertil kommer, at de to muligheder, eller alternativer, som von Neumann og Morgenstern kaldte dem, udelukker hinanden. Formuleret i matrixsprog, udtrykker deres resultat følgende:

> Givet en $(nxm)$ matrix $A$, så har præcis et af følgende to ulighedssystemer en løsning:
>
> $$Ax \leq 0, \quad x \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} x_j = 1,$$
>
> $$wA > 0, \quad w > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$
>
> [von Neumann og Morgenstern, 1944, p.138-141]

De benyttede derefter dette resultat til at bevise minimaxsætningen for to-personers nulsum spil. Idet de bevarede notationen fra von Neumanns 1928-artikel, lod de

$$h(\xi,\eta) = \sum_{p=1}^{\Sigma_1}\sum_{q=1}^{\Sigma_2} g(p,q)\xi_p\eta_q$$

betegne den forventede værdi for spiller $S_1$. Ved at lade $A$ være matricen $(g(p,q))_{(\Sigma_1 \mathrm{x} \Sigma_2)}$, fik de, at der enten findes en vektor $\xi \in \mathbf{R}^{\Sigma_1}$ med $\xi \geq 0$, $\sum \xi_p = 1$, for hvilken

$$\sum_{p=1}^{\Sigma_1} g(p,q)\xi_p \geq 0 \quad \text{for} \quad q = 1,\dots,\Sigma_2, \tag{3.7}$$

eller der findes en vektor $\eta \in \mathbf{R}^{\Sigma_2}$ med $\eta \geq 0$, $\sum \eta_q = 1$, for hvilken

$$\sum_{q=1}^{\Sigma_2} g(p,q)\eta_q \leq 0 \quad \text{for} \quad p = 1,\dots,\Sigma_1. \tag{3.8}$$

Det ses let, at hvis (3.7) holder, vil

$$v_1 = \max_\xi \min_\eta h(\xi,\eta) \geq 0.$$

Hvis derimod (3.8) holder, vil

$$v_2 = \min_\eta \max_\xi h(\xi,\eta) \leq 0.$$

Von Neumann og Morgenstern sluttede således, at man har

$$\text{enten} \quad v_1 \geq 0 \quad \text{eller} \quad v_2 \leq 0$$

og dermed aldrig

$$v_1 < 0 < v_2.$$

De afsluttede beviset med at udlede, at der for et vilkårligt tal $w$ gælder, at man aldrig kan have

$$v_1 < w < v_2.$$

Idet der jo altid gælder $v_1 \leq v_2$, konkluderede von Neumann og Morgenstern, at der må gælde lighedstegn:

$$v_1 = \max_\xi \min_\eta h(\xi,\eta) = \min_\eta \max_\xi h(\xi,\eta) = v_2.$$

Dermed opnåede von Neumann og Morgenstern, at beviset for minimaxsætningen blev reduceret til en simpel konsekvens af sætningen om *Alternatives for Matrices.*

# Prioritetsdiskussion

Von Neumanns og Morgensterns spilteoribog fra 1944 var den første samlede fremstilling af spilteori, og den betragtes i dag som en klassiker inden for feltet. Den franske matematiker Maurice Fréchet opdagede i begyndelsen af 1950'erne Borels spilteoretiske noter, og han fik den amerikanske matematiker Leonard J. Savage til at oversætte tre af Borels noter: 1921-noten, kapitlet i *Théorie des Probabilités* fra 1924, og 1927-noten [Borel, 1953a,b,c]. I introduktionen til den engelske oversættelse tildelte Fréchet Borel æren som ophavsmand til spilteori, hvilket forårsagede en mindre prioritetsdiskussion, idet von Neumann reagerede med en 'modkommentar'. Fréchet skrev i introduktionen:

> *It was only relatively recently that I began to occupy myself with the theory of probability and its applications, which explains why the notes that Emile Borel ... published between 1921 and 1927 on the theory of psychological games escaped my attention. It was chance to begin with...because, in the extensive literature devoted to this theory* [spilteori] *and its applications in recent years, references to earlier work do not lead back, in general, further than to the important paper published in 1928 by Professor von Neumann. But, in reading these notes of Borel's I discovered that in this domain, as in so many others, Borel had been an initiator.* [Fréchet, 1953a, s.95]

I en kommentar, der efterfølger Borels tekster, uddybede Fréchet sin begrundelse for at udnævne Borel som grundlægger af spilteori:

> *Borel was the first to indicate the potential importance for this theory of knowing whether this theorem* [minimaxsætningen], *applied to $n$ manners of playing, is true for arbitrary $n$. He did, moreover, demonstrate it for $n = 3$ and $n = 5$, but only for these values.* [Fréchet, 1953b, s.122]

Fréchet fortsatte med at redegøre for, at selv om Borel i starten tvivlede på, at minimaxsætningen gjaldt, så kan man se en gradvis holdningsændring, når man læser hans noter, og i den sidste note fra 1927 er det hypotesen om, at sætningen gælder, der står først. Dette indlæg af Fréchet startede en kort prioritetsdebat mellem Fréchet og von Neumann, hvilket jeg opfatter som et tegn på, at spilteori på dette tidspunkt, 1953, er blevet betydningsfuldt og er slået igennem som matematisk disciplin. Det er forbundet med anerkendelse at blive udnævnt som *initiator*, hvilket også kan forklare von Neumanns ophidsede reaktion på Fréchets indlæg. L. J. Savage har i et interview med von Neumann-biografikeren Heims fortalt om von Neumanns reaktion:

> *The translator, the young American mathematician L.J. Savage, who liked and admired von Neumann, recalled that he and Fréchet had sent the manuscript to von Neumann, seeking his opinion, 'and von Neumann had been very angry. He phoned me from someplace like Los Alamos, very angry. He wrote a criticism of these papers in English. The criticism was not angry. It was characteristic of him that the criticism was written with good manners.... I feel that if you were going to make a serious biographical analysis of von Neumann, that you would have to take into account that his pride was hurt'.* [Heims, 1980, s.440, note 14]

Von Neumann anerkendte Borel, som værende den første til at udvikle strategibegrebet såvel ren som blandet, men dog kun i tilfældet af symmetriske to-personers spil. Yderligere skrev von Neumann, at

> *The relevance of this concept in his hands was essentially reduced by his failure to prove the decisive 'minimax theorem', or even to surmise its correctness. As far as I can see, there could be no theory of games on these bases without that theorem. ... I felt that there was nothing worth publishing until the 'minimax theorem' was proved.* [von Neumann, 1953, s.124-125]

Det fremgår tydeligt af von Neumanns svar, at han lagde meget stor vægt på minimaxsætningen; den var afgørende for spilteoriens opståen. Fréchet tillagde ikke minimaxsætningen samme vægt, hvilket fremgår af følgende bemærkelsesværdige og interessante kommentar:

> *Again, it may be mentioned, that even if Borel had, before von Neumann, established the minimax theorem in its full generality; the profound originality of Borel's notes would not have been augmented nor even touched from the economic point of view. He would not thereby have even enriched the set of properly mathematical discoveries for which Borel has acquired a world-wide reputation. He would have, like von Neumann, simply entered an open door. ...the same theorem and even more general theorems had been independently demonstrated by several authors well before the notes of Borel and the first paper of von Neumann.* [Fréchet, 1953b, s.122]

De beviser, som Fréchet hentyder til, er af Minkowski, Farkas, Stiemke og Weyl, og de omhandler alle sætninger af samme type som von Neumanns og Morgensterns sætning om *alternatives for matrices*, altså om løsninger til systemer af lineære uligheder[4].

Det er sandt, at minimaxsætningen i 1953 er en simpel konsekvens af disse klassiske sætninger om ulighedssystemer. Men von Neumann opstillede minimaxsætningen for to-personers nulsum spil i en helt anden matematisk kontekst, nemlig i en teori for *Gesellsschaftsspiele* og ikke i en teori for ulighedssystemer. Dertil kommer, at von Neumanns oprindelige bevis fra 1928 benyttede teknikker, som ikke, ved første øjekast, havde det fjerneste at gøre med ulighedssystemer. Det er først i 1938 med Villes bevis, at erkendelsen af minimaxsætningens forbindelse med eksistens af løsninger til ulighedssystemer og dermed teorien om konvekse mængder for alvor slår igennem, en forbindelse som von Neumann og Morgenstern yderligere fremhævede i 1944. Men, som von Neumanns 1928-bevis såvel som hans bevis fra 1937 tydeligt viser, og som von Neumann i øvrigt selv fremhævede i sit svar til Fréchet:

> *This connection may now seem very obvious to someone who first saw the theory after it had obtained its present form. (O. Morgenstern and myself, in our presentation in* 1943, *made, for didactical reasons, every effort to emphasize this connection.) However, this was not at all the aspect of the matter in* 1921 – 1938. *The theorem, and its relation to the theory of convex sets were far from being obvious... It is common and tempting fallacy to view the later steps in a mathematical evolution as much more obvious and cogent after the fact than they were beforehand.* [von Neumann, 1953, s.125]

Fréchet gør sig i denne diskussion til talsmand for, at en matematisk sætnings betydning er uafhængig af den matematik-faglige kontekst, den udvikles i. Historien om von Neumanns forståelse for og udvikling af minimaxsætningen viser, at det krævede et større arbejde og langt fra var trivielt at indse forbindelsen mellem løsninger til lineære ulighedssystemer og optimale strategier for to-personers nulsum spil. Den kendsgerning, at det senere viste sig, at minimaxsætningen er indeholdt i tidligere beviste ulighedssætninger, gør ikke den oprindelige udvikling af minimaxsætningen overflødig eller værdiløs i forhold til matematikkens udvikling, hvilket Fréchet synes at antyde. I hans vurdering af, hvorvidt minimaxsætningen har 'enriched the set of properly mathematical discoveries', savner jeg en vurdering af sætningens betydning for udviklingen af ny matematik. Den faglige sammenhæng,

[4]Se [Farkas, 1901, s.5-7], [Stiemke, 1915, s.340], [Gordan, 1873, s.23-28], [Minkowski, 1896, s.39-45], [Weyl, 1935]. I [Tucker, 1956] er der en 'oversættelse' af disse tidlige resultater til moderne algebra-notation.

et resultat udvikles i, er bestemmende for hvordan resultatet formuleres og fortolkes og kan dermed også være afgørende for, hvilken videre forskning resultatet kan pege frem imod. De spørgsmål, der driver forskningen inden for spilteori, er ikke nødvendigvis de samme, som dem der driver forskningen inden for abstrakt ulighedsteori, og dermed kan minimaxsætningen, betragtet fra et spilteoretisk synspunkt, være meget forskellig fra ulighedssætningerne. Minimaxsætningen endte med at blive en konsekvens af ulighedssætninger, som var bevist før von Neumanns første spilteori arbejde fra 1928, men det betyder ikke, at spilteori nødvendigvis ville have udviklet sig ud fra disse ulighedssætninger, som var formuleret i en helt anden matematisk kontekst, hvor de centrale spørgsmål var helt anderledes end de centrale spørgsmål i spilteori. Von Neumanns minimaxsætning fik stor betydning for den videre udvikling af spilteori, der efter 2. verdenskrig blev et meget aktivt matematisk forskningsfelt.

## Konklusion og vurdering

Hermed er historien om von Neumanns udvikling af minimaxsætningen frem til 1944 fulgt til vejs ende. Det er blevet demonstreret, hvordan von Neumann fandt og beviste sætningen i 1926-27, publiceret i 1928, i forbindelse med udviklingen af spilteori. Hvordan han i 1932, publiceret 1937, igen stødte ind i minimaxsætningen, denne gang i forbindelse med en økonomisk model, hvilket affødte en forståelse for sammenhængen mellem minimaxsætningen og fixpunktssætninger samt en indsigt i, at der under visse omstændigheder er en sammenhæng mellem minimaxsætningen og ulighedssystemer i forbindelse med økonomiske modeller, for til sidst i 1944 at erkende at minimaxsætningen kan fås som en forholdsvis simpel konsekvens af sætningen om støttende hyperplaner i konveks analyse.

Disse analyser af von Neumanns udvikling af minimaxsætningen er præsenteret i afhandlingen, fordi de danner baggrunden for at forstå fremkomsten af dualitetssætningen for lineær programmering. De danner også baggrunden for at forstå det skift, jeg mener, der sker med lineær programmerings videnskabelige status som følge af forbindelsen mellem lineær programmering og spilteori. Dette 'statusskift' argumenterer jeg for i kapitel 5 og 6.

Analyserne af von Neumanns artikler har også ført til, at jeg har tilbagevist de udtalelser, der ellers findes i sekundærlitteraturen, og som jeg har citeret i kapitel 2, om at von Neumann i 1928 viste forbindelsen mellem minimaxsætningen og fixpunktssætninger hhv. lineære ulighedssystemer. Jeg har argumenteret for, at von Neumann ikke i 1928 havde en udtalt forståelse for minimaxsætningens forbindelse med fixpunktssætninger, samt at han ikke opfattede spørgsmålet om eksistens af optimale strategier som et spørgsmål om eksistens af løsninger til visse lineære ulighedssystemer. Jeg har ligeledes konkluderet, at forbindelsen til konveksitetsteori først udkrystalliserede sig i begyndelsen af 1940'erne i forbindelse med udarbejdelsen af *Theory of Games and Economic Behavior.*

Det er min opfattelse, at disse konklusioner står temmelig stærkt. Min argumentation bygger på analyser både af selve artiklerne i den form, som von Neumann fik dem publiceret i, og på analyser af kommentarer fra von Neumann selv, som han indførte i artiklerne på det tidspunkt, hvor han skrev dem, og som jeg derfor regner med, afspejler hans forståelse af de forskellige sammenhænge på det pågældende tidspunkt. Dertil kommer, at jeg kan pege på en kilde, som de udtalelser i sekundærlitteraturen, der giver udtryk for det, som jeg opponerer imod, kan stamme fra, nemlig Kuhns og Tuckers essay fra 1958 om von Neumanns spilteoretiske arbejde, som blev publiceret i et særtryk om von Neumann i forbindelse med hans død. Kuhns og Tuckers essay indeholder en del tekniske beskrivelser og udredninger, men er ikke en historisk fremstilling og analyse af von Neumanns arbejde. Min argumentation for, at forbindelsen til konveksitetsteori først faldt endelig på plads for von Neumann i begyndelsen af 1940'erne, bygger på von Neumanns og Morgensterns egne udtalelser i forening med den udvikling af minimaxsætningen, man kan følge i de publicerede matematiske artikler af von Neumann og Ville. Von Neumanns udtalelser om sagen kommer ganske vist først 10 år senere og i forbindelse med en prioritetsdebat, hvilket indebærer en fare for, at udtalelserne kan bunde i sårede personlige følelser og ikke i historiske fakta. Men von Neumanns udtalelser i 1953 stemmer overens med Morgensterns dagbogsoptegnelser fra den periode, hvor bogen blev beskrevet. Her fremgår det, at den endelige cementering af minimaxsætningen inden for konveksitetsteori først blev rigtig forstået i begyndelsen af 1940'erne. Jeg finder, at det historiske kildemateriale viser, at denne konklusion står stærkt.

Lidt anderledes forholder det sig med spørgsmålet om von Neumanns motivation til at kaste sig over spilteori. Det er forsøgt forklaret ved at sammenholde omstændigheder og tendenser i det videnskabelig miljø, von Neumann opholdt sig i på det tidspunkt, hvor han udviklede sit første spilteoretiske arbejde. Desværre har man ikke fundet udtalelser fra von Neumann eller andre af hans samtidige fra den tid, som kan kaste lys over spørsmålet. Alle argumenter bygger på analyser af eksterne faktorer. Der er ikke påpeget nogle interne forbindelser mellem von Neumanns matematiske arbejder, som direkte kan forklare spilteori artiklen fra 1928, hvilket sikkert skyldes von Neumanns sparsomme henvisninger til andres arbejder. Der peges på axiomatisering af kvantemekanik, og selv om det lyder overbevisende, kan man ikke sige, at der med sikkerhed er påvist en forbindelse.

Derimod anser jeg spørgsmålet om Borels motivation for at være afklaret. Han tilkendegiver selv i en af sine spilteoretiske noter, at inspirationen er kommet fra sandsynlighedsregning, og det understøttes også af den ramme han diskuterer problemet i i sine noter.

Jeg giver også et bidrag til diskussionen, rejst af Dell'Aglio, om, hvorfor von Neumann og Borel har divergerende hypoteser på spørgsmålet om eksistens af 'bedste metode'. Dell'Aglio forsøger at forklare det ved at referere til forskellige psykologiske fortolkninger hos Borel og von Neumann af det begreb, der i dag kaldes for 'blandet strategi'. Det fører til, mener Dell'Aglio, at Borel og von Neumann arbejder på forskellige problemer. Min indvending går på, at jeg på baggrund af analyserne af de matematiske kilder finder, at det er det samme matematiske problem, de arbejder på. Divergerende hyposer i matematikkens udvikling er en interessant diskussion, som jeg dog ikke finder særlig afklaret i forhold til Borel, von Neumann og minimaxsætningen. Mit eget bud på forskellen i Borels og von Neumanns reultater og hypoteser bunder i deres forskellige matematiksyn og -stil, men repræsenterer ikke en endelig afklaring af sagen.

# Kapitel 4

# Den naturvidenskabelige mobilisering og ONR

Det andet uafhængige spor, der sammen med von Neumanns udvikling af minimaxsætningen kom til at fungere som 'tændsats' for dualitetssætningen i lineær programmering og dermed også, som det vil blive klart i kapitel 6, for Kuhns og Tuckers udvikling af ikke-lineær programmering, var en direkte konsekvens af den naturvidenskabelige mobilisering, der foregik i USA under 2. verdenskrig. Dertil kommer, at Kuhns og Tuckers arbejde med teorien for ikke-lineær programmering foregik inden for forskningsprogrammet *Logistics Research Project*, som blev etableret -og økonomisk sponsoreret- af *Office of Naval Research* (ONR), en institution oprettet af den amerikanske flåde umiddelbart efter krigens slutning.

Med det formål at afklare nogle af spørgsmålene om militærets indflydelse på udviklingen af ikke-lineær programmering, samt for at forstå baggrunden for denne indflydelse, vil jeg i dette kapitel gøre rede for den betydning, 2. verdenskrig fik for amerikansk, naturvidenskabelig forskning både under og efter krigen, med speciel fokus på mobiliseringen af matematikerne under krigen, og militærets indflydelse på forskningen i efterkrigstiden via oprettelsen af *Office of Naval Research.*[1]

[1]Dette kapitel bygger på historiefremstillinger, analyser og diskussioner i sekundærlitteraturen angivet i teksten samt publicerede erindringer hovedsagelig af Mina Rees.

# Den naturvidenskabelige mobilisering i USA under 2. verdenskrig

USA kom ud af 2. verdenskrig som verdens førende supermagt med et våben, som man troede ville kunne sikre verdensfreden. Denne udvikling skyldes hovedsagelig en massiv mobilisering af naturvidenskabsfolk i 2. verdenskrig samt en intensiv satsning på forskning og teknologiudvikling i forsvarsteknikker og nye våbentyper. Især spillede fysikere og ingeniører ansat rundt omkring på landets universiteter en afgørende og hidtil uhørt rolle i militære anliggender.

Før 2. verdenskrig brød ud i Europa, var naturvidenskabelig grundforskning i USA hovedsagelig finansieret af store, private fonde dannet af velhavende familier som bl.a. Rockefellerfamilien [Zachary, 1997, s.65]. Den forskning, det offentlige finansierede, var anvendt forskning, som havde umiddelbar nytteværdi og var meget tæt knyttet til det offentliges behov. Forskningen var primært rettet mod landbrugets interesser, geologiske undersøgelser samt hærens og flådens militærforskning. Støtten var hovedsagelig begrænset til ansættelse af forskere i offentlige institutioner [Dupree, 1986, s.213].

Efter 1900 steg støtten fra det offentlige en lille smule, og nye institutter som vejrinstituttet, *National Bureau of Standards* og *The National Advisery Committee for Aeronautics* begyndte at samarbejde med forskere fra universiteterne, især fysikere [Dupree, 1986, s.213]. Den generelle holdning blandt ledende naturvidenskabsfolk i de første årtier af 1900-tallet var dog, at man skulle undgå offentlig støtte, idet man frygtede, at det ville resultere i politisk kontrol af forskningen, hvilket jo ville gå meget dårligt i spænd med idealet om den frie, uafhængige universitetsforskning.

Denne forskningsstruktur ændrede sig radikalt under 2. verdenskrig, hvor forskere som James B. Conant fra *Harvard University*, Karl T. Compton fra *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) og Frank Jewett fra *AT & T's Bell Laboratories* under ledelse af ingeniøren Vannevar Bush organiserede mobiliseringen af civile naturvidenskabsfolk i 2. verdenskrig.

## Vannevar Bush

Vannevar Bush blev i 1919 ansat som professor på MIT i *electrical engineering.*[2] Fra 1932 blev han mere og mere involveret i administrative affærer. To år tidligere var fysikeren Karl T. Compton blevet præsident for MIT. Han udnævnte i 1932 Bush til dekan for *the School of Engineering* og gjorde ham

[2]Dette afsnit bygger på [Zachary, 1997].

til vicepræsident for MIT. Sammen udgjorde Compton og Bush et stærkt, administrativt team.

De øvrige ledende forskere, der sammen med Bush satte dagsordenen for naturvidenskabelig forskning under 2. verdenskrig, James Conant og Frank Jewett, mødte Bush i komiteen for *Scientific Aids to Learning*. Det var en komite nedsat af *Carnegie Corporation*, som skulle undersøge mulighederne for at benytte videnskabelige landvindinger i læreprocesser. Komiteen lavede ikke noget, der fik den store betydning for læreprocesser, men den placerede Bush i et miljø, hvor han kunne diskutere internationale affærer med to af USAs førende *science statesman*, nemlig Conant og Jewett. Conant var uddannet kemiker og præsident for Harvard. Frank Jewett var fysiker og chef for *AT & T's Bell Laboratories*, som udgjorde USAs førende, industrielle laboratorium [Zachary, 1997, s.79].

Conant og Bush delte den samme bekymring om Tysklands voksende, militære styrke. Bush indså tillige de teknologiske muligheder, der kunne gøre en fremtidig krig ganske forfærdelig, og var af den overbevisning, at USA manglede evnen til at holde trit med våbenudviklingen, et emne som civile ellers ikke blandede sig i. Den generelle holdning blandt civile var, at disse forhold kun vedkom militærfolk; en holdning, der til fulde blev delt af militæret. De militære laboratorier var domineret af officerer, som gjorde det klokkeklart, at videnskabsfolk og ingeniører ansat i deres laboratorier blev betragtet som tilhørende en lavere kaste i samfundet. Når kontrakter blev udformet, var betingelserne og formålene kontrolleret af officerer, som oftest havde en meget rudimentær forståelse for og af videnskab [Zachary, 1997, s.80].

I modsætning hertil var Bushs generelle holdning, at man blev nødt til at involvere civile forskere i våben- og forsvarsforskning i en erkendelse af, at det var teknologisk overlegenhed, der ville blive udslagsgivende, hvis USA blev involveret i krigen, og i en erkendelse af, at hæren ikke selv ville være i stand til at levere en sådan forskning. I slutningen af 1935 begyndte Bush så småt offentligt at slå til lyd for militær oprustning. Hans mulighed for politisk indflydelse i forskningsspørgsmål blev betydeligt forbedret, da han i 1939 blev udnævnt til John Merriams efterfølger som præsident for *the Carnegie Institution* i Washington. Det var via sin position hos Carnegie, at Bush lærte at begå sig i Washington og fik kontakt til indflydelsesrige personer også i militæret.

## NDRC og OSRD.

En af Bushs visioner var at udvikle en organisationsstruktur, som ville gøre naturvidenskabelig forskning inden for krigsførelse, forsvar og våbenudvikling mere effektiv[3]. Han forestillede sig et samarbejde mellem militæret, industrien og universiteterne.

Et af de store problemer var at overbevise flåden og hæren om, at det kunne betale sig at gå efter fælles løsninger på tekniske problemer. Flåden og hæren havde det med at holde ting hemmelige for hinanden. Der var ikke rigtig noget samarbejde, og der var stor træghed i systemet med hensyn til at inddrage nye, teknologiske landvindinger inden for f.eks. radarteknologi. Bush mente, at det var nødvendigt at inddrage civile forskere, hvis der skulle udvikles nye våbentyper. Han ønskede sig en forskningsorganisation, som var helt og fuldt allokeret til forsvarsarbejde. Organisationen skulle være sammensat af civile forskere, som var uafhængige af militæret. Den skulle kunne skære igennem de linier, der skilte flåden og hæren, og vigtigst af alt, den skulle have magt nok til at kunne tvinge forsvaret til at benytte nye opfindelser.

I juni 1940 mødtes Bush med præsident Roosevelt for at diskutere sin plan, og Roosevelt gav grønt lys, hvilket resulterede i oprettelsen af *National Defense Research Committee* (NDRC). Komiteen var stort set uafhængig af kongressen, havde sine egne fondsmidler og var kun direkte ansvarlig over for præsidenten. Aldrig tidligere havde man forestillet sig, at civile kunne komme til at spille en så stor rolle i militære affærer.

Bush kunne selv sammensætte bemandingen af NDRC, og han valgte ikke overraskende Compton, Conant og Jewett. Dertil kom også fysikeren Richard Tolman fra *Caltech*, som forbandt Washington med forskningsinstitutionerne vest på. Der var tre repræsentanter fra det offentlige: Coe, som var patent kommisær, Harold G. Bowen, som var *Rear Admiral* og flådens forskningschef samt George V. Strong der var *Brigade General* i hæren. En af de første hurdler for Bushs nye komité var at få en dialog i gang mellem flåden, hæren og civile forskere. Det skulle diskuteres, hvilken forskning flåden og hæren ønskede, der skulle udføres, samt undersøges, hvilke forskere der var bedst egnet til de forskellige projekter.

En anden overraskelse ved Bushs forskningsorganisation var den måde, forskerne blev involveret på. I stedet for at bygge laboratorier og ansætte forskere som offentligt ansatte designede Bush et kontraktsystem. Forskerne skulle blive, hvor de var, i deres egne laboratorier på universiteterne og i industrien og skulle så arbejde for forsvaret bundet af kontrakter. I praksis fungerede det sådan, at man udså sig en forsker, man mente ville være i stand til at løse opgaven. Vedkommende blev så kontaktet af NDRC, og en kontrakt blev oprettet. Vedkommende forsker blev *principal investigator* på projektet og kunne selv hyre det personale, der skulle arbejde sammen på

[3]Dette afsnit bygger hovedsagelig på [Zachary, 1997].

projektet. Typisk deres egne tidligere *graduate* studerende.

Et vigtigt element ved NDRC var uafhængigheden af militæret. I princippet kunne NDRC nægte at arbejde på et projekt, som forsvaret ville have udført, og de kunne på den anden side tillade sig at gennemføre projekter, som forsvaret ikke ønskede. Men det var også klart, at uden samarbejde med forsvaret ville NDRC hurtigt miste sin eksistensberettigelse.

I maj 1941 gav Roosevelt tilladelse til oprettelsen af paraplyorganisationen *Office of Scientific Research and Development* (OSRD), som under sig bl.a. havde NDRC, en afdeling for medicinsk forskning og en afdeling for *fuse research.* Bush blev udnævnt til leder af OSRD, som blev finansieret fra kongressen. I forhold til NDRC var Bushs autoritet mht. OSRD udvidet til også at omfatte selve fremstillingen af nye våbentyper udviklet af forskerne, hvilket betød, at man ikke var afhængig af militærets velvillighed i spørgsmålet om, hvorvidt et nyudviklet våben skulle fremstilles. OSRD havde hjemmel til selv at bygge våbnene og kunne derefter demonstrere dem for forsvaret. En af OSRDs største successer var deres radarlaboratorium, som kom til at ligge på MIT. Radarlaboratoriet havde stor succes med anti-ubåds krigsførelse. Der var en del problemer i starten, fordi flåden nægtede at benytte det nye udstyr udviklet af forskerne på radarlaboratoriet. Men da flåden endelig begyndte at bruge det, vandt de allierede ubåds-krigen i løbet af kort tid.

## Mobilisering af matematikerne

Buhs var ingeniør, Conant var kemiker, Jewett og Compton var fysikere - matematikerne glimrede ved deres fravær! Der var ingen matematikere blandt initiativtagerne til den omfattende mobilisering og koordinering af naturvidenskabsfolk under 2. verdenskrig. Matematik var heller ikke på programmet i OSRD, og der var oprindelig ingen afdeling for matematik i NDRC. Det betød ikke, at matematikerne ikke bidrog til krigsarbejdet, men arbejdet blev oprindelig udført af matematikere, som de forskellige enheder i militæret ansatte på egen hånd. Der var i starten ingen samlet organisering af matematikernes krigsaktiviteter.

Den langsomme mobilisering af universitetsmatematikerne var ikke et udtryk for, at matematikerne på landets universiteter ikke fandt det vigtigt, at matematik ydede et bidrag til krigsarbejdet. Tværtimod var man godt klar over, at matematiks andel i de eventuelle offentlige bidrag til naturvidenskab, som højst sandsynlig ville komme efter krigen, i høj grad afhang af, hvor godt man kunne argumentere for vigtigheden af matematikernes bidrag under krigen. Allerede ved krigens udbrud i Europa i 1939 etablerede matematikerne, det vil sige lederne i *American Mathematical Society* (AMS) og *Mathematical*

*Association of America* (MAA), *the War Preparedness Committee*, som havde til formål af gøre matematikere opmærksomme på krigsrelevante problemer [Price, 1988b, s.393]. Marston Morse var formand, og kendte matematikere som John von Neumann og Norbert Wiener var medlemmer af underkomiteer og konsulentgrupper. På trods af flere forsøg på at gøre lederne af OSRD opmærksomme på AMS's bestræbelser, formåede matematikerne ikke at få matematik indlemmet i OSRD's aktiviteter.

I marts 1942 arrangerede Morse og Marshall Stone fra Harvard et møde med Bush, Conant og Jewett, hvor de præsenterede dem for et notat, *Mathematics in War*, og forsøgte at få OSRD og NDRC til at gøre foranstaltninger til at øge mobiliseringen af landets matematikere [Owens, 1989, s.294]. Men først i slutningen af året 1942 blev *The Applied Mathematics Panel* (AMP) oprettet i et forsøg på yderligere mobilisering og samlet koordinering af matematikerne og deres tjenester for militæret.

Warren Weaver, som oprindelig havde fungeret som bestyrer for matematisk institut på Wisconsins universitet, blev i 1934 direktør for *Rockefeller Foundations* afdeling for naturvidenskab. Han færdedes i de samme kredse i Washington som Bush, der i 1942 udnævnte Weaver til leder af AMP. Fremgangsmåden for ansættelser af folk i AMP var baseret på kontrakter efter samme mønster som oprindelig udviklet af NDRC. Panelet bestod udover Warren Weaver af Richard Courant, G. C. Evans, T. C. Fry, L. M. Graves, Marston Morse, Oswald Veblen og S. S. Wilks [Rees, 1980, s.609].

På trods af at AMP blev oprettet i slutningen af 1942, kunne man et år efter læse i *Time Magazine*, at

> *the U.S. has been severely handicapped by its shortage of topflight mathematicians.* (Citeret i [Owens, 1989, s.293])

Den dårlige reklame i et så udbredt tidsskrift prellede ikke af på matematikerne. Marston Morse, som på det tidspunkt var præsident for AMS, røg i blækhuset:

> *The actual fact is that the deficiency lies... in the failure of the civilian authorities to use mathematics at an early time, in adequate numbers and in the proper way.* (*Time Magazine* 20. december 1943, citeret i [Owens, 1989, s.293])

Marshall Stone fra Harvard kontaktede Warren Weaver, som var leder af *the Applied Mathematics Panel*, med en henvisning til, at udtalelser, som den i *Time Magazine*, kun kunne skade matematikernes offentlige omdømme og

> *cause future damage to the development of mathematics in the United States and perhaps in the rest of the world as well.* (Brev fra Stone til Weaver dateret 28. november 1943, citeret i [Owen, 1989, s.293].)

## Matematik i 2. verdenskrig

Matematikernes arbejde under krigen spændte vidt og inkluderede emner som operationsanalyse, ballistiske problemer, kvalitetskontrol, numerisk analyse, kryptografi samt konsulentbistand på en lang række problemer [Price, 1988b, s.382]. Hvad angår selve AMP, som var den største enhed for organisering af matematisk arbejde under krigen, dannede panelet kontrakter med 11 universiteter, hvoriblandt de mest prestigefyldte var Harvard, Princeton, Columbia, New York og Berkeley [Rees, 1980, s.609]. I løbet af de to et halvt år, AMP eksisterede, var mere end 300 matematikere involveret i aktiviteter, som panelet var ansvarlige for. I alt overvågede AMP godt 200 projekter, hvoraf ca. halvdelen var kommet i stand via direkte forespørgsler fra militærets forskellige sektioner. På Brown Universitet var arbejdet koncentreret om klassisk dynamik, på New York Universitet var det centreret om sammenpresselige væskers dynamik, og på Harvard arbejdede man med undervandsballistik [Rees, 1980, s.611-612]. Størstedelen af panelets arbejde foregik på Columbia Universitet. Her var de tre store grupper *Applied Mathematics Group*, *Statistical Research Group* og *Bombing Research Group* placeret [Owens, 1989, s.289].

Den generelle vurdering i løbet af krigen var, at matematikerne havde leveret et betydningsfuldt bidrag til krigsarbejdet [Price, 1988b, s.382]. Owen tilskriver militærets voksende erkendelse af matematikernes betydning som en af AMP's store successer [Owen, 1989, s.300]. En af de involverede matematikere, J. Barkley Rosser, som arbejdede under NDRC's *rockets program*, peger især på den begejstring, som operationsanalyse vakte:

> *At the beginning of OR* [operations research], *during the War, it was mathematics .... The Air Force Generals and Navy Admirals thought it was wonderful stuff. You could not have convinced one of them that it was not mathematics. Indeed, the Generals made special arrangements with the Applied Mathematics Group (AMG) at Columbia to recruit more mathematicians, teach them OR, and send them out to the field.* [Rosser, 1982, s.510]

Som det fremgår af citatet, blev operationsanalyse på dette tidspunkt, i visse kredse, betragtet som matematik[4].

[4]Dette uddybes i kapitel 7, hvor den operationsanalytiske kontekst diskuteres.

Under krigen var der adskillige hundrede matematikere involveret. De arbejdede 6 dage om ugen med problemer relateret til matematik. Hvorvidt dette arbejde også havde indflydelse på matematikkens udvikling, er der delte meninger om. Der er især to, som har ytret sig om dette emne, nemlig Mina Rees og J. Barkley Rosser. Begge var matematikere af uddannelse. Rosser arbejdede, som beskrevet ovenfor, som matematiker i en af NDRC's afdelinger. Rees fungerede som teknisk assistent for Warren Weaver i AMP og var således mest involveret i administration. Rosser har i et foredrag, publiceret i *Notices of the American Mathematical Society*, givet en beskrivelse af den matematik, der blev lavet under krigen [Rosser, 1982]. Rees har givet sin vurdering i adskillige foredrag og erindringer [Rees, 1977a,b, 1980], [Albers og Alexanderson, 1985].

Rees fremhæver adskillige eksempler på ny matematik udviklet i forbindelse med krigen og understreger flere steder, at der kom meget vigtig og interessant matematik ud af krigsarbejdet. Det meste af det arbejde, som blev lavet i AMP, handlede om forbedringer af udstyr ved passende ændringer af design eller om bedste udnyttelse af eksisterende udstyr især inden for luftkrigsførelse. Hun pointerer, at det ofte skete, at '*a considerable development of basic theory was needed*' [Rees, 1980, s.611]. Hun giver et eksempel fra arbejdet med de matematiske aspekter af sammenpresselige væskers dynamik, hvor gruppen på *New York University* skrev en *Shock Wave Manual*, som blev publiceret i 1944. På Brown sad der også en gruppe matematikere ansat af AMP, og om deres arbejde skriver Rees:

> *the mathematical output of the Brown group was substantial.* [Rees, 1980, s.612]

Hendes vurdering af det, der kom ud af statistik og sandsynlighedsregning, er også meget positiv, og hun fremhæver det som ny teoriudvikling.

Rossers beskrivelse af den matematik, der blev lavet under 2. verdenskrig, er noget anderledes. Han skrev til næsten alle de matematikere, der havde deltaget i krigsarbejdet, og de fleste af dem, der svarede, skrev, at de faktisk ikke lavede noget matematik under krigen. Rossers egen vurdering er, at på nær i kryptografi

> *hardly any of the mathematics done for the War effort was of a higher level than this* [the content of a junior year course in mathematics], *and much was on a lower level.* [Rosser, 1982, s.509]

Rosser mener dog ikke dermed, at matematik ikke spillede nogen rolle for krigsudviklingen, tværtimod. Hans pointe er, at set som matematisk teoriudvikling, kom der ikke noget nyt frem, bortset fra i kryptografi

> *although mathematics pervaded all the scientific studies, and was often indispensable for progress, the problems, considered as mathematics, were seldom very formidable.* [Rosser, 1982, s.512]

Forskellen på Rossers og Rees' vurderinger af krigens betydning for matematikkens udvikling kan skyldes, at de fleste matematikere hyret under krigen oprindelig var 'rene' matematikere, og det er dem, der har svaret på Rossers breve. Der var en tendens til at betragte anvendt matematik som værende ikke rigtig matematik. Rees havde et bredere syn på matematik og anerkendte nye gennembrud i anvendt matematik som betydningsfulde for matematikkens udvikling.

Rees og Rosser er dog enige om, at matematikerne udførte en vigtig funktion i krigsarbejdet, en funktion der var anerkendt og værdsat af de militære enheder og vigtig nok til, at man fra militærets side ønskede at fastholde denne aktivitet i fredstid.

# Fredstidsforskning

Efterhånden som det blev klart, at krigen nærmede sig sin afslutning, begyndte man mange steder at bekymre sig om en politik for efterkrigstidsforskning. Det havde lige fra starten været klart, at OSRD var en nødorganisation, som ville blive afviklet med krigens slutning. Man var bekymret for, at den vitalitet og fart, der havde været over krigstidsforskningen, ville fordufte i efterkrigstiden [Rees, 1977a, s.104]. Spørgsmålet om et fortsat samarbejde mellem militæret og universiteterne blev diskuteret på højt plan i regeringen. Flådesekretær James V. Forrestal bragte allerede før krigen sluttede spørgsmålet helt til tops. I sin årlige rapport til præsidenten i 1945 fremhævede han, at man burde støtte flådens forskning:

> *In peace, even more than in war, scientists owe to their nation an obligation to contribute to its security by carrying on research in military fields. The problem which began to emerge during the 1944 fiscal year is how to establish channels through which scientists can discharge this obligation in peace as succesfully as they have during the war... The Navy believes the solution to this problem is the establishment by law of an independent agency devoted to long-term, basic military research, securing its own funds from Congress and responsive to, but not dominated by, the Army and Navy... The Navy so firmly believes in the importance of this solution to the future welfare of the country that advocacy of it will become settled Navy policy... The Navy feels so deeply about the*

> *importance of the solution of this problem, that it requests your intervention, guidance and support on this problem, which transcends the responsibility and authority of any single department.* (Citeret i [Rees, 1977a, s.104])

Forrestals rapport reflekterede en generel overbevisning inden for militæret og regeringen om, at landet måtte være stærkt rent videnskabeligt, hvis det skulle gøre sig forhåbninger om at være stærkt rent militært. Krigen havde gjort det klart, at forberedelse og især videnskabelig parathed ville blive de vigtigste faktorer i militær styrke. I 1944 bemærkede Bush:

> *if we had been on our toes in war technology ten years ago, we would probably not have had this damn war.* (Citeret i [Schweber, 1988, s.11])

På opfordring af præsident Roosevelt udarbejdede Bush i 1944 en plan for organiseringen af efterkrigstidsforskning og -uddannelse. Rapporten blev afleveret til præsident Truman i 1945. Bush gav den titlen: *Science: The Endless Frontier*, og den indeholder en plan for offentlig financiering af naturvidenskabelig forskning. Dels skulle der gives stipendier til *graduate* studerende for at udfylde det hul på 4 år, som krigen havde skabt, dels skulle medicinsk forskning støttes ligesom våbenforskning, idet den praksis, der var dannet under OSRD, skulle fortsætte. Derudover skulle der oprettes en *National Science Foundation*, der skulle fortsætte OSRD's forskningskontrakter og fungere som en pengetank for offentlig finansiering af uafhængige universiteter og industrier [Dupree, 1986, s.213]. Et af hovedpunkterne i Bushs rapport var betydningen af grundforskning:

> *basic research leads to new knowledge. It provides scientific capital. It creates the fund from which the practical applications of knowledge must be drawn. ... today it is truer than ever that basic research is the pacemaker of technological progress. ... A nation which depends upon others for its new basic scientific knowledge will be slow in its industrial progress and weak in its competition in world trade, regardless of its mechanical skill.* (Citeret i [Schweber, 1988, s.14])

Videnskabsfolk i *the National Science Foundation* skulle afgøre, hvilke grundforskningsprojekter der kunne opnå støtte [Dupree, 1986, s.214].

Det var Bushs ambition at kontrollere militærteknologi via et civilt råd, bestående hovedsagelig af uafhængige videnskabsfolk [Schweber, 1988, s.9]. Han havde håbet, at videnskabsfolk ville få en direkte linje til præsidenten og dermed opnå indflydelse på toppolitiske beslutninger. Det skete ikke. I 1986 eksisterede regerings-universitets samarbejdet stadig, men stort set uden repræsentanter fra det videnskabelige samfund i politiske beslutninger på højt plan [Dupree, 1986, s.216].

## Office of Naval Research

Det nationale forskningsråd lod vente på sig, og i 1946 dannede flåden i stedet *Office of Naval Research* (ONR), som i de efterfølgende 4 år blev hovedsponseren for offentlig støttet forskning. I det følgende kommer en forholdsvis lang historie om ONR's tilblivelse. ONR's historie er vigtig af flere grunde. For det første blev ikke-lineær programmering udviklet inden for et forskningsprojekt oprettet og støttet af ONR. For det andet blev ONR modellen, efter hvilken offentlig støtte til universitetsforskning i USA kom til at fungere, og for det tredje afslører begivenhederne, der førte til ONR's oprettelse, hvordan flåden i de første år efter krigen, nærmest ved en tilfældighed, kom til at finansiere fri, uafhængig grundforskning.

Fra 1946 til 1950 ydede ONR støtte til lovende naturvidenskabelige projekter, der ikke nødvendigvis var retfærdiggjort i forhold til eksplicit, forventet offentlig udbytte, og stort set befriet for overvejelser om mulige militære anvendelser. ONR's støtte blev givet ud fra vurderinger inden for den videnskabelige disciplin selv, og der var ingen udtrykkelige krav knyttet til bevillingerne [Sapolsky, 1979, s.386], [Schweber, 1988, s.8].

Man kan godt undre sig over, hvorfor flåden var interesseret i at yde betydelig finansiel støtte til grundforskning uden direkte militær anvendelse. Det var dog heller ikke oprindelig meningen med ONR. Ifølge B. S. Old, som deltog i planlægningen og oprettelsen af ONR, begyndte det hele allerede, da OSRD blev dannet i 1941 [Old, 1961]. H. G. Bowen, som var *Rear Admiral*, havde lige fra starten af Bushs oprettelse af NDRC, og senere af OSRD, været hidsig modstander af civile videnskabsfolks indblanding i militære anliggender. Oprettelsen af OSRD fik flådesekretær Frank Knox til at foranstalte en undersøgelse af, hvad flåden kunne gøre for at effektivere sin egen forskning og udvikling. Det udløste en intern strid i flåden. Bowen gik ind for, at al forskning i flåden skulle centreres i flådens eget forskningslaboratorium, som han var leder af, mens andre mente, at det skulle høre under *the Chief of Naval Operations.* Bowen havde ved flere lejligheder angrebet Bush offentligt, hvilket fik Bush til at overtale flådesekretær Frank Knox til at udnævne MIT-professoren Hunsaker til at mægle i striden. Det endte med, at Bowen røg ud i kulden og mistede kontrollen med flådens egne laboratorier [Zachary, 1997, s.126-127].

Som følge af Hunsakers rådgivning oprettede flåden i 1941 *the Office of* *the Coordinator of Research and Development*, som fik til opgave at rådgive om flådens forskning. Dette organ fungerede stort set som mellemled mellem NDRC og flåden. Tilknyttet denne rådgivningsgruppe var 4 unge officerer, de såkaldte *Bird Dogs*, og det var dem, der udviklede det koncept, der senere blev til ONR. Disse *Bird Dogs* var blevet trænet af Hunsaker i forskningsplanlægning og var tilhængere af det system, der blev anvendt i OSRD. De mente, at det, flåden havde brug for for at strukturere og effektivisere sin efterkrigstidsforskning, var et kontor, som skulle samarbejde med civile videnskabsfolk og koordinere forskning i våbenudvikling [Sapolsky, 1979, s.381].

*The Bird Dogs* planer var dog lige ved at kuldsejle, idet der, lige inden krigen sluttede, skete en del omrokeringer i flåden. James V. Forrestal blev flådesekretær, og han udnævnte Bowen til chef for forskningsplanlægningen i flåden, og dermed var der ikke meget håb tilbage for *the Bird Dogs* planer. Men det kom til at gå helt anderledes.

Bowen var nemlig meget interesseret i at få adgang til Manhattan projektet. Bush havde aktivt sørget for, at flåden blev holdt uden for atombombeprojektet, og Bowen var nu meget opsat på at få indblik i og indflydelse på kernefysik. En stor del af de civile forskere, der var tilknyttet Manhattanprojektet, var meget utilfredse med hærens ledelse af deres forskning, og efter krigen strømmede disse forskere, hovedsagelig fysikere, tilbage til deres universiteter. Forskerne var dog stadig meget ivrige efter at fortsætte deres forskning, hvilket gav Bowen en chance, som han til fulde forstod at udnytte. Lige så indædt modstander han tidligere havde været af civile forskeres indblanding i militære affærer, lige så ivrigt betragtede han dem nu som nyttige allierede og blev hurtigt deres mæcen [Sapolsky, 1979, s.383]. Først sørgede Bowen for, at ONR blev oprettet i august 1946. Derefter hyrede han *the Bird Dogs* og andre, som havde kendskab til og erfaring med forskningsverdenen. Det gjaldt om at udarbejde et finansieringssystem, som var spiseligt for videnskabsfolkene, så de var villige til at modtage støtte fra flåden.

Nu gik det hverken værre eller bedre, end at Bowen hurtigt gik af, og dermed afgik også hans visioner om at føre flåden ind i atomalderen. Han havde været meget hemmelighedsfuld med hensyn til sine planer om at vinde kontrol over atomforskningen. Da han forsvandt, var ONR's mission praktisk talt overladt til dets personale, som var rekrutteret specielt med henblik på at designe et forskningsprogram, der kunne accepteres af civile forskere og deres universiteter. Universiterne gav udtryk for en del bekymringer. Conant frygtede, at hemmeligstemplet forskning ville bane sig vej ind på universiteterne i fredstid. På MIT var man bange for, at offentlig støtte skulle vise sig at være den mest ustabile form for universitetsstøtte, og *the National Academy of Science* var bekymret for, at offentlig støtte ville føre til offentlig kontrol af universiteternes forskning [Sapolsky, 1979, s.385].

ONR imødekom disse bange anelser ved at tillade åben publikation af forskningsresultater, ved at understrege deres interesse i grundforskning, ved at vælge en meget fleksibel kontraktform, ved at love fortsat støtte og endelig ved at involvere forskerne selv i forskningsplanlægningen [Sapolsky, 1979, s.385].

ONR's rapport fra 1949 giver et lille indblik i, hvor omfattende støtten var:

> *the huge university research program of the Navy Department is the greatest peacetime cooperative undertaking in history between the academic world and the government. This significant educational and scientific experiment now embraces approximately 1200 projects in about 200 institutions with a total expenditure of approximately $ 20,000,000 a year. Nearly 3,000 scientists and 2,500 college and university graduate students are actively engaged in basic research projects in the many fields of vital interest to the Navy. These projects were neither requested nor assigned by the Navy. The original proposal were initiated by the investigators.* (Citeret i [Schweber, 1988, s.17])

De andre militære enheder oprettede efterhånden også deres egne forskningskontorer, således at udover flåden også hæren og luftvåbnet finansierede universitetsforskning. Militære organisationer var indtil 1960 den største offentlige sponsor af universitetsbaseret forskning, men derefter overtog *the National Institute of Health* og derefter *the National Science Foundation*, som blev oprettet i 1950, rollen som hovedsponsor. Militærets støtte til universitetsforskning toppede i midten af 1960'erne og har været faldende lige siden [Sapolsky, 1979, s.379].

Den frie forskning, som flåden via ONR støttede i de første 4 år efter krigen, ændrede langsomt karakter. Der blev efterhånden lagt større og større pres på fra flådens side om kun at støtte forskning, der var direkte anvendelig for flåden.

# Kapitel 5

# Lineær programmering -fra problem til teori

I dette kapitel vil det blive klart, i hvilken forstand udviklingen af lineær programmering i USA var et produkt af den naturvidenskabelige mobilisering under 2. verdenskrig. I forrige kapitel skrev jeg, at Mina Rees' meget positive vurdering af betydningen af den matematik, der blev udviklet i forbindelse med 2. verdenskrig, bl.a. beroede på, at hun anerkendte nye gennembrud inden for anvendt matematik som vigtige for matematikkens udvikling. Starten på lineær programmering i USA kan betragtes som et sådant gennembrud. Teorien blev udviklet af matematikeren George B. Dantzig, og baggrunden herfor var Dantzigs ansættelse i det amerikanske luftvåben under krigen.[1]

I første halvdel af kapitlet vil jeg fortælle historien om Dantzigs udvikling af lineær programmering, og dermed afsluttes forløbet af det andet, uafhængige spor, der førte frem til dualitetssætningen i lineær programmering.[2] I anden halvdel af kapitlet forenes de to spor ved John von Neumanns mellemkomst, og her diskuteres hans rolle i sammensmeltningen af lineær programmering og to-personers nulsum spil samt dets betydning for opdagelsen af dualitetssætningen.

[1]Den russiske matematiker og økonom Kantorovich publicerede i 1939 artiklen *Mathematical Methods of Organizing and Planning Production*, Leningrad University, (på russisk) som omhandler et løsningsforslag på et industrielt problem. Heri opstillede Kantorovich en lineær programmeringsmodel. For læsere, der er interesserede i forhistorien til lineær programmering og især den russiske side af sagen, henvises til Sonja Brentjes Ph.D. afhandling [Brentjes, 197?], [Charnes og Cooper, 1961], [Koopmans, 1961], [Isbell og Marlow, 1961], [Leifman, 1990], [Brentjes, 1976b] samt til [Kantorovich, 1939]. Kantorovichs artikel blev senere oversat til engelsk og udkom i *Management Science*, 6, 1960, s.366-422.

[2]Denne del bygger hovedsagelig på Dantzigs publicerede erindringer.

# George B. Dantzig og *Airforce* programmer -et praktisk problem

George B. Dantzig blev født den 8. november 1914 i Portland, Oregon i USA[3]. Han er søn af matematikeren og forfatteren Tobias Dantzig, der er kendt for sine matematikhistoriske bøger. Dantzig begyndte sin studietid på *University of Maryland*, hvor han læste matematik og fysik. I 1937 fik han en *master's* grad i matematik fra *University of Michigan*, og han sluttede sin uddannelse i 1946 med en Ph.D. i matematik fra *University of California Berkeley* under J. Neyman's vejledning.

I de første to år, 1937-1939, efter, at Dantzig afsluttede sine *master's* studier, arbejdede han som junior statistiker ved *U.S. Bureau of Labor Statistics.* I 1941 blev han ansat i det amerikanske luftvåben som afdelingschef for *Combat Analysis Branch* under Tex Thorntons ledelse ved *United States Air Force Headquarters Statistical Control* som et led i den naturvidenskabelige mobilisering. I denne periode arbejdede Dantzig med *programming planning methods*, som kort fortalt går ud på at holde styr på forskellige planer for de aktiviteter, som skulle foregå. I et sådan 'luftvåbenprogram' indgik der over en million forskellige slags *supplies*: aktivitetsniveauer for f.eks. uddannelse af personel, vedligeholdelse, forsyninger og kampe skulle tilpasses hinanden, således at man ikke oversteg den mængde af ressourcer, man havde til rådighed. De metoder, der blev brugt, var langsomme og ineffektive, og selv om man forsøgte at forbedre dem, så forblev det arbejdskrævende udregninger foretaget på *desk calculators* på baggrund af personlig erfaring og ad hoc tommelfingerregler. Under 2. verdenskrig tog det over 7 måneder at færdiggøre et sådan program, som derefter blev brugt som udgangspunkt eller basis for handlinger. Dantzig uddannede luftvåbnets personale i, hvordan sådanne programmer blev beregnet, og han blev betragtet som en ekspert i *practical programming methods* [Dantzig, 1951], [Dantzig, 1963], [Dantzig, 1968], [Dantzig, 1982], [Dantzig, 1988], [Dantzig, 1991], [Dorfman, 1984].

Dantzigs ansættelse i luftvåbnet sluttede i 1946, hvor han vendte tilbage til Berkeley og afsuttede sit Ph.D. studium. Berkeley tilbød ham derefter en stilling, men Dantzig fandt tilbuddet for ringe og begyndte at lede efter en akademisk stilling, som var bedre betalt. I den periode blev han så kontaktet først af J. D. Williams fra *Douglas Aircraft Co.* i Santa Monica, som i august 1946 skrev til Dantzig og fortalte, at de var interesserede i at etablere en forbindelse mellem *Combat Analysis* sektoren af *Headquarters AAF Statistical Control* og *Rand* projektet. *Project Rand* opstod kort efter krigen, ligesom ONR, med det formål at fortsætte samarbejdet mellem akademiske forskere

[3]Curriculum Vitae, George Bernard Dantzig, 30. august 1994.

og militæret. Initiativet blev taget af Henry H. "Hap" Arnold, der var general i luftvåbnet, og i samarbejde med Donald Douglas, der var præsident for *Douglas Aircraft*, og ingeniører ansat på *Douglas Aircraft*, blev *Project Rand* skabt [Leonard, 1992, s.67]. I starten fungerede Rand som en afdeling af *Douglas Aircraft* under kontrakt med *the Army Air Forces* [Hourshell, 1997, s.241-242]. I 1948 overgik Rand til at være en fritstående forskningsorganisation[4]. Mellem linierne lå der ifølge Dantzigs fortolkning et jobtilbud, men der skulle gå yderligere 6 år, før Dantzig i 1952 blev forskningsmatematiker for *The Rand Corporation* i Santa Monica i Californien [Dantzig, 1988, s.12]. I mellemtiden var der kræfter igang for at beholde Dantzig i Pentagon. Han beskriver det selv med følgende ord:

> *It all really began when Dal Hitchcock, an advisor to General Rawlings, the Air Comptroller, and Marshall Wood, an expert on military programming procedures, cooked up an elaborate plot to entice me to stay in the Pentagon. They believed they had a sufficiently challenging problem to keep me from looking for a position elsewhere. Wood proposed that I develop some kind of analog device which would accept, as input, equations of all types, basic data, and ground rules, and use these to generate as output a consistent Air Force plan.* [Dantzig, 1988, s.12]

Dantzig accepterede udfordringen og var fra 1946 til 1952 matematisk rådgiver for *U.S.A.F. Headquarters*. Dantzig greb opgaven an ved at udvikle en matematisk model for programmerne. Det resulterede ikke i en konstruktion af en analog maskine til beregning af programmerne, men udviklede sig i stedet til det, der i dag kaldes for lineær programmering.

# Dantzigs første arbejde med lineær programmering

## En økonomisk-matematisk model

Dantzig opstillede en matematisk model for programmerne[5]. Han angiver selv økonomen Wassily Leontiefs model fra 1932 for amerikansk økonomi som den vigtigste inspirationskilde. Dantzigs kendskab til Leontiefs arbejde stammede

[4]Se også [Smith, 1969].

[5]Det har ikke været muligt for mig at få fat i Dantzigs første arbejder med udviklingen af en model for programmerne, så det følgende bygger, ligesom det forrige, i stor udstrækning på Dantzigs egne erindringer om udviklingen af lineær programmering samt hans publicerede videnskabelige arbejder.

fra hans første ansættelsessted *U. S. Bureau of Labor Statistics*, hvor tre af Dantzigs venner, Duane Evans, Jerry Cornfield, og Marvin Hoffenberg, arbejdede med Leontiefs model. Denne model, som Leontief kaldte *Interindustry Input-Output Model*, og som oftest refereres til som input-output modellen, har en simpel matrix-struktur og arbejder med produktionsfunktioner, som er lineære. Modellen havde dog visse begrænsninger i forhold til luftvåbnets behov, bl.a. tillader den ikke eksistensen af alternative mulige programmer. Det var således nødvendigt at generalisere modellen.

I den første model, som Dantzig udformede, optrådte der ingen kriteriefunktion. På dette tidspunkt blev der ikke formuleret eksplicitte, generelle mål, og grunden var ifølge Dantzig, at man i praksis ikke havde mulighed for at implementere et sådant begreb; det var ikke menneskeligt muligt at gennemføre de krævede beregninger. I stedet forelå der en række *ground rules*, som skulle overholdes. Sådan var situationen i slutningen af 1946. Dantzig beskriver det således:

> *I had formulated a model that satisfactorly represented the technological relations usually encountered in practice. In place of an explicit goal or objective function were a large number of ad hoc ground rules issued by those in authority to aid the selection. Without the latter, there would be, in most cases, an astronomical number of feasible solutions to choose from.* [Dantzig, 1982, s.44]

Man arbejdede altså ikke med et overordnet mål, som f.eks. minimering af omkostninger, men ud fra visse *ground rules*, som erfaringsmæssigt gav, om ikke optimale resultater, så i hvert fald en hjælp til at beslutte, hvordan det program, man skulle følge, skulle udformes.

Men så skete der noget! I slutningen af efteråret 1946 begyndte rygterne om computeren at cirkulere, og i november besøgte Dantzig sammen med Marshall Wood *Aberdeen Proving Ground* for at undersøge, om sådanne computere kunne bruges til beregning af *Air Force* programmer. Det så meget lovende ud, og Dantzig og Wood var meget begejstrede for de fremtidsmuligheder, der lå i computeren. Det forårsagede en intensiv arbejdsperiode, som tog sin begyndelse i maj/juni 1947. Ad hoc 'ground' reglerne blev forkastet og erstattet af en kriteriefunktion, modellen blev formuleret i et axiomatisk, matematisk sprog, hvor axiomerne udtaler sig om relationer mellem to slags mængder, nemlig mængden af emner, der produceres eller forbruges, og mængden af aktiviteter eller produktionsprocesser, hvori disse emner indgår i konstante forhold, som er ikke-negative multipla af hinanden [Dantzig, 1991, s.23]. Der blev dannet en projektgruppe, hvis hovedpersoner i første omgang var Dantzig og Wood. Senere kom John Norton og Murray Geisler til. Projektet blev senere døbt projekt SCOOP, som stod for *Scientific Computation of Optimum Programs.* Wood beskrev i 1949 projektet med ordene:

> *Early in the* 1947 *the Air Comptroller's Office undertook a concerted attack on this problem, establishing the Planning Research Division. .... The work of this Division, now designated as PROJECT SCOOP ..., was directed to four main problem areas:*
>
> **a)** *The systematic and comprehensive identification and quantitiative evaluation of interrelationsships among Air Force activities, objectives, and limitations, usually expressed in the form of planning factors;*
>
> **b)** *The development of a system of equations, expressing these interrelationships explicitly in mathematical form;*
>
> **c)** *The development of mathematical computing techniques for the solution of these systems of equations, so as to construct a program which will accomplish our objectives to the maximum extent possible within the external limitations of funds, industrial capacity, etc.;*
>
> **d)** *The development and construction of high speed electronic computing machines adequate to perform in a few days the computations required for the equations for a complete Air Force program.* (Citeret i [Brentjes, 197?, s.177])

I december 1948 havde Dantzig og Wood følgende formulering af problemet:

> *we seek to determine that program which will, in some sense, most nearly accomplish objectives without exceeding stated resource limitations. So far as is known, there is so far no satisfactory procedure for solution of the type of problem.* [Dantzig og Wood, 1949, s.195]

Dette problem gav anledning til følgende matematiske problem:

> ... *the minimization of a linear form subject to linear equations and inequalities.* [Dantzig, 1982, s.44]

Dette er den formulering af lineær programmering, man oftest møder i dag i matematiske lærebøger.

I artiklen *Reminiscences about the Origins of Linear Programming* afslører Dantzig, hvordan de forskellige benævnelser i lineær programmering opstod. Luftvåbnet kaldte deres overordnede planlægningsskema for et *program*. Dantzigs første arbejde ledte til en formulering af problemet som et system af lineære uligheder, hvilket fik ham til at kalde sin første artikel om emnet for *Programming in a Linear Structure* [Dantzig, 1949, s.73]. Koopmans foreslog Dantzig at forkorte denne lidt lange titel til *Linear Programming* [Dantzig, 1982, s. 47]. Navnet *primal* program blev foreslået af Dantzigs far Tobias Dantzig, efter at W. Orchard-Hays omkring 1954 efterlyste et navn for det oprindelige lineære programmeringsproblem til det duale problem. Tobias Dantzig var en kender af græsk og latin, og han foreslog navnet '*primal as the natural antonym since both primal and dual derive from the Latin*' [Dantzig, 1982, s.47].

## Løsningsmetoder?

Som det fremgår af et af ovenstående citater, havde man i december 1948 ingen tilfredsstillende løsningsprocedure til Dantzigs model. I forbindelse med dette problem nævner Dantzig i [Dantzig, 1988, s.13], at Albert Cahn, som arbejdede ved *National Bureau of Standards* (NBS), overtalte ham til at tage kontakt til T. C. Koopmans og John von Neumann. Efter en konference i Philadelphia i midten af maj måned 1947 lyttede Dantzig til Cahn's råd og besøgte Koopmans i juni 1947. Koopmans arbejdede da på *Cowles Foundation* ved *University of Chicago*. Dantzig husker:

> *Koopmans became quite excited. During World War II he worked for the Allied Shipping Board on a transportation model and so he had the theoretical as well as the practical planning background necessary to appreciate what I was presenting. He saw immediately the implications for general economic planning. From that time on, Koopmans took the lead in bringing the potentialities of linear programming models to the attention of young economists like K. Arrow, P. Samuelson, H. Simon, R. Dorfman, L. Hurwicz to name but a few.* [Dantzig, 1982, s.44-45]

Men selv om Koopmans havde stor indflydelse på udbredelsen af lineær programmering især blandt økonomer, var han ikke til megen hjælp i spørgsmålet om løsningsalgoritmer. Dantzig begyndte så selv at udforske problemet. Første idé, nemlig at bevæge sig fra hjørne til hjørne langs nogle af kanterne af '*the polyhedral set*' dannet af bibetingelserne, forkastede Dantzig i første omgang som værende upraktisk i højere dimensionale rum. Der ville være for mange kanter til, at metoden kunne være effektiv. I sommeren 1947 besøgte Hurwicz Dantzig i Pentagon, og på Dantzigs opfordring studerede de geometrien i problemet, hvilket efterhånden fik Dantzig til at tro, at simplexmetoden måske alligevel ville være en effektiv løsningsteknik [Dantzig, 1982, s.45].

# Von Neumann drages ind i lineær programmering

## Et møde i Princeton

Dantzig blev som nævnt opfordret til at tage kontakt til John von Neumann ved *Institute for Advanced Study* i Princeton. Von Neumann beklædte adskillige rådgivende poster for militæret både under og efter krigen[6]. Derudover var han anerkendt som en af de bedste matematikere i verden, specielt var han kendt for at kunne se igennem tågerne i et matematisk problem, at kunne skrælle underskoven væk og afdække kernen i problemet[7]. Det var derfor meget naturligt at opsøge von Neumann. Godt nok blev simplexalgoritmen fundet i august 1947, men der gik yderligere et år, før det blev klart, hvor effektiv den var. I mellemtiden opsøgte Dantzig von Neumann for at høre, hvad han kunne foreslå i retning af løsningsteknikker. Dantzig har beskrevet sit første møde med von Neumann flere steder. Nogle steder angives mødedagen til at være den 1. oktober, og andre steder den 3. oktober 1947 [Dantzig, 1988, s.14] hhv. [Dantzig, 1982, s.45]. Hvorom alting er, mødtes de to herrer engang i efteråret 1947, og Dantzig beretter meget underholdende:

> *I remember trying to describe to von Neumann, as I would to an ordinary mortal, the Air Force problem. I began with the formulation of the linear programming model in terms of activities and items, etc. Von Neumann did something which I believe was uncharacteristic of him. 'Get to the point', he said impatiently. Having at times a somewhat low kindling-point, I said to myself 'O.K., if he wants a quicky, then that's what*

[6]Følgende ufuldstændige liste findes i [Ulam, 1958, s.42]: Han var medlem af *the Scientific Advisory Committee, Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground*, Maryland fra 1940-1957. Fra 1941 til 1955 var han medlem af *the Navy Bureau of Ordnance*, Washington D. C. Han var konsulent for *Los Alomos Scientific Laboratory* i perioden 1943-1955, samt for *the Naval Ordnance Laboratory*, Silver Spring, Maryland fra 1947-1955. Han var medlem af *the Armed Forces Special Weapons Project*, Washington D. C. fra 1950 til 1955, og fra 1951-1957 var han medlem af *the Scientific Advisory Board, U.S. Air Force*, Washington D. C. I perioden 1953-1957 bestred han posten som *chairman* for *the Advisory Committee on Guided Missiles*.

[7]Kommentarer fra Richard Kadison, der kendte von Neumann.

*he'll get'. In under one minute I slapped the geometric and the algebraic version of the problem on the blackboard. Von Neumann stood up and said 'Oh that!'. That for the next hour and a half, he proceeded to give me a lecture on the mathematical theory of linear programs.*

*At one point seeing me sitting there with my eyes popping and my mouth open (after all I had searched the literature and fo- und nothing), von Neumann said: 'I don't want you to think I am pulling all this out of my sleeve on the spur of the moment like a magician. I have just recently completed a book with Oscar Morgenstern on the theory of games. What I am doing is conje- cturing that the two problems are equivalent. The theory that I am outlining for your problem is an analogue to the one we have developed for games'. Thus I learned about Farkas' Lemma, and about duality for the first time.* [Dantzig, 1982, s.45]

Ifølge Dantzig viste von Neumann ved dette historiske møde i Princeton, at et to-personers nulsum spil kan reduceres til et lineært programmeringsproblem, sandsynliggjorde at det modsatte også var tilfældet samt formulerede dualitetssætningen for lineær programmering.

Hvad var det så, von Neumann skrev på tavlen ved dette møde? Det vides ikke med sikkerhed, men hvad angår dualitetssætningen, fortæller Dantzig selv flere steder, at han, efter det første møde med von Neumann, skrev artiklen *A Theorem on Linear Inequalities* dateret 5. januar 1948:

*which contained (as far as I know) the first rigorous proof of duality.* [Dantzig, 1982, s.45]

Dantzig publicerede ikke dette arbejde, og på et spørgsmål om hvorfor, svarede han:

*Because it was not my result - it was von Neumann's. All I did was write it up, for internal circulation, my own proof of what von Neumann outlined. It was my way of educating the people in my office in the Pentagon.* [Dantzig, 1982, s.45-46]

Fra von Neumanns hånd findes der et arbejdspapir[8] med titlen *Discussion of a Maximum Problem* dateret 15.-16. november 1947, som, ifølge Kuhn, cirkulerede privat:

[8]Dette arbejdspapir blev publiceret i von Neumanns samlede værker, [von Neumann, 1947].

> *von Neumann circulated privately a short typewritten note that was first published fifteen years later. This note formulated the dual for a linear program and gave a flawed proof of the equality of optimal objective values based on an invalid inhomogeneous form of Farkas' Lemma.* [Kuhn, 1991, s.85]

Der hersker dog ikke helt enighed om det matematiske indhold i denne note. I sin Ph.D. afhandling om lineær programmering skriver Sonja Brentjes:

> *Allerdings gibt es keine schriftliche Fixierung eines Dualitätssatzes durch von Neumann, denn selbst sein Manuskript vom November 1947 'On a Maximization Problem' enthält keine Dualitätsaussagen, obwohl es nach Dantzig sonst den wesentlichen Inhalt des Gespräches zwischen ihm und von Neumann vom Oktober 1947 widergibt.* [Brentjes, 197?, s.171]

I det følgende vil jeg gennemgå von Neumanns note og diskutere dens relation til dualitetsegenskaberne i lyset af uoverensstemmelserne mellem Kuhn og Brentjes.

## Von Neumanns note *Discussion of a Maximum Problem*

Von Neumann var interesseret i et system af $n + \nu$ uligheder

$$x_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k A_{k\kappa} \leq \alpha_\kappa \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, \nu)$$

hvor $x = (x_k : k = 1, \ldots, n)$ og $\alpha = (\alpha_\kappa : \kappa = 1, \ldots, \nu)$ er en $n$- hhv. $\nu$-dimensional vektor. Når $x \geq y$ betyder $x_k \geq y_k$ for alle $k = 1, \ldots, n$, kan de sidste $\nu$ uligheder skrives på formen:

$$xA \leq \alpha,$$

hvor $A = (A_{k\kappa} : k = 1, \ldots, n;\ \kappa = 1, \ldots, \nu)$ er en $(n\mathrm{x}\nu)$- matrix.

Von Neumanns hovedærinde i noten var at bestemme

$$\max_x a \cdot x \quad (a \geq 0)$$

under bibetingelserne $x \geq 0$, $xA \leq \alpha$, $(\alpha \geq 0)$ [Von Neumann, 1947, s.90]. Han vil altså løse et lineært programmeringsproblem. Han antog, at der findes en endelig maximumsværdi $\breve{a}$, det vil sige, han antog eksistensen af et $x_0 \geq 0$, med $x_0 A \leq \alpha$, således at

$$\max_x a \cdot x = a \cdot x_0 = \breve{a} < \infty.$$

Von Neumann analyserede problemet på følgende måde: Det er klart at

$$\breve{a} = \max\{a' \mid a' = a \cdot x,\ x \geq 0,\ xA \leq \alpha\},$$

og det er ligeledes klart, at

$$\breve{a} = \min\{a'' \mid a'' - a \cdot x \geq 0,\ \text{for alle } x,\ x \geq 0,\ xA \leq \alpha\}.$$

Von Neumann argumenterede videre, at idet $a' = a \cdot x$, og $a'' \geq a \cdot x$ for alle $x$ i mulighedsområdet (dvs. $x \geq 0$, $xA \leq \alpha$), gælder

$$a' \geq a''$$

hvis og kun hvis

$$a' = a'' = \breve{a},$$

og dermed er $x$'et i $a' = a \cdot x \geq a''$ maximumspunktet $x_0$ [von Neumann, 1947, s.90].

Det vil sige, under forudsætning af at der eksisterer en endelig maximumsværdi $\breve{a}$, kan maximumsproblemet løses ved at løse problemet

$$a' \geq a'' \tag{5.1}$$

for

$$a' = a \cdot x, \quad x \geq 0, \quad xA \leq \alpha, \tag{5.2}$$

sammen med betingelsen

$$a'' - a \cdot x \geq 0, \quad \text{for alle } x \geq 0,\ xA \leq \alpha. \tag{5.3}$$

Idet (5.2) og (5.1) er eksplicitte betingelser, arbejdede von Neumann videre på (5.3) [von Neumann, 1947, s.91]. Han argumenterede som følger:

Uligheden $a'' - a \cdot x \geq 0$ '*must be a consequence of the* $n + \nu$ *inequalities*' $x \geq 0$, $\alpha - xA \geq 0$. Hermed mente han, at uligheden $a'' - a \cdot x \geq 0$ er opfyldt for alle $x$, der opfylder ulighedssystemet $x \geq 0$, $\alpha - xA \geq 0$. Det betyder, påstod von Neumann, at $a'' - a \cdot x$ er en linearkombination af $x$ og $\alpha - xA$ med ikke-negative koefficienter $r = (r_k \mid k = 1, \ldots, n)$, $\xi = (\xi_\kappa \mid \kappa = 1, \ldots, \nu)$[9]. Von Neumann opnår dermed, at en nødvendig betingelse, for at (5.3) gælder, er, at der findes ikke-negative koefficienter $r = (r_k \mid k = 1, \ldots, n)$, $\xi = (\xi_\kappa \mid \kappa = 1, \ldots, \nu)$, således at

$$a'' - a \cdot x = r \cdot x + \xi \cdot (\alpha - xA). \tag{5.4}$$

Ved at sammenligne koefficienterne i (5.4) nåede von Neumann frem til at

$$a'' = \xi \cdot \alpha \tag{5.5}$$

og

$$-a = r - A\xi,$$

hvor den sidste ligning også kan skrives som

$$A\xi = a + r. \tag{5.6}$$

Idet $r$ kun er underlagt betingelsen $r \geq 0$, er denne sammen med (5.6) ækvivalent med

$$A\xi \geq a. \tag{5.7}$$

Dermed har von Neumann fået (5.3) udtrykt ved betingelserne[10]:

$$a'' = \xi \cdot \alpha, \tag{5.8}$$

$$\xi \geq 0, \tag{5.9}$$

$$A\xi \geq a. \tag{5.10}$$

[9]Dette følger af Farkas Lemma, som siger, at hvis en lineær, homogen ulighed i $x$ gælder for alle $x$ opfyldende et system af lineære, homogene uligheder, så er den første ulighed en linearkombination af de øvrige med ikke-negative koefficienter. Nu er de lineære uligheder, von Neumann benytter Farkas Lemma på, ikke homogene, men det får, som det vil blive klart længere nede, ingen praktisk betydning. Von Neumann har været fortrolig med disse ulighedssætninger gennem 1944-bogen om spilteori, hvori de spillede en afgørende rolle for beviset af minimaxsætningen (se kapitel 3).

[10]I (5.8) gælder der egentlig $\geq$ i stedet for $=$. Von Neumann har benyttet Farkas Lemma på *inhomogene* uligheder, hvilket kræver en justering af (5.4) med en ikke-negativ størrelse $t$, som skal lægges til på højre side af (5.4). Dermed fås $\geq$ i (5.8) og ikke $=$. Denne fejl er rettet i en fodnote af Kuhn og Tucker [von Neumann, 1947, s. 91].

Von Neumann betragtede derefter den samlede opgave, som han nu beskrev ved $x \geq 0$, $xA \leq \alpha$ $(\alpha \geq 0)$, (5.2), (5.3) og (5.1).

Han erstattede (5.3) med (5.8), (5.9) og (5.10), og indså, at (5.2) og (5.8) betyder, at $a'$ og $a''$ kan elimineres fra (5.1), som da får formen:

$$a \cdot x \geq \alpha\xi. \tag{5.11}$$

Von Neumann konkluderede dermed, at de oprindelige betingelser $x \geq 0$, $xA \leq \alpha$ $(\alpha \geq 0)$, (5.2), (5.3) og (5.1) er ækvivalente med betingelserne

$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ xA &\leq \alpha, \\ \xi &\geq 0, \\ A\xi &\geq a, \\ a \cdot x &\geq \alpha \cdot \xi. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Hermed sluttede han sin analyse af problemstillingen.

## Von Neumann og dualitetssætningen

Jeg mener nok, det kan diskuteres, hvorvidt von Neumann her formulerer det duale til det primale problem:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **primale:** | maximer | $a \cdot x$ | **duale:** | minimer | $\alpha \cdot \xi$ |
| | under bibet. | $x \geq 0$ | | under bibet. | $\xi \geq 0$ |
| | | $xA \leq \alpha$ | | | $A\xi \geq a$ |

samt hvorvidt han viste dualitetssætningen. Fortolkes von Neumanns resultat i lyset af den nutidige teori for lineær programmering, har han vist, at hvis der findes en endelig maximumsværdi $\breve{a}$, med et maximumspunkt $x_0$, opfyldende $x_0 \geq 0$, $x_0 A \leq \alpha$, så findes der et $\xi \geq 0$, med $A\xi \geq a$, og $a \cdot x \geq \xi \cdot \alpha$, det vil sige, der findes et $\xi$, som opfylder $A\xi \geq a$ og (idet $a'' \geq a'$ altid holder) minimerer $\xi \cdot \alpha$. Det er nok i et sådant lys, man skal forstå Kuhns og Tuckers kommentar til von Neumanns resultat:

> *The following Duality Theorem states this result as it is viewed today: Suppose $x$ achieves the finite maximum of $a \cdot x$ subject to* (22*a*) $[x \geq 0]$ *and* (22*b*) $[xA \leq \alpha]$. *Then there exists a $\xi$ minimizing $\alpha \cdot \xi$ subject to* (23*a*) $[\xi \geq 0]$ *and* (23*b*) $[A\xi \geq a]$ *and $a \cdot x = \alpha \cdot \xi$ for this $x$ and $\xi$.* [Von Neumann, 1947, s.92, fodnote af Kuhn og Tucker.]

Jeg mener ikke, man kan påstå, at von Neumann beviste dualitetssætningen i noten. Den opfattelse har Albert W. Tucker[11] også haft på et tidspunkt, hvilket fremgår af en samtale mellem Dantzig og Tucker refereret i Dantzigs artikel [Dantzig, 1982, s.45], hvor Tucker ikke kan forstå, hvorfor Dantzig i sin lærebog *Linear Programming and Extensions* tilskriver dualitetssætningen i lineær programmering til von Neumann og ikke til Gale, Kuhn og Tucker:

> *'Why', he* [Tucker] *asked 'do you* [Dantzig] *ascribe duality to von Neumann and not to my group?' 'Because he was the first to show it to me.' He said, 'that is strange for we have found nothing in writing about what von Neumann has done. What we have is his paper* on a Maximizing Problem.*' 'True', I said, 'but let me send you a paper I wrote as a result of my first meeting with von Neumann.' I sent him my report* A Theorem on Linear Inequalities, *dated 5 January 1948, which contained (as far as I know) the first rigorous proof of duality.* [Dantzig, 1982, s.45][12]

Der er, som vi har set, ingen direkte '*Dualitatsaussagen*', ganske som Brentjes påpegede. Von Neumann opstillede ikke det duale programmeringsproblem og formulerede ikke dualitetssætningen i noten, men han indførte de duale variable, selv om han ikke kaldte dem det, og opstillede mulighedsområdet for dem. Om han har haft den fulde forståelse for sammenhængen mellem de primale og duale variable er ikke til at sige, det kan ikke afgøres på baggrund af noten. Som det vil fremgå i næste kapitel, har denne note spillet en stor rolle som inspirationskilde for Gales, Kuhns og Tuckers bevis for dualitetssætningen og kom dermed til at spille en stor rolle for udbredelsen af dualitetssætningen.

# Konklusion og vurdering

I USA blev lineær programmering således udviklet i forlængelse af et rent praktisk, militært problem, som luftvåbnet havde under 2. verdenskrig. De ydre, samfundsmæssige omstændigheder, som skabte rammerne for udviklingen af lineær programmering, var, som beskrevet i forrige kapitel, USA's omfattende og succesrige mobilisering af naturvidenskabsfolk under krigen. Dette dannede baggrunden for militærets fortsatte ønske om et samarbejde med disse forskere efter krigens afslutning. Dette førte til, at Dantzig efter

[11] I næste kapitel præsenteres Tucker, og hans første arbejde med dualitetssætningen for lineær programmering diskuteres.

[12] Det er ikke lykkedes mig at få fat i Dantzigs upublicerede bevis for dualitetssætningen.

krigen igen blev ansat af luftvåbnet til at udtænke en metode til at effektivisere luftvåbnets 'programmer'. Dantzig rådede ikke over en teori, som kunne løse dette problem, men ved at blande økonomiske teorier og matematisk modellering lykkedes det ham i 1947 at opstille en matematisk model for 'programmerne'.[13]

Dantzig opsøgte derefter von Neumann, og her skinner betydningen af 2. verdenskrig igen igennem. Von Neumann fungerede som følge af sin store indsats under krigen stadig som konsulent i militæret efter krigen, hvilket gjorde det meget naturligt for Dantzig at tage kontakt til von Neumann. Det fortsatte samarbejde mellem militæret og akademikere skabte muligheder for kommunikation mellem militære og akademiske forskere. Von Neumanns tidligere arbejde med spilteori, der, som det fremgår af kapitel 2 og 3, gav von Neumann indsigt i sammenhængen mellem økonomiske modeller, løsning af lineære ulighedssystemer og minimaxsætningen, forklarer den omstændighed, at han stort set på stående fod var i stand til at koble Dantzigs lineære programmeringsproblem sammen med spilteori. Min konklusion, som vil blive uddybet og fulgt op i næste kapitel, er, at lineær programmering ved denne sammenkobling med spilteori ændrede status rent videnskabeligt. Dantzig citerer von Neumann for at skulle have sagt '*The theory that I am outlining for your problem ...*' [Dantzig, 1982, s.45], hvilket selvfølgelig ikke er en garanti for, at von Neumann udtalte sig præcis på den måde under deres møde i efteråret 1947, men som udmærket illustrerer, hvad jeg mener med, at lineær programmering skiftede status, da forbindelsen til spilteori blev opdaget. Von Neumann udstyrede Dantzigs 'problem' med en 'teori', og dermed var lineær programmering ikke længere blot et praktisk problem, som militæret var interesseret i at få løst, men indgik i en matematisk sammenhæng med andre matematiske discipliner som lineære uligheder og spilteori. Forbindelsen til spilteori åbnede mulighederne for interessante matematiske problemstillinger i lineær programmering. Dermed udvidede interessefeltet sig fra en snæver, praktisk problemstilling til rene matematiske forskningsfelter.

Det førte til, at lineær programmering ændrede status fra at være en matematisk model til løsning af et praktisk problem i luftvåbnet til at være et potentielt matematisk forskningsområde med et matematisk grundlag i teorien om lineære uligheder og konveks analyse. Dette statusskift ser jeg som helt afgørende for den videre udvikling, idet lineær programmering hermed blev åbnet som genstandsfelt for ren matematisk forskning og tiltrak universitetsmatematikere:

*Contact with John von Neumann at the Institute for Advanced*

[13]Ovenstående historiske forløb er beskrevet ud fra den angivne sekundær litteratur og bygger således ikke på min egen primære forskning.

> *Study gave fundamental insight into the mathematical theory and sparked the interest of A. W. Tucker of Princeton University and a group of his students, who attacked problems in linear inequality theory and game theory.* [Dantzig, 1963, s.15]

I næste kapitel vil jeg argumentere stærkere for dette statusskift samt klargøre i hvilken forstand, jeg ser det som en afgørende faktor i Kuhns og Tuckers udvikling af ikke-lineær programmering.

I herværende kapitel er der også en diskussion af, hvem der først viste dualitetssætningen i lineær programmering. Som jeg har argumenteret for i teksten, mener jeg ikke, det kan afgøres, på baggrund af de kilder jeg har haft adgang til.

# Kapitel 6

# Ikke-lineær programmering -herkomst og videreudvikling

I forrige kapitel blev det beskrevet, hvordan lineær programmering opstod inden for en konkret problemløsningskontekst i en militær sammenhæng og derefter blev sat i forbindelse med en matematisk teori, spilteori, og fik et matematisk grundlag i teorien om lineære uligheder. I dette kapitel vil det blive demonstreret, hvorledes dette skift førte til udviklingen af en matematisk teori for lineær programmering. Teorien blev udviklet af Tucker, Kuhn og Gale på matematikafdelingen på universitetet i Princeton. ONR's matematikprogram kom til at fungere som bindeled mellem lineær programmeringsproblemet i luftvåbnet og det matematiske forskningsmiljø på universitetet. Disse begivenheder var den direkte anledning til Kuhns og Tuckers arbejde med ikke-lineær programmering.

I dette kapitel udfoldes denne historie. Først præsenteres Kuhn og Tucker, efterfulgt af en præsentation af ONR's matematikprogram -dets oprettelse samt dets holdninger til, hvilken form for matematik der skulle støttes og hvordan. Derefter kommer en matematikhistorisk analyse af Kuhns og Tuckers første arbejde inden for lineær programmering og dets relation til spilteori, med speciel fokus på deres arbejde med dualitetsegenskaberne, da det spiller en vigtig rolle for ikke-lineær programmerings opståen. Dernæst følger en matematikhistorisk gennemgang af Kuhns og Tuckers artikel *Nonlinear Programming*, hvori de indførte ikke-lineær programmering og viste teoriens hovedsætning: Kuhn-Tuckers sætning. Kapitlet afsluttes med en diskussion af udviklingen af dualitetsteori for ikke-lineær programmering.

# Kuhn og Tucker -elev og mester

Harold W. Kuhn blev født den 29. juli 1925. Albert W. Tucker var kommet til verden 20 år tidligere den 28. november 1905. Deres veje krydsedes i 1947, da Kuhn blev optaget som *graduate* studerende på matematikuddannelsen i Princeton, hvor Tucker var professor. Et nærmere studie af Tuckers livsforløb afslører billedet af en karismatisk mand og lærer. Han var en inspirerende lærer og en dygtig leder, som fik stor betydning for udviklingen af matematikafdelingen på Princeton [Tucker, B., 1995], [Kuhn, 1995].

## Tucker

Tucker blev født i Ontario provinsen i Canada, hvor han voksede op i forskellige småbyer langs nordkysten af Lake Ontario[1].

I 1924, 19 år gammel, påbegyndte han et studium i matematik og fysik på universitetet i Toronto. Han udmærkede sig både i matematik og fysik, men blev rådet til at vælge det ene af de to fag, og Tucker valgte matematikken. I 1928 afsluttede han sit bachelor studium i Toronto og blev kraftigt opfordret til at rejse til Europa for at starte et Ph.D. studium der. Paris og Göttingen var på tale, men Tucker var ikke meget for udsigten til at skulle begå sig på et fremmedsprog, så han undersøgte mulighederne for at komme til Cambridge i England. På det tidspunkt var han mest interesseret i geometri, men det, de kunne tilbyde på Cambridge i den retning, virkede ikke specielt tiltrækkende på Tucker, som endte med at blive endnu et år i Toronto som undervisningsassistent. Året efter startede han sit Ph.D. studium ved Princeton, sideløbende med et deltidsjob som instruktor.

Han opnåede Ph.D. graden i matematik i 1932 på en afhandling inden for topologi. Derefter tilbragte han et år som *National Research Fellow* ved Cambridge, Harvard og Chicago. Derfra gik turen igen til Princeton, hvor han først var ansat som instruktor et år, for derefter at blive *assistant* professor. I 1938 blev han forfremmet til *associate professor* for at ende som professor i 1946. Tucker har haft en livslang tilknytning til Princeton, og der er ingen tvivl om, at han har haft stor betydning for matematikafdelingen. I 1930'erne og 1940'erne var han med til at gøre matematikafdelingen på Princeton til et internationalt berømt center for matematisk forskning[2], og han fungerede som institutbestyrer i en 10-årig periode fra 1953 til 1963. Tucker blev gift

[1]Udover referencer givet i teksten bygger afsnittet på Curriculum vitae for Tucker og Kuhn, som Kuhn har stillet til min rådighed.

[2]Om betydningen af *The Institute for Advanced Study* for matematikafdelingen på *Princeton University* henvises til William Aspray's artikel *The Emergence of Princeton as a World Center for Mathematical Research,* 1896 – 1939, [Aspray, 1988].

med Alice J. Curtiss i 1938. Han blev senere skilt og gift igen i 1964 med Mary F. Shaw. Efter lang tids sygdom døde han den 27. januar 1995 i en alder af 89 år.

## Kuhn

Kuhn er født og opvokset i Californien. Han tog sin bachelor grad i *science* ved *California Institute of Technology* i 1947. Derefter flyttede han fra Californien til østkysten for at fuldføre en *graduate* uddannelse på et Princeton, der på dette tidspunkt havde udviklet sig til et af verdens førende steder for matematisk forskning. I 1948 modtog han en *master's* grad og i 1950 en Ph.D. grad på en afhandling, der i 1952 blev publiceret i *Annals of Mathematics* med titlen *Subgroup Theorems for Groups Presented by Generators and Relations* [Kuhn, 1952]. Efter afslutningen af Ph.D. arbejdet gik turen til Europa, nærmere bestemt til Paris, hvor Kuhn tilbragte det akademiske år 1950-51 som *Fulbright Research Scholar.* I 1951 vendte han tilbage til Princeton som underviser i matematik for året efter at blive *assistant* professor ved det berømte kvinde-college *Bryn Mawr College.* Kuhn blev der de næste 7 år for derefter atter at vende tilbage til Princeton, denne gang som *associate* professor i matematisk økonomi. Han var tilknyttet både matematik- og økonomiafdelingen på Princeton og underviste begge steder på *undergraduate* såvel som *graduate* kurser. I 1995 fyldte han 70 år og gik i den anledning på pension.

På privatfronten kan nævnes at Kuhn i 1949 giftede sig med Estelle Henkin.

# Karriereskift

Tuckers publikationsliste viser et skift i faglig interesse i slutningen af 1940'erne. Stort set alle hans publikationer fra 1950 og senere handler om spilteori og matematisk programmering, men inden da var det hovedsagelig topologiske emner, han havde beskæftiget sig med. Skiftet indtrådte i 1948 og udsprang direkte af Dantzigs kontakt til von Neumann på *Institute for Advanced Study* i Princeton i forbindelse med lineær programmering[3]. De sociologiske rammer for dette skift i faglig interesse var bestemt af ONR's matematikprogram, som via økonomisk støtte var den direkte årsag til, at der blev påbegyndt matematisk forskning i lineær programmering og dets relationer til spilteori. I et interview med Stephen B. Maurer fortalte Tucker, hvordan han blev involveret:

[3]Se kapitel 5.

> *... the Pentagon was very impressed with George Dantzig's 1947 invention of the simplex method and wanted to set up a university-based project to study linear programming further. In may 1948, Dantzig came up to Princeton from Washington to consult with von Neumann about such a project. At the end of the day, George needed a ride to the train station at Princeton Junction. I just happened to be introduced to him then and offered him a ride, during which he gave me a five-minute introduction to linear programming, using as an example the transportation problem. What caught my attention was the network nature of the example, and to be encouraging, I remarked that there might be some connection with Kirchhoff's Laws for electrical networks, which I had been interested in from the point of view of combinatorial topology. Because of this five-minute conversation, several days later I was asked if I would undertake a trial project that summer, and I agreed. The two graduate students I got to work with me were Harold Kuhn and David Gale.* [Albers og Alexanderson, 1985, s.342-343]

Tucker blev således nærmest ved en tilfældighed inddraget i forskningsprojektet om lineær programmering. Baggrunden for og ønsket om at oprette et forskningsprojekt i lineær programmering opstod derimod *ikke* ved en tilfældighed. Det kom ud af en meget gennemtænkt og velovervejet plan for, hvordan man fra militærets side, gennem ONR, effektivt kunne fremme og styre retninger af matematisk forskning på universiteterne.

## ONR's matematikprogram

Den mest indflydelsesrige person i organiseringen af militær støtte til matematisk forskning efter krigen var uden tvivl Mina Rees. Hun var uddannet matematiker først fra *Hunter College*, et meget stærkt kvinde-college, hvor hun i 1923 fik en bachelor grad med matematik som hovedfag, derefter fra Columbia universitetet i New York, hvor hun fortsatte sine matematikstudier. Her gik det på et tidspunkt op for hende, at kvindelige Ph.D.'er i matematik ikke var velsete, og hun afsluttede derfor sit studiophold i New York med en *master's* grad. I Chicago havde man ikke slige forbehold overfor kvindelige Ph.D. kandidater i matematik, og i 1931 fik hun Ph.D. graden på en afhandling inden for algebra. Hun vendte derefter tilbage til *Hunter College*, hvor hun underviste, indtil hun i 1943 blev inddraget i militærarbejdet, idet hun blev udnævnt til teknisk assistent for Warren Weaver, lederen af det nyligt oprettede *Applied Mathematics Panel* [4] [Albers og Alexanderson, 1985, s.257].

Til trods for, at Rees i 1945 havde stillet sig meget tvivlende over for et militært finansieret forskningsprogram i matematik, blev hun i 1946 tilbudt stillingen som chef for ONR's matematikafdeling. Rees var i begyndelsen noget skeptisk. Hun tvivlede på, at matematikerne ville være begejstrede for at modtage offentlig støtte til deres forskning i fredstid, og da især ikke offentlige støtte, der kom fra militæret. Hun synes dog, at det var uhyre vigtigt for den videre udvikling af matematik i USA at gå aktivt ind i ONR's program, så i 1946 flyttede hun til Washington for at begynde opbygningen af ONR's matematikprogram. Rees rejste rundt og besøgte ledende matematikinstitutter overalt i USA, hvilket betød, at det forslag, hun til sidst lagde frem for flåden, var et, hun havde diskuteret med de fleste af de forskere, som ville kunne få gavn af programmet [Albers og Alexanderson, 1985, s.263].

Matematikerne ønskede, at programmet skulle støtte både ren og anvendt matematik. Derudover ønskede man en udvikling af mere specifikke emner som matematisk statistik, numerisk analyse og udvikling af computeren. Dertil kom, at det var vigtigt for matematikerne at skabe en filosofi i flåden om, at pengene kunne bruges til at købe forskningstid til dygtige matematikere, så de kunne fortsætte deres forskning, og til at etablere forskningsassistentstillinger til unge matematikere, idet støtte til nye, lovende talenter var nøglen '*to the flowering of mathematical research in the country*' [Rees, 1977b, s.23].

Rees havde i sin oprindelige plan lagt vægt på, at ren matematik skulle kunne støttes af ONR, men *ret* til støtte til sådanne projekter uden hensyn til relevansen for flådens mission var ikke blevet eksplicit formuleret, da matematikafdelingen af ONR blev dannet. Det var dog en udbredt holdning blandt matematikerne, at behovet for et større antal af veluddannede og erfarne forskere i ren matematik var stærkt ønskeligt. Dertil kom, at der var

> ... *considereable feeling among those of us responsible for the program that our concern must be with the strengthening of mathematical research in the United States not with fragmenting the field; and we wanted very much not to exclude any first class research.* [Rees, 1977a, s.107]

Mulighed for støtte til fri forskning i ren matematik blev bakket op af Robert Conrad, der var kaptajn i flåden og blev betragtet som den spirituelle leder af ONR. Han lovede at støtte Mina Rees, hvis hun ønskede at inkludere ren matematisk forskning i sit program. Hvor stor betydning det havde fremgår af følgende kommentar fra Mina Rees:

[4] Se kapitel 4.

*This was a great day for all of us, for it meant an end to the constant worry as to whether the Navy would see the needs of mathematics as we saw them.* [Rees, 1977a, s.107]

ONR blev oprettet i august 1946, og i januar 1948 havde matematikafdelingen fungeret i lidt over et år. Mina Rees skrev på det tidspunkt et indlæg om ONR's matematikprogram til *Bulletin of the American Mathematical Society* med det formål at gøre et bredere udvalg af matematikere opmærksomme på de muligheder for støtte, der lå i ONR. Rees lagde stor vægt på at understrege, at selv om forskning i anvendt retning nok havde størst chance for at opnå støtte, så var filosofien bag ONR's matematikprogram, at grundforskning også skulle støttes [Rees, 1948, s.1]. Hun underbyggede dette ved at fremhæve, at selv om 4/5 af de årlige udgifter gik til forskning i "anvendt matematik", matematisk statistik, numerisk analyse og computerudvikling, så udgjorde antallet af kontrakter til forskning i ren matematik over 1/3 af samtlige kontrakter. Derudover understregede hun mulighederne for at lave Ph.D. med støtte fra ONR, idet der ingen restriktioner var på publikation af forskningsresultater.

USA havde siden 1900 oplevet en stigende styrkelse og udbygning af ren matematisk forskning, og grunden til, at det var så vigtigt for Rees at slå fast, at ren matematik også blev støttet, var, at mange matematikere frygtede, at ingeniører og forskere i anvendt matematik ville komme til at dominere matematisk arbejde efter krigen [Owens, 1989, s.299].

## Tuckers program

Militærets begejstring for Dantzigs model resulterede i, at ONR oprettede en speciel logistikgren. Et af projekterne heri gik ud på at undersøge sammenhængen mellem lineær programmering og spilteori. Tucker blev kontaktet og spurgt, om han ville fungere som leder, *pricipal investigator*, på et sådant projekt. Mina Rees beskriver i [Rees, 1977a, s.111] starten på logistikgrenen:

*... when, in the late 1940's the staff of our office became aware that some mathematical results obtained by George Dantzig, who was then working for the Air Force, could be used by the Navy to reduce the burdensome costs of their logistics operations, the possibilities were pointed out to the Deputy Chief of Naval Operations for Logistics. His enthusiasm for the possibilities presented by these results was so great that he called together all those senior officers who had anything to do with logistics, as well as their civilian counterparts, to hear what we always referred to as a "presentation". The outcome of this meeting was the establishment in*

*the Office of Naval Research of a separate Logistics Branch with a separate research program. This has proved to be a most successful activity of the Mathematics Division of ONR, both in its usefulness to the Navy, and in its impact on industry and the universities.*

ONR's projekter var kontraktbaseret efter den model, Bush konstruerede under krigen. Det betød, at Tucker som *principal investigator* fortsatte i sin stilling på Princeton som hidtil. Støtten fra ONR gik til sommerløn og betaling af møder. Dertil kom, at Tucker kunne ansætte studerende til at arbejde på projektet sammen med ham. De studerendes løn blev betalt af ONR. Det var på den måde, Kuhn kom ind i projektet. Kuhn var på dette tidspunkt *graduate* studerende og så småt i gang med sin Ph.D. afhandling. Han financierede sine studier ved hjælp af et *fellowship* fra universitetet og et G. I. Bill stipendium. I det han også sendte penge hjem til sine forældre behøvede han en ekstra indtægt. Han opsøgte Tucker for at høre om han kunne få et sommerjob, og Tucker tilbød ham en stilling i projektet[5]. Udover Kuhn blev endnu en *graduate* studerende, David Gale, ansat på projektet.

Projektet blev etableret med det formål at klarlægge forbindelsen mellem lineær programmering og spilteori samt undersøge og videreudvikle lineær programmerings matematiske grundlag. Tucker, Kuhn og Gale greb arbejdet an ved sammen at læse von Neumanns og Morgensterns bog *Theory of Games and Economic Behavior* og studere von Neumanns note *Discussion of a Maximum Problem* [Von Neumann og Morgenstern, 1944], [Von Neumann, 1947]. Resultaterne af deres arbejde blev præsenteret på den første konference om lineær programmering og derefter publiceret i en kongresberetning fra konferencen [Koopmans, 1951].

## Den første konference om lineær programmering

D. 20.-24. juni 1949 blev den første konference i lineær programmering afholdt, og Brentjes ser dette som afslutningen på lineær programmerings konstitueringsproces som matematisk disciplin [Brentjes, 197?, s.178]. Konferencen foregik i Chicago ved *Cowles Commission for Research in Economics.* Deltagerne havde meget forskellige baggrunde; der var økonomer, matematikere, statistikere og administratorer. I alt deltog 51 mænd i konferencen, hvoraf 18 publicerede artikler over de foredrag, de afholdt på konferencen. Disse er udgivet i konferencens kongresberetning *Activity Analysis of Production and Allocation*, som er redigeret af Tjalling C. Koopmans [Koopmans,

[5]Interview med Kuhn, Princeton, 23. april, 1998.

1951]. På nær ni indeholder bogen artikler fra alle foredragene. Konferencen samt den forskning, der var udført af folk fra *Cowles Commission*, var under kontrakt med *The RAND corporation.* Kun en af *Cowles Commission* folkene, nemlig C. Hildreth, var ikke støttet af RAND, men af *the Rockefeller Foundation.* Af de resterende tolv bidragsydere til Koopmans kongresberetning kom to fra *The RAND Corporation*, tre fra *U.S. Department of the Air Force* og syv fra universiteter -Princeton, Berkeley, Brown, Vanderbilt og Minnesota. Af universitetsfolkene var der kun to, som ikke arbejdede under kontrakt med staten, fire arbejdede under ONR. David Gale har to bidrag, det ene er sammen med Kuhn og Tucker støttet af ONR, det andet er en artikel inden for konveksitetsteori *Convex Polyhedral Cones and Linear Inequalities* [Gale, 1951], og dette arbejde er ikke udført under kontrakt med militæret eller anden offentlig institution. Hele affæren var således finansielt fuldstændigt domineret af militæret. Det var *The RAND corporation*, ONR og luftvåbnet, der styrede denne forskningsaktivitet.

Inddelingen af artiklerne i kongresberetningens fire dele viser, hvordan de forskellige emner blev opfattet i begyndelsen af lineær programmerings tilværelse. I første del, *Theory of Programming*, opstilles og forklares lineær programmeringsmodellen, men den matematiske teori for lineær programmering indgår ikke i første del og blev således ikke betragtet som *theory of programming.* Udover lineær programmeringsmodellen består første del udelukkende af artikler om økonomiske modeller i økonomisk teori, hvilket viser, at lineær programmering på dette tidspunkt ikke har defineret sig selv som en matematisk disciplin. Anden del har titlen *Applications of Allocation Models*, som giver sig selv. Den matematiske teori for lineær programmering er placeret i tredje del, der har overskriften *Mathematical Properties of Convex Sets.* I indledningen karakteriserer Koopmans den som et redskab, der er '... *relatively new to economics*' [Koopmans, 1951, s.10]. Koopmans betragtede således lineær programmering som hovedsagelig en økonomisk teori, og den matematiske teoribygning blev betragtet som værktøj til økonomi. Den sidste del omhandler beregningsalgoritmer.

## Gales, Kuhns og Tuckers dualitets- og eksistenssætninger

Gale, Kuhn og Tucker udledte dualitetssætningen i artiklen *Linear Programming and the Theory of Games* [Gale et al., 1951]. I stedet for at arbejde med '*the basic "scalar" problem of linear programming*', som går ud på at maksimere (minimere) en lineær funktion af flere variable underlagt bibetingelser givet ved et system af lineære uligheder, betragtede de et generelt 'matrix'-problem, der har 'skalar'-problemet som specialtilfælde. Formålet med deres artikel var at etablere dualitets- og eksistenssætninger for disse generelle matrix-problemer og at relatere disse problemer til to-personers nulsum spil [Gale et al., 1951, s.317].

## Notation

Gale, Kuhn og Tucker lod 'store' bogstaver $A$, $B$, $C$ etc. betegne rektangulære matricer, mens 'små' bogstaver $b$, $c$, $u$, $x$ etc. betegner vektorer opfattet som matricer med én søjle. Græske bogstaver $\delta$, $\lambda$ står for reelle skalarer. $A'$ er den transponerede til $A$.

Med $u = 0$ menes, at alle $u$'s komponenter er lig med nul, mens $u \geqq 0$ skal betyde, at ingen af $u$'s komponenter er negative. Med $u \geq 0$ menes $u \geqq 0$ og $u \neq 0$, mens $u > 0$ betyder, at alle $u$'s komponenter er positive. Tilsvarende notation indførte de for matricer, således at $A \geq 0$ for eksempel skal betyde, at hvert element i $A$ er ikke-negativt, og mindst ét element er positivt.

Det skal yderligere bemærkes, at Gale, Kuhn og Tucker kaldte en matrix $D$ med visse egenskaber maximal (minimal), hvis ingen anden matrix $\Delta$ med samme egenskaber er sådan, at $\Delta \geq D$ ($\Delta \leq D$).

## Lineære programmeringsproblemer

Gale, Kuhn og Tucker formulerede to generelle, duale lineær programmeringsproblemer, som hver især er baseret på de samme, givne informationer indlagt i matricerne $A$, $B$ og $C$. I begge problemer skal en matrix $D$ bestemmes.

**Problem 1**: Find en maximal matrix $D$ med følgende egenskab:

der eksisterer $x \geqq 0,\ y > 0$ opfyldende $Ax \leqq By$ således, at

$$Cx \geqq Dy. \tag{1}$$

**Problem 2**: Find en minimal matrix $D$ med følgende egenskab:

der eksisterer $u \geqq 0,\ v > 0$ opfyldende $A'u \geqq C'v$ således, at

$$B'u \leqq D'v. \tag{2}$$

Ved at lade $B$ være en søjlevektor $b$ og $C$ en rækkevektor $c'$, bliver $D$ en skalar $\delta$, og $y$ og $v$ bliver positive skalarer, som kan elimineres ved at dividere igennem. Dermed fik Gale, Kuhn og Tucker indført følgende 'skalar'-problemer, som special tilfælde af det generelle problem:

**Problem** $(1\delta)$: Find en maximal skalar $\delta$ med følgende egenskab: der eksisterer $x \geqq 0$ opfyldende $Ax \leqq b$ således, at

$$c'x \geqq \delta.$$

**Problem** $(2\delta)$: Find en minimal skalar $\delta$ med følgende egenskab: der eksisterer $u \geqq 0$ opfyldende $A'u \geqq c$ således, at

$$b'u \leqq \delta.$$

Dette er det, der i dag kaldes det primale hhv. duale problem i lineær programmering. I dag formuleres det som oftest uden betingelsen $c'x \geqq \delta$, men den er med her for at sikre endelige, optimale løsninger.

Gale, Kuhn og Tucker udledte to centrale resultater i artiklen. Det ene kaldte de for eksistenssætningen, som, i deres oprindelige formulering, siger, at der findes en matrix $D$, som løser begge problemer, hvis følgende eksistensbetingelser er opfyldt:

$$\text{Der eksisterer et} \quad x \geqq 0,\ y > 0 \quad \text{for hvilke} \quad Ax \leqq By,$$

$$\text{Der eksisterer et} \quad u \geqq 0,\ v > 0 \quad \text{for hvilke} \quad A'u \geqq C'v.$$

Det andet kaldte de for dualitetssætningen, og den siger, at problem 1 har løsningen $D$, hvis og kun hvis problem 2 har den samme matrix $D$ som løsning.

Oversat til 'skalar'-problemet giver de to resultater således, at hvis der eksisterer $x$, $u$ i mulighedsområdet for de to indbyrdes duale problemer, så findes der en skalar $\delta$, som er løsning til begge problemerne $(1\delta)$, $(2\delta)$, og dualitetssætningen giver, at problem $(1\delta)$ har en bestemt skalar $\delta$ som løsning, hvis og kun hvis problem $(2\delta)$ har samme skalar $\delta$ som løsning.

## Beviset for dualitetssætningen

Gale, Kuhn og Tucker formulerede dualitetssætningen på følgende måde:

> Theorem 2 *(duality theorem): A matrix $D$ is a solution for Problem* 1 *if, and only if, its a solution for Problem* 2. [Gale et al., 1951, s.322]

Selve beviset byggede de på Farkas' Lemma, som de formulerede på følgende måde:

**Lemma 1**: En homogen, lineær ulighed $b'u \geqq 0$ gælder for alle $u$, som opfylder et system af homogene, lineære uligheder $A'u \geqq 0$, hvis og kun hvis der findes et $x \geqq 0$, for hvilket $b = Ax$.

De brugte Farkas' Lemma i en lidt anden iklædning, idet de først udledte en simpel konsekvens af Farkas' Lemma, hvor de formulerede den ene implikation som en ulighed uden løsning:

**Lemma 2**: En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at ulighedssystemet $b'u < 0$, $A'u \geqq 0$ ikke har nogen løsning $u \geqq 0$ er, at ulighedssystemet $Ax \leqq b$ har en løsning $x \geqq 0$.

Endelig generaliserede Gale, Kuhn og Tucker ovenstående konsekvens af Farkas' Lemma til følgende resultat:

**Lemma 3**: En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at ulighedssystemet $B'u \leq 0$, $A'u \geqq 0$ ikke har nogen løsning $u \geqq 0$ er, at ulighedssystemet $Ax \leqq By$ har en løsning $x \geqq 0$, $y > 0$.

For at kunne bruge lemma 3, omformulerede Gale, Kuhn og Tucker problem 1 og problem 2 til:

**Problem 1 (ny form)**: Find en matrix $D$ for hvilken følgende to betingelser er opfyldt:

(1) der eksisterer $x \geqq 0,\ y > 0$ opfyldende $Ax \leqq By$, således, at $Cx \geqq Dy$,

(2*) der findes intet $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ opfyldende $Ax \leqq By$, således, at $Cx \geq Dy$.

**Problem 2 (ny form)**: Find en matrix $D$ for hvilken følgende to betingelser er opfyldt:

(2) der eksisterer $u \geqq 0,\ v > 0$ opfyldende $A'u \geqq C'v$, således, at $B'u \leqq D'v$,

(1*) der findes intet $u \geqq 0,\ v \geqq 0$ opfyldende$A'u \geqq C'v$, således, at $B'u \leq D'v$.

Bemærk, at en matrix $D$, som opfylder (1) og (2*), nødvendigvis må give lighedstegn, $Cx = Dy$, i (1), og tilsvarende at en matrix $D$ opfyldende (2) og (1*) vil give lighedstegn, $B'u = D'v$, i (2) [Gale et al., 1951, s.321].

Gale, Kuhn og Tucker viste, at de nye formuleringer af problem 1 og problem 2 er ækvivalente med de oprindelige formuleringer.

Med denne omformulering af de duale matrixproblemer udledte Gale, Kuhn og Tucker dualitetssætningen direkte af lemma 3, ved at substituere $A$ med $[A\ \ -C]'$, $B$ med $[B\ \ -D]'$ og $u$ med $[u\ v]'$. Dermed giver lemma 3, at en matrix $D$ har egenskaben (1), hvis og kun hvis $D$ har egenskaben (1*). Herefter fik de det andet resultat, nemlig at en matrix $D$ har egenskaben (2), hvis og kun hvis den har egneskaben (2*), ved i (1) og (1*) at erstatte $A$, $B$, $C$, $D$, $x$, $y$, $u$, $v$ med $-A'$, $-C'$, $-B'$, $-D'$, $u$, $v$, $x$, $y$ [Gale et al., 1951, s.322].

Dualitetssætningen for det 'sædvanlige' lineære programmeringsproblem, 'skalar'-problemet, udledte Gale, Kuhn og Tucker som et korollar til det generelle tilfælde:

> *Problems (1$\delta$) and (2$\delta$) have a unique common solution, $\delta$, or else no solution at all.* [Gale et al., 1951, s.322]

Her er entydigheden en direkte konsekvens af $\delta$'s maksimalegenskab.

### Eksistens

Gale, Kuhn og Tucker formulerede og beviste to eksistenssætninger, der begge udtaler sig om nødvendige og tilstrækkelige betingelser for, at der findes en løsning til problem 1 og problem 2. Den første siger:

> Der findes en løsning, $D$, til problem 1 og problem 2, hvis og kun hvis følgende eksistensbetingelser begge er opfyldt:
>
> (3) Der eksisterer $x \geqq 0,\ y > 0$ for hvilke $Ax \leqq By$,
>
> (4) der eksisterer $u \geqq 0,\ v > 0$ for hvilke $A'u \geqq C'v$.
>
> [Gale et al., 1951, s.323]

De beviste sætningen ved at vise, at eksistensbetingelserne (3) og (4) er ensbetydende med, at der eksisterer en løsning, $D$, til følgende problem 3:

**Problem 3**: Find en matrix $D$ som har begge de følgende egenskaber

(1) der eksisterer $x \geqq 0,\ y > 0$ for hvilke $Ax \leqq By$ således, at $Cx \geqq Dy$,

(2) der eksisterer $u \geqq 0,\ v > 0$ for hvilke $A'u \geqq C'v$ således, at $B'u \leqq D'v$.

Forinden havde de vist, at en matrix $D$ er løsning til problem 1 eller problem 2, hvis og kun hvis den er løsning til problem 3.

Gale, Kuhn og Tucker knyttede følgende kommentar til problem 3:

> *A problem of this symmetric sort was formulated by von Neumann* [1947] *for the case in which D reduces to a scalar $\delta$, corresponding to Problems* ($1\delta$), *and* ($2\delta$). [Gale et al., 1951, s.323]

De opfattede således ikke von Neumanns resultat i noten fra 1947 som et bevis for dualitetssætningen. De har derimod betragtet det som noget, der mindede om det, de kaldte for eksistenssætninger.

Selve beviset for deres eksistenssætning byggede de igen på Farkas' Lemma, denne gang i forklædning af lemma 2. De lod $x,\ y_0,\ u,\ v_0$ være et sæt opfyldende eksistensbetingelserne (3) og (4). Idet de satte $b = By_0$ og $c = C'v_0$, opnåede de, at (3) og (4) medfører, at

($3\delta$) der eksisterer et $x \geqq 0$ for hvilket $Ax \leqq b$,

($4\delta$) der eksisterer et $u \geqq 0$ for hvilket $A'u \geqq c$.

Lemma 2 benyttet først på den ene betingelse gav dem, at

($3\delta^*$) der findes ingen løsning $u \geqq 0$, til ulighedssystemet $A'u \geqq 0,\ b'u < 0$,

og anvendt på den anden betingelse fik de, at

($4\delta^*$) der findes ingen løsning $x \geqq 0$, til ulighedssystemet $Ax \leqq 0,\ c'x > 0$.

Herefter viste Gale, Kuhn og Tucker, at uligheden

$$(*) \qquad b'u \geqq c'x,$$

gælder for alle $\lambda \geqq 0,\ u \geqq 0,\ x \geqq 0$ der opfylder, at $Ax \leqq \lambda b,\ A'u \geqq \lambda c$. For $\lambda > 0$ følger resultatet direkte af ulighedsbetingelserne, og for $\lambda = 0$ følger det af ($3\delta^*$) og ($4\delta^*$) [Gale et al., 1951, s.324].

Gale, Kuhn og Tucker formulerede derefter ovenstående som matrix uligheder:

$$\text{Der findes ingen løsning} \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ u \\ x \end{pmatrix} \geqq 0 \quad \text{til ulighedssystemet}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -c \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \lambda \\ u \\ x \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} b' & -c' \\ 0 & A \\ -A' & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \lambda \\ u \\ x \end{pmatrix} \geqq 0.$$

Ved at anvende lemma 2 på dette fik de eksistensen af et $u_0 \geqq 0$ og et $x_0 \geqq 0$, for hvilke

$$\begin{pmatrix} b' & -c' \\ 0 & A \\ -A' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -c \end{pmatrix}$$

[Gale et al., 1951, s.234].
Ved at gange ud og sammenholde med ulighedsbibetingelserne opnåede de, at

$$b'u_0 = u_0'Ax_0 = c'x_0,$$

og herfra bestemte Gale, Kuhn og Tucker en matrix $D$, som opfylder

$$Dy_0 = Cx_0 \quad \text{og} \quad v_0'D = u_0'B,$$

hvilket betyder, at $D$ har egenskaberne (1) og (2) for de oprindelige $y_0$, $v_0$ og de $x_0$, $u_0$, hvis eksistens blev sikret af lemma 2 [Gale et al., 1951, s.324].

Idet det er helt trivielt, at eksistensbetingelserne (3) og (4) holder, hvis der eksisterer en matrix $D$ med egenskaberne (1) og (2), er Gales, Kuhns og Tuckers bevis tilendebragt.

Jeg vil ikke gå nærmere ind på eksistenssætning 2.

Resultatet (*) er det resultat, der i dag kaldes for det svage dualitetslemma (*weak duality lemma*). Det udsiger, at betragter man skalar-problemet, så vil der for variable $x$, $u$ i mulighedsområdet for det primale hhv. duale problem gælde, at værdien af kriteriefunktion for maximeringsproblemet altid vil være mindre end eller lig med værdien af kriteriefunktionen for minimeringsproblemet.

### Relationen til Spilteori

Gale, Kuhn og Tucker sluttede artiklen af med at relatere deres resultater til spilteori [Gale et al., 1951, s.326]. De viste, at minimaxsætningen for et to-personers nulsum spil med betalingsmatrix $A$ kan fås som et biprodukt af eksistensætningen. De karakteriserede en løsning $(\lambda, u, x)$ (hvor $\lambda$ er værdien af spillet, og $u$, $x$ er optimale, blandede strategier) som løsning til et ulighedssystem. Det vil sige, de var interesserede i at finde en løsning $(\lambda, u, x)$, som opfylder

$$A'u \geqq \lambda i, \quad u \geqq 0, \quad g'u = 1,$$

$$Ax \leqq \lambda g, \quad x \geqq 0, \quad i'x = 1,$$

hvor $g$ og $i$ er vektorer, hvis komponenter alle er lig med 1. For at udlede minimaxsætningen, nemlig at en sådan løsning altid findes, som et biprodukt af ovenstående eksistenssætning antog Gale, Kuhn og Tucker først, at $A > 0$, hvilket ikke er nogen essentiel restriktion, idet man kan lægge den samme vilkårlige konstant $\kappa$ til samtlige elementer i matrixspillet uden at influere på spillet. Det eneste, der sker, er, at spillets værdi øges med $\kappa$. Dermed opnåede de, at $\lambda$, hvis den eksisterer, nødvendigvis må være positiv, og de kunne da dividere igennem med $\lambda$:

$$A'(u/\lambda) \geqq i, \quad u/\lambda \geqq 0, \quad g'(u/\lambda) = 1/\lambda,$$

$$A(x/\lambda) \leqq g, \quad x/\lambda \geqq 0, \quad i'(x/\lambda) = 1\lambda.$$

Ved at erstatte $1/\lambda$, $x/\lambda$ og $u/\lambda$ med $\delta$, $u$, $x$ og bytte om på rækkefølgerne formulerede de ovenstående som:

$$(1a) \qquad i'x = \delta \quad \text{for et } x \geqq 0, \text{ for hvilket } Ax \leqq g,$$

$$(2a) \qquad g'u = \delta \quad \text{for et } u \geqq 0, \text{ for hvilket } A'u \geqq i.$$

Dette svarer til problem 3 formuleret for 'skalar'-tilfældet, idet problemet ikke ændres ved, at ulighedstegnene i $Cx \geqq Dy$ og $B'u \leqq D'v$ ændres til lighedstegn, hvilket følger af, at en matrix $D$ med egenskaberne (1) og (2*) nødvendigvis må give $Cx = Dy$, samt at en matrix $D$ med egenskaberne (2) og (1*) vil give $B'u = D'v$.

Ifølge eksistenssætningen har dette 'skalar'-problem en løsning $\delta$, hvis og kun hvis eksistensbetingelserne

$$Ax \leqq g \quad \text{for et } x \geqq 0; \quad A'u \geqq i \quad \text{for et } u \geqq 0$$

begge er opfyldt, hvilket kan blive tilfældet ved at sætte $x = 0$ og vælge $u$ tilstrækkelig stor. Man kommer tilbage til det oprindelige spilproblem ved at dividere igennem med $\delta$ i (1a) og (2a); $\delta$ er positiv og entydigt bestemt. Entydigheden følger af dualitetssætningen, thi spilproblemet viste sig at være ækvivalent med problem 3, og $\delta$ kan så opfattes som løsning til både problem ($1\delta$) og problem ($2\delta$), og dualitetssætningen giver jo, at problem ($1\delta$) og ($2\delta$) enten har en entydig, fælles løsning eller ingen løsning overhovedet.

Dermed har Gale, Kuhn og Tucker givet et nyt bevis for minimaxsætningen og fastslået at den matematiske teori for uligheder kan fungere som det matematiske grundlag for lineær programmering, idet den leverer såvel dualitets- som eksistenssætningen og giver en ramme, i hvilken spilteori og lineær programmering forenes.

I dette arbejde af Gale, Kuhn og Tucker, finder jeg det interessant, at de diskuterede det lineær programmeringsproblem og viste dualitets- og eksistenssætninger for det generelle matrixproblem i stedet for blot at se på skalarproblemet, idet det jo er skalarproblemet, der kan formuleres som et to-personers nulsum spil. Dette fortolker jeg, som om lineær programmering her behandles som et matematisk forskningsområde. Drejede det sig blot om at præcisere forbindelsen mellem lineær programmering og spilteori er det en unødig omvej at gå omkring det generelle matrixproblem. Betragter man der imod lineær programmering som et matematisk forskningsområde, er det meget naturligt at udforske problemstillingen i en mere generel ramme. Gale, Kuhn og Tucker var som matematikforskere i universitetsverdenen vant til at arbejde på denne måde. Min konklusion om, at lineær programmering ved forbindelsen til spilteori ændrede status videnskabeligt set fra at være en model til løsning af et praktisk problem til at blive betragtet som et matematisk forskningsområde, bygger blandt andet på denne observation i det første publicerede arbejde om dualitetssætningen i lineær programmering.

# Ikke-lineær programmering

Tuckers første reaktion på lineær programmering var som nævnt, at det mindede ham om strømfordelingsproblemet for elektriske netværk. Denne association udforskede han yderligere under et forskningsophold ved Stanford universitetet i Californien i efteråret 1949. Ifølge Kuhn indså Tucker her, at strømfordelingsproblemet kan formuleres som et optimeringsproblem om minimering af varmetab med kvadratisk kriteriefunktion. Denne indsigt førte til en erkendelse af, at Lagranges multiplikator metode, som er den metode, der normalt benyttes til optimering under bibetingelser givet ved *ligninger*, kunne tilpasses optimeringsproblemer under *ulighedsbibetingelser*

[Kuhn, 1976, s.12-13]. Tucker skrev herefter til Kuhn og Gale og spurgte, om de ville være med til at udvide dualiteten for lineær programmering til kvadratisk programmering [Kuhn, 1976, s.12-13].

David Gale afslog[6], men Kuhn accepterede Tuckers invitation, og deres arbejde skred ifølge Kuhn fremad i en brevveksling mellem Stanford og Princeton, hvor Kuhn endnu befandt sig [Kuhn, 1976, s.13][7]. I løbet af arbejdsprocessen ændrede Kuhn og Tucker deres fokus fra det kvadratiske til det generelle, ikke-lineære tilfælde og skabte dermed ikke-lineær programmering. Deres fælles arbejde blev publiceret med titlen *Nonlinear Programming* i en kongresberetning fra *The Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, der blev afholdt i 1950.

## Kuhns og Tuckers artikel: *Nonlinear Programming*

Ideen var således at tilpasse den klassiske Lagrangemetode. I indledningen til artiklen redegør Kuhn og Tucker for de resultater, man opnår ved at benytte Lagrangefunktionen på lineær programmering. Ud fra det lineære programmeringsproblem

$$\text{maximer} \quad g(x) = \sum c_i x_i, \qquad c_i \in \mathbf{R},$$

hvor $x_1, \ldots, x_n$ er $n$ reelle variable, underlagt $m+n$ lineære ulighedsbibetingelser:

$$f_h(x) = b_h - \sum a_{hi} x_i \geqq 0, \quad x_i \geqq 0,$$

hvor $h = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{hi}$, $b_h \in \mathbf{R}$, dannede Kuhn og Tucker den tilhørende Lagrangefunktion:

$$\phi(x,u) = g(x) + \sum u_h f_h(x), \qquad u_h \in \mathbf{R}.$$

De bemærkede, at man kan vise, at $x^0 = ({x^0}_1, \ldots, {x^0}_n)$ maximerer $g(x)$ under de givne bibetingelser, hvis og kun hvis der findes en vektor $u^0 = ({u^0}_1, \ldots, {u^0}_m) \in \mathbf{R}^m$ med ${u^0}_i \geq 0$ for alle $i$, således at

$$\phi(x,u^0) \leqq \phi(x^0,u^0) \leqq \phi(x^0,u) \text{ for alle } x \geqq 0, \ u \geqq 0,$$

[6]David Gale besøgte København i foråret 1997, og i den anledning spurgte jeg ham, hvorfor han afslog Tuckers invitation. Gale svarede, at han hellere ville fortsætte sin interesse for konveksitetsteori end bruge tid på, hvad han dengang troede, blot ville være en udvidelse af et færdigt stykke arbejde, og han tilføjede: '*Jeg har desværre ingen andel i ikke-lineær programmerings opståen*'.

[7]Kuhn har ikke gemt disse breve, og han fandt heller ingen af disse breve blandt Tuckers efterladte papirer.

det vil sige, hvis og kun hvis der findes en vektor $u^0 \in \mathbf{R}^m$ bestående af ikke-negative komponenter (multiplikatorer), således at $(x^0, u^0)$ er et saddelpunkt for Lagrangefunktionen $\phi(x, u)$ [Kuhn og Tucker, 1950, s.481].

Herefter knyttede Kuhn og Tucker lineær programmering sammen med spilteori, idet de gjorde opmærksom på, at et sådan saddelpunkt for Lagrangefunktionen er løsning til et tilhørende to-personers nulsum spil, og endelig knyttede de an til dualitetsteorien for lineær programmering, idet '*The bilinear symmetry of $\phi(x, u)$ in $x$ and $u$ yields the characteristic duality of linear programmering*' [Kuhn og Tucker, 1950, s. 481][8].

Et lineært programmeringsproblem har altså en løsning, hvis og kun hvis den tilhørende Lagrangefunktion har et saddelpunkt, og dette saddelpunkt indeholder da en løsning dels til det tilhørende to-personers nulsum spil, dels til det lineære programmeringsproblem samt dets duale. Saddelpunkter for Lagrangefunktionen hørende til et lineært programmeringsproblem indeholder således dualitetsegenskaben for lineær programmering. Af nedenstående analyse af Kuhns og Tuckers artikel vil det fremgå, at deres teoriudvikling for ikke-lineær programmering tog udgangspunkt i saddelpunktsproblemet. Det skyldes, at de ledte efter en tilsvarende sammenhæng mellem saddelpunkter for Lagrangefunktioner og løsninger til ikke-lineære programmeringsproblemer, som eksisterer for lineær programmering. Deres oprindelig mål var at udvide dualitetsresultatet for lineær programmering til ikke-lineær programmering, og saddelpunkter for Lagrangefunktionen var derfor et meget naturligt udgangspunkt.

Kuhn og Tucker delte artiklen op i syv afsnit. Først udledte de resultater om nødvendige og tilstrækkelige betingelser for eksistensen af et saddelpunkt for en differentiabel funktion $\phi(x, u)$ af ikke-negative variable $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$. Disse resultater blev derefter anvendt til at vise nødvendige og tilstrækkelige betingelser for eksistensen af en optimal løsning til et ikke-lineært programmeringsproblem via den tilhørende Lagrangefunktion. Her antog Kuhn og Tucker, at de involverede funktioner $g(x)$, $f_h(x)$ er differentiable (de er ikke længere nødvendigvis lineære), og derudover forlangte de, at de funktioner, der beskriver bibetingelserne, $f_h$, er *'mildly qualified'* [Kuhn og Tucker, 1950, s. 481]. Jeg vender tilbage til denne '*qualification*' på bibetingelserne senere. Herefter viste Kuhn og Tucker, at ækvivalensen mellem et maximum for $g(x)$ under ulighedsbibetingelser og et saddelpunkt for Lagrangefunktionen $\phi(x, u)$ holder, hvis det forlanges, at funktionerne $g$ og $f_h$ udover at være differentiable også er konkave for ikke-negative $x$. De afsluttede artiklen med dels at anvende den generelle teori på kvadratisk programmering og lineær programmering, dels at udvide teorien til bl.a. maximumsproblemer

[8]For et bevis herfor se [Goldman og Tucker, 1956].

for vektorfunktioner. Til allersidst så de på, hvad der sker, hvis man ændrer på de $m + n$ bibetingelser.

I det følgende vil jeg behandle Kuhns og Tuckers resultater om nødvendige betingelser for eksistensen af en optimal løsning til et ikke-lineært programmeringsproblem. Det var dette resultat, der søsatte ikke-lineær programmering, og som i dag ofte omtales som '*De Berømte Kuhn-Tucker Betingelser*'. Derudover vil jeg se på deres afsnit om ækvivalensen mellem saddelpunkter og maximumsproblemer for det konkave tilfælde, idet det viser fremad mod nye resultater og giver en retning for videre forskning.

## Kuhn-Tucker betingelserne

Kuhn og Tucker lagde ud med at vise nødvendige og tilstrækkelige betingelser for eksistensen af en løsning til saddelpunktsproblemet, hvilket går ud på at finde ikke-negative vektorer $x^0 \in \mathbf{R}^n$, $u^0 \in \mathbf{R}^m$, således at

$$\phi(x, u^0) \leqq \phi(x^0, u^0) \leqq \phi(x^0, u) \qquad \text{for alle } x \geqq 0,\ u \geqq 0,$$

hvor $\phi(x, u)$ er en differentiabel funktion af en $n$-vektor $x$ med komponenter $x_i \geq 0$ og en $m$-vektor $u$ med komponenter $u_h \geq 0$. De lod ${\phi^0}_x$, ${\phi^0}_u$ betegne de partielle afledede mht. $x$ hhv. $u$ evalueret i punktet $x^0$, $u^0$. Det vil altså sige, at ${\phi^0}_x$ er en $n$-vektor:

$${\phi^0}_x = (\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x^0)),$$

og ${\phi^0}_u$ er en $m$-vektor:

$${\phi^0}_u = (\frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u^0), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial u_m}(u^0)).$$

Med ${\phi^0}'_x$ betegnede de den transponerede vektor til vektoren ${\phi^0}_x$. Med disse betegnelser viste Kuhn og Tucker følgende sætning:

> En nødvendig betingelse for at $(x^0, u^0) \in \mathbf{R}^n \mathrm{x} \mathbf{R}^m$, $x^0 \geqq 0$, $u^0 \geqq 0$ er løsning til saddelpunktsproblemet er, at følgende betingelser er opfyldt:
>
> (1) $${\phi^0}_x \leqq 0, \quad {\phi^0}'_x x^0 = 0, \quad x^0 \geqq 0$$
>
> (2) $${\phi^0}_u \geqq 0, \quad {\phi^0}'_u u^0 = 0, \quad u^0 \geqq 0$$

Betingelserne (1), (2) samt

$$(3) \qquad \phi(x, u^0) \leqq \phi(x^0, u^0) + \phi^{0\prime}_{\ x}(x - x^0)$$

$$(4) \qquad \phi(x^0, u) \geqq \phi(x^0, u^0) + \phi^{0\prime}_{\ u}(u - u^0)$$

for alle $x \geqq 0$, $u \geqq 0$ er tilstrækkelige for, at $x^0$, $u^0$ er en løsning til saddelpunktsproblemet [Kuhn og Tucker, 1950, s.482-483].

Sætningen siger altså, at en nødvendig betingelse for at $(x^0, u^0) \in \mathbf{R}^n \mathrm{x} \mathbf{R}^m$, $x^0 \geqq 0$, $u^0 \geqq 0$ er et saddelpunkt for funktionen $\phi : \mathbf{R}^n \mathrm{x} \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}$, er at

$$(1) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x^0) \leqq 0 \text{ for } i = 1, \dots, n, \\ (\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x^0)) \cdot x^0 = 0, \\ x^0_{\ i} \geq 0, \text{ for } i = 1, \dots, n \end{gathered}$$

samt at

$$(2) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial \phi}{\partial u_j}(u^0) \geqq 0 \text{ for } j = 1, \dots, m, \\ (\frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u^0), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial u_m}(u^0)) \cdot u^0 = 0, \\ u^0_{\ j} \geq 0, \text{ for } j = 1, \dots, m. \end{gathered}$$

En tilstrækkelig betingelse for at $(x^0, u^0)$ er et saddelpunkt, er at (1) og (2) samt følgende betingelser er opfyldt

$$(3) \qquad \phi(x, u^0) \leqq \phi(x^0, u^0) + (\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x^0)) \cdot (x - x^0)$$

$$(4) \qquad \phi(x^0, u) \geqq \phi(x^0, u^0) + (\frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u^0), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial u_m}(u^0)) \cdot (u - u^0).$$

I det tilfælde, hvor $\phi$ er en konkav funktion af $x$, betyder (3), at $\phi$ har subgradienten $(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x^0))$ i $(x^0, u^0)$. Tilsvarende, hvis $\phi$ er en konveks funktion af $u$, betyder (4), at $\phi$ har subgradienten $(\frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u^0), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial u_m}(u^0))$ i $(x^0, u^0)$.

Kuhns og Tuckers overordnede problemstilling var ikke saddelpunktsproblemet, men at finde nødvendige og tilstrækkelige betingelser for eksistensen af en løsning, $x^0$, til følgende ikke-lineære programmeringsproblem:

Maksimer

$$g(x)$$

under bibetingelserne

$$\begin{aligned} F(x) &\geqq 0 \\ x &\geqq 0. \end{aligned}$$

Her er $g$ en differentiabel funktion af $x \in \mathbf{R}^n$, defineret for $x \geqq 0$, mens $x \to u = F(x)$ betegner en differentiabel vektorfunktion, der afbilder ikke-negative $n$-vektorer $x$ på $m$-vektorer $u$. $F(x)$ er således en $m$-vektor, hvis koefficienter $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ er differentiable funktioner af $x$, defineret for $x \geqq 0$.

Kuhn og Tucker lod $F^0$, $g^0$ betegne Jacobimatricen for $F$ i punktet $x^0$ hhv. gradienten for $g$ i punktet $x^0$. Med disse betegnelser formulerede Kuhn og Tucker i 1950 deres senere så berømte sætning om nødvendige betingelser for eksistensen af en løsning til et ikke-lineært programmeringsproblem som følger:

*Sætning 1.* Hvis $x^0$ skal være løsning til ovenstående maximumsproblem, er det nødvendigt, at $x^0$ og et eller andet $u^0$ opfylder betingelserne:

$$(1) \qquad {\phi^0}_x \leqq 0, \quad {\phi^0}'_x x^0 = 0, \quad x^0 \geqq 0$$

og

$$(2) \qquad {\phi^0}_u \geqq 0, \quad {\phi^0}'_u u^0 = 0, \quad u^0 \geqq 0$$

for $\phi(x,u) = g(x) + u'F(x)$.

Disse betingelser blev senere døbt *Kuhn-Tucker betingelserne*, og de udgør et af hovedresultaterne i den matematiske teori for ikke-lineær programmering.

Tucker præsenterede resultatet første gang i maj 1950 ved et seminar afholdt ved *the Rand Corporation*, og det gik hverken værre eller bedre, end at en vis C. B. Tompkins diskede op med noget så ubehageligt som et modeksempel [Kuhn, 1976, s.14]. Kuhn og Tucker hastede til arbejdet igen og indså, at sætningen kun holder, hvis bibetingelserne er underlagt en såkaldt regularitetsbetingelse, *constraint qualification*, en terminologi indført af Kuhn og Tucker [Kuhn og Tucker, 1950, s.483]. Først splittede Kuhn og

Tucker ulighedsbibetingelserne i punktet $x^0$, $F(x^0) \geqq 0$, $Ix^0 \geqq 0$ ($I$ er en $nxn$-enhedsmatrix) op på følgende måde

$$F_1(x^0) = 0, \quad I_1x^0 = 0 \quad \text{og} \quad F_2(x^0) > 0, \quad I_2x^0 > 0.$$

Det vil sige, vektoren $F_1(x^0) = 0$ indeholder de bibetingelser, som er *aktive* i $x^0$, det vil sige de bibetingelser, der er 0 i $x^0$. Tilsvarende giver $I_1x^0$ de komponenter af $x^0$, som er 0. Den regularitetsbetingelse Kuhn og Tucker indførte gik ud på, at der for ethvert $x^0$ tilhørende randen af mængden bestemt af bibetingelserne skal gælde, at der for enhver vektor $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$, som opfylder de homogene, lineære uligheder

$$(*) \qquad {F^0}_1 dx \geqq 0, \quad I_1 dx \geqq 0,$$

skal findes en differentiabel kurve $x = a(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 1$, med $x^0 = a(0)$, som bliver inde i bibetingelsesmængden, samt en positiv skalar $\lambda$, således at $\frac{da}{d\theta}(x^0) = \lambda dx$.

Det betyder med andre ord, at enhver 'retning', $dx$, som opfylder (*), det vil sige, som opfylder, at den retningsafledede af de aktive bibetingelsesfunktioner i retning $dx$ er ikke-negative, skal være tangent til en differentiabel kurve $a(\theta)$ indeholdt i mængden bestemt af bibetingelserne [Kuhn og Tucker, 1950, s.483]. Denne regularitetsbetingelse svarer til det, der i variationsregning kaldes for *normalitetsbetingelse*[9]. Regularitetsbetingelsen sikrer, at man har udelukket singulariteter på randen af bibetingelsesmængden.

Kuhn og Tucker byggede deres bevis på Farkas' Lemma (se lemma 1 s.109). De antog, at $x^0$ maksimerer $g(x)$ under bibetingelserne $F(x) \geqq 0$, $x \geqq 0$, samt at bibetingelserne opfylder regularitetsbetingelsen. For ethvert vektordifferential (retning), $dx$, som opfylder ulighederne

$${F^0}_1 dx \geqq 0, \quad I_1 dx \geqq 0,$$

vil $(g^0)'dx \leqq 0$,[10] thi ellers ville man ved at bevæge sig i $dx$'s retning ud fra $x^0$, hvilket kan lade sig gøre på grund af regularitetsbetingelsen, opnå voksende værdier af $g$, i strid med at $g(x^0)$ er lokalt maksimum. Farkas' Lemma sikrer da eksistensen af multiplikatorer, ${u^0}_1 \geqq 0$, ${w^0}_1 \geqq 0$, således at

$$-g^0 = ({F^0}_1)'{u^0}_1 + (I_1)'{w^0}_1.$$

[9]I næste kapitel vil det blive klart, at den nøje svarer til den betingelse, Karush benyttede i sin sætning om nødvendige betingelser for at tvinge kriteriefunktion, det vil sige den funktion, der skal optimeres, til at indgå i betingelserne.

[10]$(g^0)'$ betegner den transponerede til $g^0$.

Hvis $x^0$ er et indre punkt i bibetingelsesmængden, er der ingen aktive bibetingelser, og $x^0$ maksimerer da $g(x)$ uafhængigt af bibetingelserne. Dermed er $g^0 = 0$, og Kuhn-Tucker betingelserne gælder med $u^0 = 0$.

Kuhn og Tucker bemærkede at ligningen $-g^0 = (F^0{}_1)'u^0{}_1 + (I_1)'w^0{}_1$ kan bringes på formen

$$-g^0 = (F^0)'u^0 + w^0 \qquad \text{for visse} \quad u^0 \geqq 0,\ w^0 \geqq 0$$

ved eventuelt at tilføje 0'er til $u^0{}_1$ og $w^0{}_1$. Dermed opnåede de, at

$$\phi^0{}_x = g^0 + (F^0)'u^0 \leqq g^0 + (F^0)'u^0 + w^0 = 0.$$

Idet $(w^0)'x^0 = (w^0{}_1)'I_1x^0 = 0$, opnåede de samtidig, at

$$(\phi^0{}_x)'x^0 = (g^0)'x^0 + (u^0)'F^0x^0 = 0.$$

Endelig er

$$\phi^0{}_u = F(x^0) \geqq 0 \qquad \text{og} \qquad (\phi^0{}_u)'u^0 = (u^0)'F(x^0) = (u^0{}_1)'F_1(x^0) = 0,$$

hvilket afsluttede deres bevis for 'Kuhn-Tuckers' sætning.

Dette var således den udformning, Kuhn-Tuckers sætning havde første gang, den blev publiceret. De viste også en *tilstrækkelighedssætning*, som sagde, at hvis blot $x^0$ og et eller andet $u^0$ opfylder betingelserne (1), (2) og (3) for

$$\phi(x,u) = g(x) + u'F(x)$$

så er $x^0$ en løsning til maksimumsproblemet [Kuhn og Tucker, 1950, s.485].

Kuhns og Tuckers hovedresultat var altså, at de nødvendige betingelser for eksistensen af et saddelpunkt for Lagrangefunktionen er identisk med de nødvendige betingelser for eksistensen af et maksimum for $g(x)$ under bibetingelserne $F(x) \geqq 0$, $x \geqq 0$. Tilsvarende er de tilstrækkelige betingelser for et saddelpunkt for Lagrangefunktionen også tilstrækkelige til at sikre eksistensen af et sådan maksimum. Her kan man dog, som vi lige har set, klare sig med lidt mindre, idet betingelse (4) ikke behøver at være opfyldt. For ikke-lineære programmeringsproblemer er der således også, som det var tilfældet med lineær programmering, en sammenhæng mellem løsninger til problemet og saddelpunkter for den tilhørende Lagrangefunktion.

## Konveksitet og saddelpunkter

Det virker umiddelbart kunstigt at indføre betingelserne (3) og (4), men de er automatisk opfyldt, hvis $\phi(x,u^0)$ er en konkav funktion af $x$, og $\phi(x^0,u)$ er en konveks funktion af $u$.

For at få ækvivalens mellem saddelpunktsbetingelserne for Lagrangefunktionen og nødvendige og tilstrækkelige betingelser for maksimum af $g$ under ulighedsbibetingelserne forlangte Kuhn og Tucker nu, at funktionerne $g$, $f_1, \ldots, f_m$ er både konkave og differentiable for $x \geqq 0$. Dermed kunne de vise, at

> $x^0$ er en løsning til maksimumsproblemet, hvis og kun hvis der findes et $u^0$, således at $x^0$, $u^0$ er et saddelpunkt for Lagrangefunktionen
>
> $$\phi(x,u) = g(x) + u'F(x).$$

Det afgørende punkt i Kuhns og Tuckers bevis for dette er, at der for konvekse differentiable funktioner $f$ gælder, at

$$f(x) \geqq f(x^0) + \nabla f(x^0)(x - x^0)$$

for alle $x^0$ og $x$ i definitionsmængden. For konkave funktioner gælder det samme blot med omvendt ulighedstegn.

Dermed har Kuhn og Tucker opnået et nødvendigheds- og tiltrækkelighedsresultat af samme slags som det, der gælder i lineær progammering, nemlig ækvivalens mellem løsninger til et ikke-lineært programmeringsproblem og saddelpunktsproblemet for den tilhørende Lagrangefunktion. Denne sammenhæng mellem konveksitet/konkavitet fik da også Kuhn og Tucker til at pege på en mulig videreudvikling af teorien:

> *Throughout this paper it is assumed that the functions occurring are differentiable. But it seems to be an interesting consequence of the directional derivative properties of general convex (or concave) functions* [2, *pp.*18 − 21] *that the equivalence between an inequality constrained maximum for $g(x)$ and a saddle value for the Lagrangian $\phi(x,u)$ still holds when the assumption of differentiability is dropped.* [Kuhn og Tucker, 1950, s. 482]

Henvisningen i citatet er til Bonnesen og Fenchel [Bonnesen og Fenchel, 1934], hvor de definerer den retningsafledede for konvekse (konkave) funktioner. I dag er dette videreudviklet til begrebet *subgradient*, som spiller en stor rolle i moderne lærebøgers fremstilling af ikke-lineær programmering. Droppes differentiabilitetsegenskaben, kræves det, at der også ændres på regularitetsbetingelsen, idet den jo netop anvender de afledede. Dette blev, ifølge Kuhn, gjort af Slater[11] i et upubliceret arbejde fra november 1950, hvori han viste

[11] Slater, M.: *Lagrange Multipliers Revisited*, Cowles Commission Discussion Paper No. 403, november, 1950. Referencen er taget fra Kuhns historiske artikel, hvor den er nummer 19; jeg har ikke fået fat i Slaters arbejde.

ækvivalensen med saddelpunkt for Lagrangefunktionen, uden at forlange differentiabilitet af de indgående funktioner. Slaters regularitetsbetingelse er, ifølge Kuhn, at der skal eksisterer et $x'$, således at $F(x') > 0$ [Kuhn, 1976, s. 14].

# Konklusion

Kuhn har flere gange givet udtryk for, at det var dualitetsegenskaben for lineær programmering, han og Tucker ønskede at videreudvikle til det ikke-lineære tilfælde [Kuhn, 1976, s.13], [Kuhn, Interview]. Dette bekræftes af den ovenstående analyse af deres artikel, som viser at den styrende mekanisme i deres udvikling af teorien for ikke-lineære programmering var sammenhængen mellem nødvendige betingelser for optimale løsninger og nødvendige betingelser for eksistens af saddelpunkter for Lagrangefunktionen, hvilket tyder på, at det, de egentlig ledte efter, var en dualitetsteori for det ikke-lineære tilfælde. Denne konklusion, mener jeg, er med til at underbygge min påstand om, at lineær programmerings statusskift var en afgørende faktor for Kuhns og Tuckers udvikling af ikke-lineær programmering. Forbindelsen mellem spilteori og lineær programmering åbnede muligheden for interessante, matematiske resultater i lineær programmering, og dualitetssætningen er en sådan. Kuhn og Tucker befandt sig inden for den akademiske forskningsverden i matematik, og det var derfor meget naturligt at forsøge at udvide dualitetsresultatet til mere generelle problemstillinger. Det er i den sammenhæng, jeg mener, at fremkomsten af dualitetssætningen i lineær programmering spillede en afgørende rolle for udviklingen af ikke-lineær programmering.

På baggrund af Kuhns udtalelser og analysen af deres arbejde, mener jeg ikke, der kan herske megen tvivl om, at det var dualitetssætningen i lineær programmering, der motiverede Kuhn og Tucker til at udvikle ikke-lineær programmering. Det er derfor bemærkelsesværdigt, at der ikke er nogen overvejelser om dualitet for ikke-lineær programmering i Kuhns og Tuckers arbejde fra 1950.

# Udviklingen af dualitetsteori for ikke-lineær programmering

## Fenchels dualitetssætning

Den videre forskning i den matematiske teori for ikke-lineær programmering efter Kuhns og Tuckers artikel var koncentreret omkring dualitetsteori. Det første dualitetsresultat blev udviklet af Werner Fenchel i løbet af foråret 1951.

Werner Fenchel blev født i Tyskland i 1905 og døde i Danmark i 1988.[12] Han studerede matematik ved universitetet i Berlin, hvorfra han fik en doktorgrad i 1928. Han flyttede derefter til Göttingen, hvor han blev tilbudt en assistentstilling hos Landau. Fenchel var af jødisk afstamning og blev af den grund fyret fra sin stilling i Göttingen i 1933. I 1934 flygtede han til Danmark, og i 1943 flygtede han videre til Sverige. Efter krigen vendte han tilbage til Danmark og blev med tiden dansk statsborger. Han blev professor ved matematisk institut i København i 1956.

Fenchel besøgte Danmark første gang i foråret 1931, finansieret af et stipendium fra *the Rockefeller Foundation.* Her indledte han et samarbejde med Tommy Bonnesen om konvekse legemer. Det resulterede i udgivelsen af monografien *Theori der konvekse Körper* i 1934, som blev en klassiker inden for konveksistetsteori [Bonnesen og Fenchel, 1934].

Fenchels dualitetssætning i ikke-lineær programmering opstod som en anvendelse af begrebet konjugerede, konvekse funktioner, som han udviklede i artiklen *On Conjugate Convex Functions* fra 1949 [Fenchel, 1949].

## Konjugerede, konvekse funktioner

Fenchel indførte begrebet konjugerede, konvekse funktioner som konsekvens af en undersøgelse af den underliggende struktur bag en del af de uligheder, der optræder i matematisk analyse. Han havde bemærket, at disse uligheder ofte kan betragtes som konsekvenser af visse funktioners konveksitet, idet der i adskillige af disse uligheder optræder '*pairs of "conjugate" functions ..., for instance pairs of powers with exponents a and* $\alpha$ *related by* $1/a + 1/\alpha = 1$' [Fenchel, 1949, s.73].

Fenchel viste i artiklen, at der til enhver konveks funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$, defineret på en konveks delmængde $G$, af $\mathbf{R}^n$ og opfyldende visse kontinuitetsbetingelser, på entydig måde korresponderer en konveks delmængde, $\Gamma$, af $\mathbf{R}^n$ og en konveks funktion $\phi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, defineret på $\Gamma$ og med de samme egenskaber som $f$, således at uligheden

$$x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n \leq f(x_1, \ldots, x_n) + \phi(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

gælder for alle punkter $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $G$ og alle punkter $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ i $\Gamma$. Korrespondancen mellem $G$, $f$ og $\Gamma$, $\phi$ er symmetrisk, og Fenchel kaldte de to funktioner $f$, $\phi$ for hinandens konjugerede [Fenchel, 1949, s.73-75].

[12]De biografiske data er fra [Ramskov, 1995], [Pedersen, 1988] og [Fuglede, 1989].

Ved at definere $\Gamma$ som mængden af alle punkter $\xi$, for hvilke udtrykket

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i - f(x)$$

er opadtil begrænset for $x$ i $G$, og dernæst sætte

$$\phi(\xi) = \sup_{x\in G}(\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i - f(x))$$

viste Fenchel ovenstående resultat. Definitionen af $\phi$ sikrer, at uligheden gælder. Fenchel viste, at mængden $\Gamma$ er ikke-tom ved at betragte uligheden $\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i - f(x_1, \dots, x_n) \leq z$. Han omskrev den til $f(x) \geq \sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i - z$, hvis geometriske indhold er, forklarede Fenchel, at hyperplanen $y = \sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i - z$ i $\mathbf{R}^{n+1}$ med normalvektor $(\xi_1, \dots, \xi_n, -1)$ intet sted ligger over hyperfladen $y = f(x)$. $-z$ er denne hyperplans skæring med $y$-aksen [Fenchel, 1949, s.75].

Fenchel anvendte herefter det velkendte resultat fra konveksitetsteorien, som siger, at der til den konvekse hyperflade $y = f(x)$ findes mindst én støtte hyperplan, det vil sige en hyperplan som indeholder mindst ét punkt af hyperfladen og intet sted ligger over den. Det indebærer, at der findes mindst ét punkt i $\Gamma$, og dermed har Fenchel redegjort for, at mængden $\Gamma$ er ikke-tom. Yderligere gælder der, argumenterede han, at findes der en støtte hyperplan med normalvektor $(\xi_1, \dots, \xi_n, -1)$, og er $(x^0, f(x^0))$ kontaktpunktet mellem hyperplanen og hyperfladen $y = f(x)$, så er $\phi(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^0\xi_i - f(x^0)$; og $-\phi(\xi)$ er da denne hyperplans skæring med $y$-aksen [Fenchel, 1949, s.75].

### Fenchels forbindelse til Tuckers program

Fenchel tilbragte forårssemesteret 1951 som gæsteprofessor ved universitetet i Princeton. Her holdt han en række forelæsninger om konveksitetsteori inden for rammerne af Tuckers logistikprojekt fra ONR. I et brev til Fenchel efter dennes hjemkomst til Danmark i sommeren 1951 skrev Tucker og takkede Fenchel: '*... I wanted to thank you very much for the fine contributions you made to our project ...*' [Tucker, 1951, brev, 11 juni]. Fenchels forelæsninger udkom to år senere som *Lecture Notes.* De var baseret på udførlige forelæsningsnoter taget af D. W. Blackett. Udarbejdelsen samt trykningen blev finansieret af ONR gennem Tuckers logistikprojekt, og noterne udkom med nogen forsinkelse i september 1953. Disse noter fik ligesom Fenchels monografi sammen med Bonnesen stor betydning for den videre forskning i konveksitetsteori.

Afsnit 6 i noternes sidste kapitel har overskriften *A Generalized Programming Problem,* og heri formulerede Fenchel den første dualitetssætning for ikke-lineær programmering. Den kaldes i dag for Fenchels dualitetssætning.

Han betragtede en afsluttet, konveks funktion $f(x)$, defineret på en konveks mængde $C$ i $\mathbf{R}^n$, og en afsluttet konkav funktion $g(x)$, defineret på en konveks mængde $D$. Han lod $\phi : \Gamma \longrightarrow \mathbf{R}$ betegne den konjugerede funktion til $f$, mens $\psi : \Delta \longrightarrow \mathbf{R}$ betegnede den konjugerede til $g$ [13] [Fenchel, 1953, s.105]. Hertil opstillede han følgende to problemer:

> PROBLEM I: Find et punkt $x^0$ i $C \cap D$, således at $g(x) - f(x)$ som funktion i $C \cap D$ har maksimum i $x^0$.
>
> PROBLEM II: Find et punkt $\xi^0$ i $\Gamma \cap \Delta$, således at $\phi(\xi) - \psi(\xi)$ som funktion i $\Gamma \cap \Delta$ har minimum i $\xi^0$.

Fenchel viste, at de to problemer hænger sammen på følgende måde:

> Hvis mængderne $C \cap D$ og $\Gamma \cap \Delta$ er ikke-tomme, så er $g(x) - f(x)$ opadtil begrænset, og $\phi(\xi) - \psi(\xi)$ er nedadtil begrænset. Hvis yderligere nulpunktet er relativ indre til en af mængderne $C + (-D)$, $\Gamma + (-\Delta)$, så gælder:
>
> $$\sup_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x)) = \inf_{\xi \in \Gamma \cap \Delta} (\phi(\xi) - \psi(\xi)).$$
>
> [Fenchel, 1953, s.105-106].

Dette er den første dualitetssætning i ikke-lineær programmering. Fenchel viste ligeledes i Princetonnoterne, at hans dualitetssætning indeholder dualitetssætningen for lineær programmering.

I forordet til noterne tilkendegiver Fenchel, at mødet med Tucker var den direkte årsag til denne anvendelse af konjugerede-begrebet på ikke-lineære programmeringsproblemer:

> *The author* [Fenchel] *wishes to express his gratitude to Professor A. W. Tucker for giving him this opportunity to write this report and for calling his attention to the problems dealt with in the final sections (pp. 105-137).* [Fenchel, 1953, Acknowledgement]

Af afsnittet *Historical Notes*, som er placeret til sidst i noterne, fremgår det yderligere, at dette dualitetsresultat er ikke-publiceret materiale, og i et brev til Kuhn dateret 17. september 1952 skriver Fenchel direkte, at dette

[13] I Princetonnoterne redegjorde Fenchel for, at man på tilsvarende måde kan finde den konjugerede til en konkav funktion. Den konjugerede til en konkav funktion $g$ er defineret som $\psi(\xi) = \inf_{x \in D}(x'\xi - g(x))$, defineret i mængden $\Delta$ af alle $\xi$ for hvilke $x'\xi - g(x)$ er nedadtil begrænset for $x$ i $D$ [Fenchel, 1953, s.90].

materiale var nyt eller *just developed* på det tidspunkt, hvor forelæsningerne fandt sted [Fenchel, 1952, brev, 17 sept.].

Fenchels dualitetssætning i ikke-lineær programmering er således et eksempel på, hvordan kontakt mellem forskere der arbejder i forskellige, men i dette tilfælde beslægtede, områder kan drive matematikkens udvikling. Fenchel udviklede sit konjugerings-begreb med det formål at afdække den underliggende matematiske struktur, der lå til grund for adskillige uligheder fra analysen. Gennem sin sætning om konjugerede, konvekse funktioner lykkedes det ham at generalisere og udvikle en teori for disse uligheder. Tucker var samtidig leder af logistikprojektet støttet af ONR. Han havde finansiel mulighed for at sætte aktiviteter i gang, der handlede om matematisk programmering, spilteori og dertil relaterede emner som konveksitetsteori. Fenchels forelæsningsrække på Princeton var en sådan aktivitet, og kontakten til Tucker resulterede i, at Fenchel blev opmærksom på, at konjugerede konvekse funktioner kunne anvendes til at konstruere en dualitetssætning for ikke-lineær programmering.

Fenchel fortsatte ikke dette dualitetsarbejde for ikke-lineær programmering, men hans *Lecture Notes* kom til at præge den senere udvikling. Især R. T. Rockafellar videreudviklede Fenchels dualitetssætning og opbyggede en dualitetsteori for ikke-lineær programmering baseret på begrebet om konjugerede, konvekse funktioner [Rockafellar, 1964, 1966, 1968, 1970].

## Den videre udvikling af dualitetsteorien for ikke-lineær programmering

Fenchels dualitetssætning blev således udviklet i 1951, publiceret i 1953, men derefter skete der ikke rigtig noget inden for dualitetsteorien for ikke-lineær programmering. Først i 1960'erne begyndte der for alvor at komme skred i forskningen.

Det første dualitetsresultat for det generelle ikke-lineære programmeringsproblem, det vil sige tilfælde, hvor både kriteriefunktionen og bibetingelsesfunktionerne er ikke-lineære, blev udviklet af Philip Wolfe i 1960, publiceret i 1961 [Wolfe, 1961].

Mindre generelle eksempler havde været behandlet af William S. Dorn. I to artikler fra 1960 behandlede Dorn dels et programmeringsproblem med kvadratisk, konveks kriteriefunktion, dels et programmeringsproblem med ikke-lineær, konveks kriteriefunktion. I begge tilfælde var bibetingelserne givet ved lineære funktioner. For disse specielle, ikke-lineær programmeringsproblemer formulerede Dorn duale problemer og viste, at hvis det oprindelige problem har en løsning, så har det duale problem også en løsning og omvendt, samt at den optimale værdi for den primale hhv. duale kriteriefunktion er ens [Dorn, 1960].

Det lykkedes ikke for Wolfe at vise et tilsvarende resultat for det generelle, ikke-lineære tilfælde. Han betragtede det primale problem:

**Primale:** minimer $f(x)$ under bibetingelserne

$$g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

hvor $f$ er en reel, konveks, differentiabel funktion defineret på $\mathbf{R}^n$, og $g_i$, $i = 1, \ldots, m$ er reelle, konkave, differentiable funktioner defineret på $R^n$.

Hertil formulerede han et dualt problem:

**Duale:** maksimer $f(x) - \sum_{i=n}^{m} u_i g_i(x)$, under bibetingelserne

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x), \quad u_i \geq 0, \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Målet, som jo var sat fra lineær programmering, var at formulere et dualt problem, således at eksistensen af en løsning til enten det primale eller duale problem garanterede eksistensen af en løsning til det andet problem, samt at de optimale værdier var ens. Wolfe var kun i stand til vise dualiteten 'den ene vej', idet han kun formåede at vise, at hvis $x^0$ løser det primale problem, så findes et $u^0$ så $(x^0, u^0)$ løser det duale problem, og de optimale værdier er da ens [Wolfe, 1961, s.239-241].[14]

Det næste dualitetsresultat for det generelle, ikke-lineære programmeringsproblem kom stort set samtidig med Wolfes. Det blev udviklet af M. A. Hanson i artiklen *A Duality Theorem in Non-Linear Programming with Non-Linear Constraints* [Hanson, 1961]. Hanson formulerede et dualt problem til et ikke-lineært programmeringsproblem med konveks og differentiabel kriteriefunktion og konkave, differentiable bibetingelsesfunktioner. Han viste, at hvis der findes en løsning til et af problemerne (primale hhv. duale), så findes der også en løsning til det andet, samt at minimum af det primale er lig med maksimum af det duale [Hanson, 1961, s.64-69]. Det blev dog hurtigt

[14]Dette dualitetsbegreb kaldes i dag ofte for Lagrange-dualitet. Til sammenligning kan det nævnes, at det i dag ofte formuleres på følgende måde: Maksimer $\theta(u)$ under bibetingelsen $u \geq 0$, hvor $\theta(u) = inf_x(f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x))$, $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$ [Bazaraa et al., 1993, s.200]. Antages det, at de involverede funktioner er differentiable og konvekse fås Wolfes duale problem.

bemærket, at Hanson i beviset for sin dualitetssætning benytter nogle forudsætninger om Lagrangefunktionen hørende til det primale problem, som ikke var præciseret [Mangasarian, 1962]. Det skal lige bemærkes, at Hansons duale problem er anderledes end Wolfes.

Den manglende halvdel af Wolfes dualitetssætning blev vist året efter af O. L. Mangasarian. For at 'komme igennem' med beviset måtte han dog lægge nogle ekstra betingelser på de involverede funktioner. Han antog at $f$ udover at være konveks også var to gange kontinuert, differentiabel, samt at funktionerne $g_i$ udover at være konkave ligeledes var to gange kontinuert, differentiable. Under disse forudsætninger viste Mangasarian følgende omvendte sætning til Wolfes [Mangasarian, 1962, s.300-302]:

> Hvis $(x^0, u^0)$ er løsning til det duale problem, så er $x^0$ løsning til det primale problem. Hvis yderligere $f$ er strengt konveks i en omegn af $x^0$, eller hvis mindst én af de bibetingelser $g_i$, for hvilke den tilhørende multiplikator $u_i{}^0 \neq 0$, er strengt konkav i en omegn af $x^0$, så er de optimale værdier for de to kriteriefunktioner ens.

Mangasarians dualitetsresultat kræver temmelig stærke differentiabilitetsantagelser. I et forsøg på at slække på disse begyndte man at udforske sammenhængen mellem saddelpunkter for Lagrangefunktionen og løsninger til det primale hhv. duale programmeringsproblem. Denne udvikling startede i 1963 med en artikel af Josef Stoer [Stoer, 1963]. Hans resultater blev videreudviklet af Mangasarian og Ponstein og Karamardian [Mangasarian og Ponstein, 1965], [Karamardian, 1967].

Det sidste resultat, jeg vil nævne, stammer fra en artikel af Thomas Magnanti fra 1974. Heri viste han, at dualitetsteorierne for Fenchels dualitetsbegreb og Lagranges dualitetsbegreb er ækvivalente i den forstand, at de hver i sær kan udvikles ud fra hinanden. Et faktum der, argumenterede Magnanti, ikke burde komme som en overraskelse, idet de begge bygger på separerende hyperplansargumenter. Magnantis begrundelse for at publicere udledningen var, at det tilsyneladende ikke var velkendt i matematiske programmeringskredse, idet Magnanti havde observeret, at et antal af nyligt udkomne bøger i konveks optimeringsteori hverken nævner eller udforsker denne sammenhæng, men i stedet udvikler dem som to adskilte teorier [Magnanti, 1974].[15]

Det er interessant at bemærke, at i modsætning til Fenchels dualitetssætning, som opstod ud fra rent teoretiske overvejelser inden for konveksitetsteori, var den senere udvikling af dualitetsbegrebet i ikke-lineær programmering tilsyneladende motiveret af algoritmeudviklingen for kvadratisk

[15] Inden for den 3-årige tidsramme der er for et ph.d studium i Danmark, har det ikke været muligt at gå yderligere i detaljer med udviklingen af dualitetsteori for ikke-lineær programmering.

programmering. Dorns artikel kom som følge af en voksende interesse for kvadratisk programmering i sidste halvdel af 1950'erne, hvilket resulterede i, at der blev udviklet en række beregningsmetoder for kvadratiske programeringsproblemer. Hanson refererede ligesom Dorn til beregningsalgoritmer og fremhævede, at dualitetssætninger ud over at have teoretisk betydning også har en betragtelig betydning for iterative løsningsalgoritmer, idet det sker, at den optimale værdi af det primale program nærmer sig den fælles optimale værdi af det primale og duale problem fra den ene side, mens den optimal værdi af det duale program nærmer sig fra den anden side. Dermed får man på hvert trin en øvre hhv. nedre grænse for den optimale værdi.

Det kunne være interessant at undersøge, i hvilken grad disse dualitetsresultater for ikke-lineær programmering har været styret af udviklingen af beregningsalgoritmer, samt om de har været motiveret af konkrete problemer for eksempel inden for operationsanalyse.

# Kapitel 7

# Etablering af ikke-lineær programmering i sociologisk perspektiv

Fællesbetegnelsen for endeligdimensionale optimeringsproblemer med ulighedsbibetingelser er *matematisk programmering*, og etableringen af ikke-lineær programmering som matematisk disciplin hænger sammen med etableringen af feltet matematisk programmering. Det første skridt henimod indførelsen af disse emner på universiteterne var oprettelsen af Tuckers program finansieret af ONR. Et andet skridt, som var med til sikre disse emners forbliven og videreudvikling i universitetsverdenen, var etableringen af operationsanalyse som videnskabelig disciplin efter 2. verdenskrig.

I dette kapitel vil jeg kort introducere operationsanalysens historie for at give en baggrund for at forstå, hvad operationsanalyse er, og hvordan det er opstået. Derefter vil jeg analysere lineær og ikke-lineær programmerings rolle i operationsanalyse for at klarlægge den operationsanalytiske konteksts betydning for, at matematisk programmering, og dermed også ikke-lineær programmering, kunne opstå som matematisk disciplin. I sidste del af kapitlet beskrives etableringsprocessen ud fra fremkomsten af lærebøger og symposier i ikke-lineær programmering samt oprettelsen af *The Mathematical Programming Society.*

## Den operationsanalytiske kontekst

Operationsanalyse er en engelsk 'opfindelse'. Det startede i slutningen af 1930'erne i kølvandet på en voksende bekymring over Tysklands massive oprustning af især det tyske luftvåben. På dette tidspunkt havde briterne ikke noget effektivt luftforsvar, men fysikeren Robert Watson Watt luftede mulighederne for at opspore fjendtlige fly ved hjælp af radiobølger. Dermed startede udviklingen af radar, og i begyndelsen af 1936 etablerede briterne *Bawdsey Research Station*, som udgjorde hærens og luftvåbnets samlede forskningscenter for radarudvikling. (Se [Larnder, 1979, s.4-5], [Rosenhead, 1989, s. 7].)

I juli 1938 afholdt briterne den anden store luftforsvarsøvelse, som viste, at radar teknisk set var et effektivt redskab til luftforsvar, men som også afslørede et operationelt problem:

> *the Superintendent of Bawdsey Research Station, A. P. Rowe, announced that although the exercise had again demonstrated the technical feasibility of the radar system for detecting aircraft, its operational achievements fell far short of requirements. He, therefore, proposed that research into the operational - as opposed to the technical - aspects of the system should begin immediately.* [Larnder, 1979, s.8]

- og dermed blev en af de første operationsanalysegrupper dannet. Et af gruppens medlemmer, E. C. Williams, har givet følgende beskrivelse af baggrunden for gruppens dannelse, dens specielle arbejdsområde samt oprindelsen af selve navnet 'operationsanalyse':

> *Thirty years ago I was a Junior Scientific Officer, at the Bawdsey Research Station of the Air Ministry. This was the research establishment engaged in the development of what is now called radar. ... I was then assigned to join a team of Royal Air Force officers, ... to find out how best to use the radars in what we would now call the 'total system' for intercepting and destroying enemy aircraft. ... Now we had to have a name to describe us and what we were doing. The rest of the establishment was engaged on the normal work of research and development and design of radar equipments. We were beginning to find out how best to use them. The term 'operations' has a specific connotation in the Armed Services, and we were now beginning to be concerned with operations. So, one or other or both (and I cannot remember which) of Sir Robert Watson Watt and A. P. Rowe coined the term 'operational research section' to put on the organization chart over our names - simply to distinguish this new kind of work from the normal work of a research and development establishment.* [Williams, 1968, s.111-112]

Operationsanalysegruppernes opgave under krigen var at finde de optimale måder at udnytte de eksisterende militære styrker, våben og andet udstyr på. Det karakteristiske ved grupperne var dels deres sammensætning, idet de bestod af en blanding af forskellige naturvidenskabsfolk -fysikere, matematikere, kemikere, biologer, ingeniører- dels at de arbejdede meget tæt på de militære operationer. De analyserede operationerne, mens de stod på, og kom med forslag til forbedringer, ikke i form af nye våbentyper, men om hvordan det militære udstyr, der var til rådighed på et givet tidspunkt, kunne udnyttes mest effektivt. Netop denne tætte kontakt til de militære operationer var en af grundene til gruppernes store succes. Deres løsningsforslag på operationsproblemer var ofte af en sådan art, at de kunne indføres forholdsvis hurtigt, hvilket ofte førte til øjeblikkelige forbedringer.

I starten arbejdede operationsanalysegrupperne hovedsagelig med problemer relateret til brug af radarudstyr i anti-luftvåben og anti-ubåds krigsførelse, samt i bombetogter, men de udvidede efterhånden deres virke til også at omhandle strategi og logistik samt uddannelse og ledelse af civile forskere i militære institutioner [Fortun og Schweber, 1993, s.602], [Rau, ??, s.5][1]. I slutningen af krigen var flere hundrede videnskabsfolk involveret i operationsanalysearbejde i England.[2]

## Operationsanalyse kommer til USA

Operationsanalyse blev importeret til USA fra England og kom - med tiden - til at indgå i OSRD. Der har været en tendens til at tildele Bush og OSRD de centrale roller i udviklingen af operationsanalyse i USA[3], men nyere forskning har vist, at operationsanalyse blev indført i det amerikanske, civile forskningssamfund på trods af og ikke på grund af Bush, der gennem hele krigen forsøgte at holde operationsanalyse uden for OSRD [Rau,??, s.56]. Erik Rau's kommende artikel *The Adoption of Operations Research in the United States during World War II* kaster nyt lys over Bushs rolle i etableringen af operationsanalyse i USA under 2. verdenskrig og demonstrerer tydeligt Bushs aktive modstand mod operationsanalysens indtog i OSRD. Erik Raus fortolkning er, at den sociologiske organisering af operationsanalysen ikke passede ind i den måde, Bush omhyggeligt havde konstrueret OSRD på. Han mener, at konflikten bundede i '*incompatible strategies for organizing research and*

[1]Planlagt til at udkomme i bogen *Systems, Experts, and Computers* edited by Hughes, A. C. og Hughes, T. P., Publiceret i Dibner Series, edited by Buchwald, J. Z.

[2]For yderligere oplysninger om operationsanalyse i England under krigen se [Waddington, 1973], [Rosenhead, 1989]. For personlige erindringer se [Sawyer et al., 1989], [Christopherson et al., 1992].

[3]Se for eksempel [McArthur, 1990, s.7].

*development for the war effort*' [Rau, ??, s.2]. Bushs organisering af OSRD er beskrevet i kapitel 4, hvor det fremgår, at OSRD's 'kontraktpolitik' skulle sikre, at de mobiliserede videnskabsfolk *ikke* var under hærens kommando, men var under civil ledelse uafhængig af regeringen. Denne konstruktion fik i praksis den konsekvens, at der blev skabt en kløft mellem dem, der stod for udvikling af nye våbentyper og forsvarsudstyr, på den ene side og dem, der skulle benytte disse nye redskaber, på den anden side [Rau, ??, s.2]. I England opstod operationsanalyse netop for at danne bro mellem disse to poler, og optagelse af operationsanalyse i OSRD ville betyde en nedbrydelse af barrieren mellem udviklere og brugere.

De første amerikanske operationsanalysegrupper blev dannet i løbet af 1942, og ansøgninger fra militæret til OSRD om videnskabeligt personale til disse grupper begyndte at strømme ind. Det var Bushs holdning, at hæren selv måtte bemande sine operationsanalysegrupper, men da det ikke lykkedes at finde en organisation, hvorfra man kunne rekruttere og administrere et operationsanalyseprogram, og da militæret tydeligt meldte ud, at det var OSRD-folk, man var interesseret i, endte Sorteper igen hos Bush. Dertil kom, at Bush efterhånden også blev udsat for pres fra sine egne rækker, idet flere og flere OSRD-folk begyndte at kritisere hans modstand mod operationsanalyse. I foråret 1942 gav John T. Tate, som oprindelig var fysiker, men som under krigen tjente som chef for NDRC's afdeling for *Sub-Surface Warfare*, kaptajn Baker økonomisk støtte til at danne gruppen *Antisubmarine Warfare Operations Research Group* (ASWORG) under en kontrakt med *Columbia University* i New York[4]. Denne gruppe er en af de mest berømte operationsanalysegrupper under krigen. Den blev ledet af MIT-fysikeren Philip M. Morse, der også var den person, der fik størst indflydelse på etableringen af operationsanalyse som en ny videnskabelig disciplin i efterkrigstidens USA.

Warren Weaver fra *Applied Mathematics Panel* (AMP) var en anden af NDRC's chefer, som var uenig med Bush i operationsanalysespørgsmålet. Weaver blev tidligt i krigen overbevist om, at det videnskabelige udviklingsarbejde, der foregik under OSRD, ville kunne drage stor fordel af, at de involverede forskere fik større indsigt i og forståelse for det, der foregik ved fronten. På trods af Bushs modstand begyndte AMP tillige med andre NDRC-afdelinger at udvikle deres egne uddannelsesprogrammer i operationsanalyse. Matematikerne gik således via AMP aktivt ind i uddannelsen af operationsanalytikere, og i marts 1943 havde de udviklet deres eget uddannelsesprogram [Rau, ??, s.45]. Til sidst overgav Bush sig, og det blev besluttet at inddrage operationsanalyse i OSRD gennem oprettelsen af underafdelingen *Office of*

[4]For yderligere oplysninger om dannelsen af ASWORG se f.eks. [McCloskey, 1987], [Miser, 1986], [Morse, 1986].

*Field Service*, der blev dannet i oktober 1943.

AMP havde stor succes med at 'omskole' matematikere til operationsanalytikere. Mina Rees beskriver for eksempel, hvordan Brigadier General Robert W. Harper i januar 1944 henvendte sig til Bush og OSRD med et ønske om, at *Applied Mathematics Panel* skulle rekruttere og uddanne kompetente matematikere, som var i besiddelse af '*versatility, practicality, and personal adaptability requisite for successful service in the field*' [Rees, 1980, s.617]. Efter to måneders uddannelse blev disse nyuddannede operationsanalytikere udstationeret i forskellige operationsanalysegrupper ved fronten, hvor de på anmodning fra luftvåbnet studerede '*aerial flexible gunnery problems*'. Luftvåbnet var yderst tilfreds med de ti matematikere, som AMP uddannede i operationsanalyse, og meddelte OSRD, at behovet for den slags folk var steget så drastisk, at det ville være nødvendigt at uddanne yderligere otte matematikere. AMP havde på dette sene tidspunkt i krigen problemer med at rekruttere de yderligere otte matematikere, idet de fleste af landets matematikere allerede var opslugt af krigsarbejdet, men formåede dog at efterkomme General Harpers ønske.

Matematik spillede således en stor rolle i operationsanalyse under krigen. Halvdelen af Morses gruppe (ASWORG) var matematikere, *Applied Mathematics Panel* havde sit eget operationsanalyse uddannelsesprogram, og dertil kommer, at militæret tilsyneladende selv betragtede operationsanalyse som matematik. Barkley Rosser diskuterer i sin artikel om matematik og matematikere i 2. verdenskrig, hvorvidt operationsanalyse er matematik eller ej, og ender med at give følgende beskrivelse af militærets opfattelse:

> *The Air Force Generals and Navy Admirals thought it* [operationsanalyse] *was wonderful stuff. You could not have convinced one of them that it was not mathematics.* [Rosser, 1982, s.510]

## Operationsanalyse i efterkrigstiden

Efter krigen blev der ydet en aktiv indsats for at sikre, at operationsanalyse blev etableret som en selvstændig, videnskabelig disciplin. Mange af de videnskabsfolk, som havde været tilknyttet operationsanalysegrupper under krigen, forsøgte ihærdigt at 'sælge' operationsanalyseideen til fredstidsforhold. Charles Kittel f.eks. publicerede i 1947 i det meget udbredte tidsskrift *Science* artiklen *The Nature and Development of Operations Research*, hvori han definerede operationsanalyse således:

> *Operations Research is a scientific method for providing executive departments with a* quantitative basis for decisions. *Its object is,*

> *by the analysis of past operations, to find means of improving the execution of future operations.* [Kittel, 1947, s.150]

Han sluttede af med at udtrykke sit håb for fremtiden:

> *It is hoped that the publication of this paper will serve to stimulate the establishment of operations research groups in the United States for the advancement of peaceful objectives. This powerful new tool should find a place in government and industry.* [Kittel, 1947, s.153]

Hele etableringsprocessen blev accelereret betydeligt ved, at både *Office of Naval Research* (ONR) og *the National Research Council* (NRC) gik aktivt ind og finansierede operationsanalyseaktiviteter på universiteterne. Fred Rigby, der fungerede som chef for logistikprogrammet under ONR's matematikafdeling, husker det således:

> *We did indeed influence the introduction of operations research into business schools. The subdiscipline called management science is our invention, in quite a real sense. That is, we and our contract researchers recognized its potentials, planned its early growth, and, as it turned out, set the dominant pattern in which it has developed.* (Citeret i [Rees, 1977a, s.111])

I 1949 dannede NRC en komite under afdelingen for anvendt matematik med det formål at '*further its* [operationsanalyse] *development and applications outside the armed forces*' [Fortun og Schweber, 1993, s.611]. Komiteen oprettede Ph.D. stipendier, finansierede konferencer og udarbejdede retningslinier for *graduate* uddannelsesprogrammer.

I den akademiske verden var Morse en af nøglefigurerne. Han indførte operationsanalysekurser på MIT allerede fra 1948. De to første kurser, M371 og M372, blev afholdt af matematisk institut. Senere fulgte MIT's *School of Industrial Management* med og udbød kurser, der inkluderede diskussioner af operationsanalyseteknikker. Andre afdelinger som *Electrical and Mechanical Engineering* begyndte at afholde kurser '*which include various aspects of operations research, such as linear programming, ...*' [Morse, 1956, s.733]. Morse etablerede også MIT's sommerseminarer i operationsanalyse, 14 dages kurser for folk ansat i industrien og den offentlige sektor. Efter MIT fulgte Johns Hopkins universitetet med et program i operationsanalyse. De introducerede i 1952 *the Seminar in Operations Research*, og to år senere var programmet så udviklet, at der var mulighed for at tage *master's* grad såvel som Ph.D. grad i operationsanalyse [Roy, 1956, s.735]. *Case Institute of Technology* i Cleveland, Ohio fulgte efter med kurset *Short Course in Operations Research*, der blev afholdt årligt fra 1952.

Morse var også en central figur i dannelsen af det amerikanske operationsanalysesamfund, *Operations Research Society of America* (ORSA), som blev grundlagt i 1952, og han fungerede selv som ORSA's første præsident. ORSA oprettede tidskriftet *Operations Research*, som sammen med det engelske operationsanalysesamfunds tidsskrift *Operations Research Quarterly*, der startede i 1950, blev de primære aftagere af operationsanalyseartikler. I 1954 uddelte ORSA sin første pris *The Lanchester Prize*, som derefter blev uddelt årligt '*for a book or paper making a significant contribution to the advancement of the state of art of OR*' [Lindsey, 1979, s.19]. Midt i 50'erne havde operationsanalyse således etableret sig som en ny videnskabelig disciplin med *graduate* programmer, professionelt samfund, tidsskrifter og priser.

## Matematik og operationsanalyse

Anerkendelsen af operationsanalyse som en ny videnskabelig disciplin betød dog på ingen måde, at man var enige om, hvad operationsanalyse var. Feltet var meget bredt sammensat, og der foregik en løbende diskussion både i tidsskriftet *Operations Research* og ved ORSA's årlige møder. En af de tidligste efterkrigstidsdefinitioner er Charles Kittels, som er citeret ovenfor. Morse og Kimball citerer den næsten ordret i den første lærebog om operationsanalyse:

> *Operations research is a scientific method of providing executive departments with a quantitative basis for decisions regarding the operations under their control.* [Morse og Kimball, 1951, s.1]

I og for sig en udmærket definition, der dog ikke fortæller noget om selve indholdet af operationsanalyse. En udtømmende diskussion af definitionsdebatten ligger uden for rammerne af dette projekt, men i de to store tidsskrifter *Operations Research* og *Operational Research Quarterly* samt i kongresberetninger fra de internationale konferencer i operationsanalyse kan man følge debatten, som ikke blot går på definitionen af operationsanalyse, men også på hvorvidt operationsanalyse er en videnskab eller ej.

Morse forsøgte på et tidligt tidspunkt at stoppe debatten ved ganske simpelt at definere operationsanalyse som det, operationsanalytikere foretager sig:

> *We should no longer have trouble explaining the scope and methods of operations research to the layman. We already can say:*

> *operations research is the activity carried on by members of the Operational Research Society; its methods are those reported in our journal.* [Morse, 1953, s.159]

I starten blev der i operationsanalyse lagt meget vægt på matematik. Morse var selv en meget ihærdig fortaler på dette punkt. I 1953 fremhævede han i artiklen *Trends in Operations Research*, som blev publiceret i ORSA's tidsskrift, spilteori som et fremtidigt, vigtigt redskab, der burde udvikles yderligere. Om lineær programmering skrev han:

> *Linear programming is rapidly becoming an important theoretical tool in economics; it deserves equal or greater exploitation in operations research.* [Morse, 1953, s.169]

To år senere, i 1955, slog han fast, at: '*Just as with any other field of science, we are finding that we need our own kind of mathematics*' [Morse, 1955, s.383]. Han efterlyste især grundforskning i matematik relateret til operationsanalyseproblemer:

> *To obtain complete solutions of these more complicated waiting-line problems will require mathematical abilities of a high order. Such solutions will not be achieved in a few months, as casual byproducts of work on an immediate, practical problem. They probably will only be obtained by using a slower, more fundamental approach, by concentrating on the underlying mathematical relationships, by disregarding, for the time being, the urgencies and extraneous details of specific applications of the theory. This is the usual way that basic theoretical advances are made in science, after all.* [Morse, 1955, s.384]

Han anså især grundforskning i matematisk programmering som værende uhyre vigtig for operationsanalyse, hvilket fremgår af hans indtrængende appel til en voksende generation af operationsanalytikere:

> *But linear programming is only one part of a larger theory of optimal programming, which covers such subjects as dynamic programming, some aspects of search theory and, probably, of game theory. It is hard to visualize, right now, all the mathematical aspects of this broader subject, because they haven't been investigated as yet in any detail. ...*
>
> *It is not hard to foresee the considerable usefulness of this general theory in solving many operations problems, particularly those*

*concerned with planning. But a great deal of basic research will be needed before the theory will be able to answer our practical needs. Some of the fundamental mathematics has not yet been developed and a great number of the algorithms for solving specific problems have not yet been worked out. Much of this basic work can probably best be done as a long-term study, not subject to the short-term deadlines and crises which occur in the study of immediate, practical problems. It needs a good many man-years of concentrated work. Operations research needs this sort of research. No branch of science can continue to grow unless its underlying theory is continuously being expanded.* [Morse, 1955, s.383]

Morse betragtede således matematik som operationsanalysens teoretiske kerne, hvilket falder godt i tråd med hans holdning i 1948, hvor han gav udtryk for et ønske om, at matematikstuderende kunne '*be trained in this and related subjects, so that they may contribute to the peace-time applications of this new field* [operationsanalyse] *of applied mathematics ...*' [Morse, 1948, s.621].

Tager man Morses selvdefinerende definition af operationsanalyse alvorligt, danner der sig et billede, der viser, at operationsanalyse og matematisk programmering i starten var tæt beslægtede. En gennemgang af de første 20 årgange af *Operations Research* viser, at matematik og i særdeleshed lineær programmering spillede en stor rolle i operationsanalyse. Den første artikel i det allerførste nummer af tidsskriftet handler om matematik *New Mathematical Methods in Operations Research*, og samtlige årgange herefter har mindst en artikel om matematisk programmering (lineær programmering, kvadratisk programmering, dynamisk programmering, ikke-lineær programmering etc.). Lindsey klassificerede artiklerne publiceret i de første 15 årgange af tidsskriftet, det vil sige perioden 1952-1967. Af de i alt 1891 artikler faldt 10 procent ind under matematisk programmering og udgjorde dermed den største samlede underdisciplin[5]. Lindsey sammenlignede med *International Abstracts in Operations Researchs* klassificering af artikler publiceret i perioden 1968-1977, hvor 17 procent af artiklerne handlede om matematisk programmering, og 12 procent af disse faldt inden for ikke-lineær programmering. Lindsey konkluderer på basis af disse statistikker, at:

*One feature common to both of those periods is the large effort in programming. This was proportionately greater after 1967. When*

[5] 8% hører til under overskriften *Military*, 8% under *Queueing*, 8% under *Transportation*, 7% under *Statistics* og 59% under *Others* [Lindsey, 1979, s.18].

> *examined year by year it was found to peak (at 21%) in 1973, and has declined since then.* [Lindsey, 1979, s.18]

Den første internationale konference i operationsanalyse blev afholdt i Oxford i 1957. Kongresberetningerne fra de første konferencer (de afholdtes hvert 3. år) viser igen, hvor stor en rolle matematik og især matematisk programmering spillede i operationsanalyse. Ved den anden internationale konference var der f.eks. to sektioner om matematik, hvoraf den ene var helliget *New Methods in Mathematical Programming* [Banbury og Maitland, 1961]. I 1963 var der to sektioner i matematisk programmering [Dunod, 1963], og i 1966 var der en sektion i *Advances in techniques of mathematical programming* [Hertz og Melese, 1966].

ORSA indstiftede som nævnt Lanchesterprisen i 1954. En optælling viser, at af de 27 gange, prisen har været uddelt mellem 1954 og 1976, er prisen gået til matematisk programmering 5 gange [Lindsey, 1979, s.20]. Igen et tegn på at matematisk programmering spillede en vigtig rolle i operationsanalyse. Dette indtryk forstærkes yderligere, når man ser på, hvilken vægt operationsanalytikerne lagde på teoriudviklingen inden for matematisk programmering, når de evaluerede operationsanalysens udvikling. Lindsey skriver for eksempel:

> *A very important part of the post-war development of OR can be given the label of "applied optimization". This includes the many varieties of mathematical programming (linear, dynamic, nonlinear, integer, ...), ....* [Lindsey, 1979, s.20]

I *Operations Research*, vol. 19 fra 1971 kan man i Appendix I - *The Nature of Operations Research* læse, at: '*By the mid-1960's, there were large bodies of theory (such as linear and dynamic programming, ...)*' [OR, 1971, s.1139]. Det første valg af teori forbundet med operationsanalyse var således emner inden for matematisk programmering.

Endelig demonstrerer en gennemgang af de første lærerbøger i operationsanalyse med al ønskelig tydelighed den store rolle, lineær programmering og mere generelt matematisk programmering spillede i operationsanalyse. Churchman, Ackoff og Arnoff har i *Introduction to Operations Research* fra 1957 et kapitel om lineær programmering [Churchman et al., 1957]. Tilsvarende finder man hos Sasienis, Yaspans og Friedmans *Operations Research, methods and problems* et kapitel udelukkende om *Allocation*, hvilket stort set kun omhandler lineær programmering. Dertil kommer et kapitel om dynamisk programmering [Sasieni et al., 1959]. Hillier og Lieberman har hele to afdelinger, ialt 8 kapitler, under overskrifterne *Mathematical Programming* og *Advanced Topics in Mathematical Programming*, som også inkluderer et kapitel om ikke-lineær programmering [Hillier og Lieberman, 1967]. I 1974 udgav de en fornyet version med titlen *Operations Research*, hvori de bl.a. skrev:

> *The fundamental role of linear programming in operations research is accurately reflected by the fact that it is the focus of four chapters and is used in several others. However, a by assumption of linear programming is that all its functions (objective function and constraint functions) are linear. Although this assumption essentially holds for numerous practical problems, it frequently does not. ... it often is necessary to deal directly with nonlinear programming problems, so we now turn our attention to this important area.* [Hillier og Lieberman, 1974, s.722]

Det var nu ikke alle, der tillagde matematik så stor betydning som Morse, og ligefrem at kategorisere operationsanalyse som et nyt felt inden for anvendt matematik var nok at gå over stregen. Mange var utilfredse med den store vægt, der blev lagt på matematik. Allerede i 1953 advarede Norman Hitchman imod denne tendens:

> *One main caution seems to stand out glaringly. It concerns the emphasis which we place on certain specialized fields as to their value in the operations research team. It is not an uncommon observation of today to note the very great emphasis given to mathematical and physical sciences. Our new society, ORSA, for example, is playing a preeminent part in creating the impression that mathematics and physics are almost synonymous with operations research itself.* [Hitchman, 1953, s.242]

Hitchman var ikke alene om at mene, at visse medlemmer af ORSA tillagde matematik alt for stor betydning. I 1956 advarede W. N. Jessop imod '*the placing of emphasis on mathematical methods and on highly abstract treatments of general situations*' i ORSA's tidsskrift, idet det sandsynligvis ville afskrække de medlemmer, som var mere interesserede i anvendelser, fra at publicere deres undersøgelser [Rider, 1992, s.231]. Hvad angår lineær programmering mente Jessop også, at der var en misforstået favorisering af teoriudvikling: '*a subject* [lineær programmering] *so delightful to the pure mathematician that many papers appear to have had their origin in sheer exuberance unsullied by any thought of a factual situation*' [Rider, 1992, s.234].

Diskussionen om, hvad operationsanalyse egentlig er, er tilsyneladende fortsat helt op til i dag, hvor dets udøvere stadig har problemer med at definere feltet [Rau, ??, s.1]. En af årsagerne hertil er ifølge Rau, at: '*Its* (OR's) *emphasis on mathematical modeling and computer simulation often obscures OR's relatively straight forward object: to understand and improve the use of complex socio-technological systems.*' [Rau, ??, s.1].

## Operationsanalysens betydning for etableringen af matematisk programmering

I USA blev lineær programmering således lige fra starten af betragtet som et vigtigt redskab i operationsanalyse, og det med en sådan begejstring, at det i lighed med ord som *optimeringsteori* og *matematisk programmering* for nogle nærmest blev et synonym for operationsanalyse. Dertil kom, at det projekt, som Tucker og Kuhn arbejdede på under ONR, var placeret under logistikprogrammet, ledet af Fred Rigby, der, via finansiering af forskning, var aktiv i udbredelsen af operationsanalyse. Det førte med sig, at logistikprogrammets tidsskrift *Naval Research Logistics Quaterly* blev et af de førende tidsskrifter for operationsanalyse, samtidig med at det fungerede som tidsskrift for logistikprogrammets forskning, hvilket uden tvivl har bidraget til at forstærke den betydning, matematisk programmering har spillet i operationsanalyse.

Operationsanalyse var således et nyt forskningsfelt, som opstod lige efter krigen. Der var penge til at finansiere forskning i operationsanalyse, der blev skabt *undergraduate* såvel som *graduate* programmer i operationsanalyse på universiteterne, og matematisk programmering blev modtaget med kyshånd i denne nye disciplin. Kuhns og Tuckers arbejde faldt således på et tidspunkt og i en kontekst, hvor der stod en aftagergruppe parat. De ledende folk, som for eksempel Morse, inden for etableringen af operationsanalyse som videnskabelig disciplin sørgede for, at matematisk programmering fik status som en vigtig teoribygning for operationsanalyse. Operationanalyse stod således parat til at 'huse' matematisk programmering, og dertil kom at de toneangivende personer inden for operationsanalyse fandt det meget vigtigt, at der blev forsket yderligere i matematisk programmering. Megen forskning inden for matematisk programmering fandt sted i en operationanalytisk kontekst, og man må derfor sige, at operationsanalyse spillede en stor rolle i udbredelsen af matematisk programmering og dermed også fik stor betydning for etableringen af ikke-lineær programmering som nyt forskningsfelt.

# Den endelige etablering af ikke-lineær programmering

I løbet af 1960'erne begyndte de første monografier om ikke-lineær programmering at udkomme[6]. En af de tidlige er *Nonlinear Programming*, som består af forelæsninger givet ved *the NATO Summer School on Nonlinear Programmering*, der blev afholdt i Frankrig i 1964 [Abadie, 1967]. Fra at indgå som kapitler i bøger om operationsanalyse udviklede ikke-lineær programmering sig således til et felt med egne monografier og lærebøger[7]. I 1970'erne begyndte man ligeledes at afholde tilbagevendende symposier i ikke-lineær programmering. De første fire *Symposium on Nonlinear Programming* blev alle afholdt i Madison, Wisconsin og fandt sted i hhv. 1970, 1974, 1977 og 1980.[8]

I 1964 blev det femte internationale symposium i matematisk programmering afholdt i London. Det var første gang uden for USA, og derefter blev de afholdt hvert tredje år skiftevis i Nordamerika og Europa. På det tidspunkt var der således dannet et 'samfund' af matematisk programmeringsfolk. Ideen om at starte et tidsskrift for matematisk programmering havde været diskuteret med jævne mellemrum siden 1959. I 1970 blev ideen ført ud i livet, samtidig med at der blev nedsat en komité med Tucker som formand til stiftelse af et selskab for matematisk programmering. Den direkte årsag var en undersøgelse af 16 store tidsskrifter som publicerede artikler inden for matematisk programmering. Antallet af artikler fra 1969, der faldt ind under matematisk programmering, blev talt op. Resultatet var 2410 publicerede sider fordelt på 211 artikler, nok til at bære et tidsskrift [Balinski og Wolfe, 1971]. Første nummer af det nye tidskrift *Mathematical Programming* udkom i oktober 1971. To år senere blev *the Mathematical Programming Society* oprettet med Dantzig som formand og Richard Cottle som udøvende formand. I løbet af de næste 20 år voksede det til ca. 700 medlemmer og ud over tidsskriftet uddeles der også adskillige priser *the Fulkerson Prize*, *the Dantzig Prize*, *the Beale/Orchard-Hays Prize* og *the A. W. Tucker Prize* [Balinski, 1991, s.9-10].

I løbet af 1970'erne etablerede matematisk programmering sig således med et professionelt *society*, medlemmer, et tidsskrift og priser. Dertil kom et stigende antal monografier og lærebøger om de forskellige aspekter af matematisk programmering. Ikke-lineær programmering er en underdisciplin af

[6]For eksempel [Abadie, 1967], [Fiacco et al., 1968], [Zangwill, 1969].

[7]Se for eksempel [Luenberger, 1973], [Hestenes, 1975], [Simmons, 1975], [Sposito, 1975], [Avriel, 1976], [Bazaraa et al., 1979], [McCormick, 1983], [Peressini et al., 1988], [Jahn, 1994].

[8]Der er udgivet kongresberetninger fra disse møder [Rosen et al., 1970], [Mangasarian et al., 1975, 1978, 1981].

matematisk programmering, og blev således også veletableret som selvstændigt forskningsområde i løbet af 1970'erne.

# Kapitel 8

# Konklusion og sammenfatning

Et af formålene med dette arbejde var at undersøge, dels hvor dualitetssætningen i lineær programmering kom fra, dels at afklare hvilken betydning den havde for Kuhns og Tuckers udvikling af ikke-lineær programmering.

Den første indsigt i dualitetsresultatet i lineær programmering kom ud af mødet mellem Dantzig og von Neumann i efteråret 1947. Baggrunden herfor var dels Dantzigs arbejde med et logistisk problem i det amerikanske luftvåben under og efter 2. verdenskrig, dels von Neumanns udvikling af minimaxsætningen for to-personers nulsum spil.

Dantzig blev som følge af den naturvidenskabelige mobilisering i USA under 2. verdenskrig involveret i arbejdet med planlægning af store 'programmer' eller handlingsplaner for luftvåbnet. Efter krigen var der stor optimisme og tiltro til, at et fortsat samarbejde mellem naturvidenskabsforskere og militæret var en nødvendighed, hvis USA skulle bevare sin position som militær supermagt. Det betød, at militæret udover selv at ansætte naturvidenskabsforskere blev den største, offentlige finansieringskilde af naturvidenskabelig forskning efter krigen. I denne sammenhæng blev Dantzig genansat i luftvåbnet i 1946 med det formål at effektivisere udarbejdelsen af luftvåbnets 'programmer'. I 1947 havde han udviklet en matematisk model til beskrivelse af disse 'programmer'. Modellen bestod af en lineær funktion, der skulle optimeres, og hvor de indgående variable var underlagt bibetingelser i form af lineære uligheder. Modellens udformning hang sammen med fremkomsten af computeren, som gjorde det muligt at løse problemet. Dantzigs model var oprindelig formuleret inden for økonomi, og økonomen Leontiefs 'input-output model' for amerikansk økonomi var den største inspirationskilde.

Mødet mellem Dantzig og von Neumann kom i stand, fordi von Neumann beklædte adskillige rådgivnings- og konsulentposter i militæret såvel under som efter krigen, og Dantzig søgte konsulentbistand hos von Neumann angående udviklingen af løsningsprocedurer til lineær programmeringsmodellen. Gennem sit arbejde med minimaxsætningen for to-personers nulsum spil, der tog sin begyndelse i sidste halvdel af 1920'erne, var von Neumann i en position, der gjorde ham i stand til at se sammenhængen mellem lineær programmering og spilteori. Von Neumanns indsigt i minimaxsætningen for to-personers nulsum spil modnedes over en periode på ca. 15 år fra hans første bevis, publiceret i 1928, til beviset i 1944 i det spilteoretiske værk, han udarbejdede sammen med den østrigske økonom Oskar Morgenstern. I løbet af den proces erkendte von Neumann, at minimaxsætningen hænger sammen med løsning af ulighedssystemer og fixpunktssætninger, at den optræder i økonomisk teori for endelig, i 1944, at være en simpel konsekvens af hyperplanssætninger i konveksitetsteori. Dette komplekse samspil, mellem de forskellige, faglige kontekster, minimaxsætningen udviklede sig i og dukkede op i, dannede så at sige en perfekt baggrund for Dantzigs lineære programmeringsproblem. En af mine hovedkonklusioner er, at denne sammenkobling mellem lineær programmering og spilteori fik afgørende betydning for den videre udvikling af lineær programmering samt udvidelsen til ikke-lineær programmering. Det forårsagede nemlig at lineær programmering blev udvidet fra at være noget, der handlede om et konkret, praktisk problem i luftvåbnet (*planning methods*) til også at handle om ren matematik. Lineær programmering blev dermed et potentielt matematisk forskningsfelt med et matematisk grundlag i konveksitetsteori.

Dantzigs placering i luftvåbnet gjorde, at også flåden blev opmærksom på lineær programmering og de muligheder, der kunne ligge her til løsning af logistiske problemer. En oplagt måde at udforske disse muligheder på var gennem et ONR-projekt.

Hele dette komplekse samspil, der på den ene side involverede kommunikation mellem matematikere arbejdende med et konkret, praktisk problem og matematikere arbejdende med matematisk teoriudvikling, og på den anden side involverede kontakt mellem to forskellige samfundsinstitutioner: militæret og den akademiske verden, gav sig udslag i dels ovenstående faglige indsigt i lineær programmerings underliggende, matematiske struktur dels oprettelsen af et forskningsprojekt i lineær programmering finansieret af ONR.

Resultatet af dette var oprettelsen af en særlig afdeling for logistik under ONR's matematikafdeling. Det første projekt drejede sig om at udforske sammenhængen mellem lineær programmering og spilteori samt forske i den underliggende, matematiske struktur. Hele ideen bag ONR's forskningspolitik var at placere forskningen i universitetsmiljøet. Tucker blev, nærmest ved en tilfældighed, opfordret til at lede dette projekt. Sammen med Kuhn og Gale klarlagde han forbindelsen mellem lineær programmering og spilteori, og ud af dette kom blandt andet dualitetssætningen for lineær programmering. Den matematisk teoretiske kerne omkring lineær programmering, der kom med forbindelsen til minimaxsætningen, åbnede feltet for traditionel, matematisk forskning. Med dualitetsresultatet kom der en matematisk teori for lineær programmering, som dermed udviklede sig til et nyt matematisk forskningsfelt.

2. verdenskrig havde tydeligt demonstreret naturvidenskabsforskernes kvalifikationer i arbejde relateret til nye våbenudviklinger, forsvarsteknikker og optimal udnyttelse af eksisterende udstyr. Dertil kom en erkendelse af, at en af de stærke sider ved at inddrage akademiske videnskabsfolk i krigsarbejdet var, at der var større sandsynlighed for, at der ikke kun blev løst problemer, men også udviklet ny og vigtig teori. Rees omtaler i et interview en sådan ordveksling med Richard Courant:

> *Courant always told me he couldn't just do problems; he had to develop theory.* [Albers og Alexanderson, 1985, s.264]

En anden af mine hovedkonklusioner er, at det præcis var det, der skete med ikke-lineær programmering. Da Tucker, Kuhn og Gale havde afsluttet deres første arbejde, blev Tucker og Kuhn hængende i projektet. Dualitetssætningen og hele sammenhængen med lineær ulighedsteori fangede deres interesse og pirrede deres nysgerrighed. Tro mod den måde der typisk arbejdes på i universitetsverdenen, gik de i gang med at udforske disse sammenhænge yderligere, stillede spørgsmål om mulighederne for udvidelse; hvad sker der f.eks., hvis man dropper linearitetsbetingelserne? Som vi har set, var det dualitetsresultatet for lineær programmering, der var den direkte anledning til at udvide teorien til det ikke-lineære tilfælde. Dualitetsresultatet åbnede feltet for traditionel, matematisk forskning, og det var i den kontekst, ikke-lineær programmering opstod som en helt naturlig udvidelse af lineær programmering.

På baggrund heraf mener jeg at kunne konkludere, at det således var ren matematisk forskning, der motiverede indførelsen af ikke-lineær programmering. Ikke-lineær programmering opstod således ikke, imodsætning til lineær programmering, som et bud på en løsning af et praktisk, militært problem, men udviklede sig i overenstemmelse med en slags indre inerti i matematisk forskning. Ikke-lineær programmering opstod som en helt almindelig generalisering af lineær programmering, en meget karakterisktisk arbejdsmetode for universitetsmatematikere.

Hermed er den første af afhandlingens fire problemstillinger: Hvad er den matematikhistoriske baggrund for dualitetssætningen i lineær programmering, og hvilken betydning havde den for udviklingen af ikke-lineær programmering? besvaret.

Ikke-lineær programmering er opstået i direkte forlængelse af og i tilknytning til lineær programmering, og alligevel bunder deres oprindelse i to vidt forskellige kontekster. Lineær programmering kom ud af et konkret, praktisk problem, mens ikke-lineær programmering kom ud af et abstrakt, internt, matematisk problem fuldstændig befriet for praktisk problemløsning. ONR's logistikprojekt fungerede som forbindelsesled mellem disse to kontekster. Dette fører frem til en konklusion om, at ONR's logistikprojekt, som Tucker blev leder af, sammen med udviklingen af dualitetssætningen i lineær programmering var en afgørende faktor for Kuhns og Tuckers udvikling af ikke-lineær programmering, idet det var ONR projektet, der forbandt de to verdener med hinanden og 'flyttede' lineær programmering over i universitetsverdenen.[1]

Den første dualitetssætning for ikke-lineær programmering blev formuleret og bevist af Werner Fenchel i 1951. Fenchels dualitetssætning opstod som en anvendelse af begrebet *konjugerede*, konvekse funktioner[2]. Dette begreb havde rod i konveksitetsteorien, men forbindelsen til Tucker og dennes logistikprojekt under ONR gjorde Fenchel opmærksom på, at begrebet kunne anvendes på ikke-lineær programmering. Her ses således endnu et eksempel på, hvordan kontakt mellem forskere, der arbejder i forskellige, men i dette tilfælde dog beslægtede, emner, kan drive matematikkens udvikling[3]. Her skinner militærets betydning igennem pány, idet de gennem finansieringen af Tuckers projekt skabte de økonomiske rammer for, at sådanne kontakter mellem forskere kunne etableres. Fenchel fortsatte ikke sit arbejde med dualitetsteori for ikke-lineær programmering. Først i slutningen af 1950'erne begyndelsen af 1960'erne kom der for alvor gang i dualitetsteorien. Denne udvikling var dog holdt inden for problemfeltet selv og foregik således i en kontekst af matematisk programmering.

Ikke-lineær programmering blev meget hurtigt kendt og opfattet som et nyt forskningsområde. Allerede få år efter publiceringen af Tuckers og Kuhns artikel *Nonlinear Programming* blev deres hovedresultat omtalt som *the famous Kuhn-Tucker conditions* [Kuhn, interview]. I løbet af 1960'erne begyndte de første lærebøger i ikke-lineær programmering at dukke op, i 1964 afholdtes den første *summer school* i ikke-lineær programmering, og i 1970 startede en række af symposier i ikke-lineær programmering[4]. Op gennem 1960'erne

[1]Min konklusion om, at ikke-lineær programmering opstod uden et konkret problemløsningsproblem, indebærer ikke, at teorien ikke har nogen anvendelsesmuligheder. Det var blot ikke det, der var drivkraften bag ikke ikke-lineær programmerings fremkomst. En undersøgelse af brugen af ikke-lineær programmering til praktiske formål og en eventuel vekselvirkning mellem dette og teoriudviklingen hører med til en fuldstændig undersøgelse af ikke-lineær programmerings historie, men ligger uden for dette projekts tidsramme.

[2]Se kapitel 6.

[3]Det andet eksempel, der har været diskuteret i afhandlingen, er Dantzigs møde med von Neumann (se kapitel 5).

[4]Se kapitel 7, hvor disse oplysninger er dokumenteret.

udkrystalliserede ikke-lineær programmering sig således efterhånden som et selvstændigt, matematisk forskningsområde. Den endelige etablering fandt sted i 1973 med oprettelsen af *the Mathematical Programming Society*. Dermed distancerede matematisk programmering sig fra operationsanalyse og definerede sig selv som selvstændig, videnskabelig disciplin med eget samfund og tidsskrift samt veletablerede og veldefinerede underdiscipliner som ikke-lineær programmering.

En af de omstændigheder, der lå til grund for, at denne udvikling kunne finde sted, var fremkomsten af computeren. Det gav mulighed for at disse problemer rent faktisk kunne løses, hvilket fra et anvendelsessynspunkt gjorde det interessant at udforske teorien bag i første omgang lineær programmering. Dertil kom oprettelsen af det logistikprojekt, defineret og finansieret af ONR, som Tucker blev leder af. Det førte problemstillingerne ind i den matematiske forskningsverden på universiteterne, og den fortsatte finansiering fra ONR's side var med til at styrke og udvide forskningsaktiviteterne gennem afholdelse af sommermøder og workshops og muligheder for at invitere gæsteforskere. Sammenhængen med spilteori havde udover den rent internt, faglige betydning også en mere ekstern, sociologisk betydning, idet spilteori blev dyrket i stor stil inden for militærfinanseret forskning. I RAND var der således en hel gruppe af matematikere ansat til at forske i spilteori [Leonard, 1992], [Mirowski, 1991], [Hourshell, 1997].

Analyserne og diskussionerne i kapitel 7 fører frem til den konklusion, at operationsanalysens opståen som videnskabelig disciplin på universiteterne i USA i efterkrigstiden var en anden væsentlig faktor i etableringsprocessen af matematisk (og dermed ikke-lineær) programmering. Lineær programmering blev stort set med det samme betragtet som en af de vigtigste ingredienser i operationsanalysens faglige indhold. Efterhånden kom de øvrige matematiske programmeringsdiscipliner med. Det banede vejen for områdernes indtrængen som kursusdiscipliner på universiteterne og kom dermed til at fungere som en afgørende faktor i udbredelsen af matematisk programmering i almindelighed og ikke-lineær programmering i særdeleshed.

Dermed er den del af problemstilling 2, der går på spørgsmålet om, hvorfor Kuhns og Tuckers resultat gav anledning til et nyt forskningsområde, samt hvilke specielle omstændigheder der var til stede i Kuhns og Tuckers tilfælde, blevet behandlet.

Tredje problemstilling: Hvilken rolle spillede militæret, og hvilken indflydelse havde det på fremkomsten af ikke-lineær programmering som matematisk forskningsområde? er allerede blevet berørt flere gange i det forrige. Konklusionen er, at militærets betydning gennemsyrer hele udviklingsforløbet fra 2. verdenskrig af. ONR var i den forbindelse nok den vigtigste, enkeltstående faktor. Ikke blot blev logistikprojektet, inden for hvilket ikke-lineær programmering blev udviklet, oprettet på initiativ af ONR og finansieret af ONR, men ONR spillede også en meget aktiv rolle i etableringen af operationsanalyse som videnskabelig disciplin på universiteterne efter 2. verdenskrig. Mina Rees omtaler ONR's logistikprogram som en stor succes, og hun skelnede, som det fremgår af nedenstående citat, ikke mellem dette og operationsanalyse:

> *The "decision mathematics" fostered by our program* [logistikprogrammet] *strongly affected developments in agricultural economics as well as military command decision systems. Along with the Rand Corporation, we had a major influence on the introduction of operations research and its subdiscipline, management science, into business schools. Operations research also found roots in many universities in new departments and in existing departments of computer science and industrial engineering. The content of operations research taught in these disciplines reflects research areas supported by ONR. ... Game theory ... as well as the mathematical theory of optimization ...* [Rees, 1977b, s.26].

Fred Rigby, som var leder af ONR's logistikgren, understregede i et brev til Rees ligeledes den aktive indflydelse ONR's finansiering havde på udbredelsen af operationsanalyse:

> *We did indeed influence the introduction of operations research into business schools. The subdiscipline called management science is our invention, in quite a real sense. That is, we and our contract researchers recognized its potential, planned its early growth, and, as it turned out, set the dominant pattern in which it has developed. ... On the other hand, this is not just an interpretation after the fact. I recall conversations in my office that were quite specifically concerned with recognizing and fostering the new science. (It might have been better for management science have it not been so heavily dominated by mathematics, but I'm not at all sure that could have been prevented.)....Thus far I've been writing about the optimization theory aspect of the ONR Logistics Program, and I may as well wrap that up by noting two opposite trends affecting mathematics in univeristies. One is for the mathematical aspects of optimization to find homes in the application disciplines and to be neglected, or at least little respected, in mathematics departments. The other and more recent is for mathematics departments to establish and operate subprograms specifically designed to service the needs of students in the behavioral science areas. Never mind the social and cultural whys and*

> *wherefores of these trends. Neither would have been what it was and/or is without the subject matter results of logistics research.* (Brev fra Rigby til Rees, citeret i [Rees, 1977a, s.111-112])

Citaterne viser, at de ansvarlige inden for ONR ikke var i tvivl om, at den militære kontekst spillede en afgørende rolle i udviklingen og udbredelsen af ikke-lineær programmering.

Kuhns egen vurdering af militærets indflydelse på ikke-lineær programmering er, at der stort set ingen indflydelse var. Militæret stillede ingen krav til løsning af konkrete problemer, det udførte arbejde var ikke hemmeligstemplet, men blev offentliggjort i tidsskrifter og monografier. Støtten fra ONR gik hovedsagelig til at betale løn i sommermånederne, holde konferencer, invitere gæster og betale rejseudgifter. Kuhn opfattede støtten som blot en forbedring af de generelle arbejdsvilkår på universitetet [Kuhn, interview; Kuhn, e-mail]. I det daglige arbejde gjorde det således ikke den store forskel, hvor pengene kom fra. Lokalt set følte Kuhn, at militæret ingen indflydelse havde på hans og Tuckers arbejde med udviklingen af ikke-lineær programmering. De følte, at de havde temmelig frie tøjler, der var ingen specifikke krav fra ONR, de kunne frit udforske de aspekter, som de fandt interessante inden for både rene og anvendte aspekter af matematisk programmering. Det tyder på, at Mina Rees' opgave som leder af ONR's matematikafdeling -at designe et militært finansieret forskningsprogram der var 'spiseligt' for matematikere ansat på landets universiteter- i høj grad lykkedes.

Tilsammen behandler de ovenstående problemstillinger og analyser, problemstilling 4: Hvad var drivkræfterne bag ikke-lineær programmerings fremkomst og etablering som matematisk forskningsområde?

En undersøgelse af algoritmeudviklingen i ikke-lineær programmering i samspil med de praktiske anvendelser af teorien vil nuancere historien yderligere, men ligger uden for dette projekts grænser.

Ikke-lineær programmering er et eksempel på en matematisk udvikling, der er styret af såvel internt faglige problemstillinger og interesser som eksterne kræfter uden for matematikken. Det er udviklet i et spændingsfelt mellem ren og anvendt matematik og i et samspil mellem konkret, praktisk problemløsning og akademisk, matematisk forskning. Det kunne være interessant at udforske dette spændingsfelt yderligere.

## Vurdering af konklusionernes gyldighed og rækkevidde

De konklusioner, jeg har draget på baggrund af det materiale og de analyser, som er fremlagt og diskuteret i første del af afhandlingen, kan grupperes i to kategorier.

Den første kategori omfatter de historisk ubestridelige kendsgerninger, som f.eks. at Tucker blev leder af et logistikprojekt finansieret og oprettet af ONR, at Tuckers og Kuhns arbejde med ikke-lineær programmering blev udført med finansiel støtte fra ONR, at Fenchel udviklede sin dualitetssætning for ikke-lineær programmering under et forskningsophold på Princeton, hvor Fenchel var i kontakt med Tucker og hans logistikprojekt, at ONR placerede logistikprojektet i universitetsmiljøet. Disse konklusioner bygger ikke på analyser, men på dokumenterede, historiske kendsgerninger, og står dermed til troende.

Den anden kategori omfatter de konklusioner, der er udledt på baggrund af mine analyser -matematikhistoriske og sociologiske. Min konklusion om, at sammenkoblingen mellem lineær programmering og spilteori ændrede lineær programmerings videnskabelige status fra at være en matematisk model for et konkret, praktisk problem til at være en matematisk teori, er en konklusion tilhørende denne kategori. Konklusionen om, at det var ren matematisk forskning, der motiverede Kuhns og Tuckers indførelse af ikke-lineær programmering, er ligeledes en konklusion, som jeg har analyseret mig frem til. Det samme er tilfældet med militærets betydning for etableringen -i sociologisk forstand- af ikke-lineær programmering, som videnskabelig disciplin. Fælles for disse konklusioner er dog, at de er baseret på analyser af historiske fakta, som eksistens af lærebøger, afholdelse af sommerskoler etc. eller konklusioner, som jeg belyser fra flere forskellige vinkler og fra flere forskellige kilder. For eksempel begrundes lineær programmerings statusskift i analyserne af Kuhns og Tuckers matematiske artikler om dualitetssætningen i lineær programmering og deres artikel om ikke-lineær programmering. Men det begrundes også ud fra udtalelser fra både Kuhn og Dantzig om, at det var dualitetssætningen i lineær programmering, der vakte deres interesse rent matematisk. Jo flere kilder der belyser konklusionen, jo stærkere står den.

Min konklusion om, at ONR's oprettelse af logistikprojektet fik afgørende betydning for Kuhns og Tuckers udvikling af ikke-lineær programering, har jeg således begrundet i, at opfordringen til Tucker om at påbegynde matematisk forskning i lineær programmering og spilteori kom fra ONR's side. Den er også begrundet i udtalelser om, at Kuhn påbegyndte arbejdet med lineær programmering, fordi han behøvede et job, og dette projekt var da via ONR's finansiering en mulighed. Den er tillige begrundet i, at Kuhn egentlig var på vej i en anden forskningsretning, idet hans Ph.D. afhandling, som han arbejdede på i starten af ONR-projektfasen, hører til inden for gruppeteori, og det virker usandsynligt, at han i den fase skulle have kastet sig over lineær programmering og spilteori, havde det ikke været for ONR's støtte. Konklusioner af denne art hviler på spekulationer, men jo flere forskellige vinkler, man kan analysere problemstillingen ud fra og begrunde sin konklusion i, jo stærkere står konklusionen. Jeg har bestræbt mig på at analysere og belyse problemstillingerne ud fra både personlige udtalelser, historisk ubestridelige kendsgerninger, sociologiske analyser og matematisk kildelæsning.

Man kan også spørge om konklusionernes generaliserbarhed. Her er det min opfattelse, at selv om nogle af dem kan friste til at drage konklusioner angående generelle teorier for matematikkens udvikling, kan de kun udtale sig om ikke-lineær programmerings historiske forløb. Man kunne måske fristes til at konkludere, at oprettelse og finansiering af universitetsbaserede projekter udløst af konkrete, praktiske problemer vil kunne drive matematikkens udvikling, men min undersøgelse kan kun sige noget om dette for ikke-lineær programmerings vedkommende. Et andet punkt er den militære indflydelse, hvor vidtrækkende var den? Her må det fremhæves, at jeg kun har beskæftiget mig med den indflydelse, der følger af, at man giver finansiel støtte og dermed fremmer aktiviteten på området. Min undersøgelse kan ikke bruges til at udtale sig om, hvorvidt militærets indflydelse strakte sig ind i selve den faglige udvikling af teorien.[5]

[5]Jeg er i øvrigt kun stødt på ét eksempel i sekundærlitteraturen, hvor forfatteren mente at kunne påvise, at den militære indflydelse gik helt ind i selve den faglige udvikling af matematikken. Det er Mirowski, der i sin artikel over undersøgelser i spilteori skriver: '*the connections between the military and game theory were numerous and pervasive in the first two decades of its existence, extending into the very mathematics itself.*' [Mirowski, 1991, s.227].

# Del II

# Kuhn-Tuckers sætning: en multipel opdagelse?

# Kapitel 9

# Karushs sætning -et resultat i variationsregning

I 1939 blev William Karush *Master of Science* fra matematisk institut på universitetet i Chicago på en afhandling med titlen *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Conditions* [Karush, 1939][1]. Heri viste Karush en sætning, svarende til Kuhns og Tuckers resultat, om nødvendige betingelser for eksistensen af et minimum for en funktion af flere variable underlagt bibetingelser i form af uligheder. Kuhns og Tuckers artikel gav anledning til et nyt forskningsområde, det gjorde Karushs afhandling ikke, den blev end ikke publiceret[2].

Karushs afhandling har rod i variationsregningsskolen i Chicago, mere præcist i en artikel skrevet af Gilbert Ames Bliss. For at indplacere Karushs arbejde matematikhistorisk og forstå hvilken kontekst, det skal tolkes ud fra, vil jeg i det følgende behandle 'Chicagoskolen' og Bliss' arbejde. Derudover vil Karushs afhandling blive gennemgået, og i den forbindelse vil det blive diskuteret, hvilken motivation der lå til grund for valget af det problem, han behandlede i sin afhandling. Den omstændighed at Karushs afhandling ikke blev publiceret vil ligeledes blive diskuteret. For at afrunde historien kommer til sidst en præsentation af Karush som person.

[1] I sit historiske essay om ikke-lineær programmerings historie gør Kuhn opmærksom på at han faldt over en henvisning til Karushs arbejde i [Takayama, 1974]. Hvor Takayama kendte Karushs arbejde fra, ved jeg ikke.

[2] Jeg takker hermed W. Karush for at have stillet et eksemplar af sin afhandling til min rådighed.

# Variationsregning på universitetet i Chicago

Variationsregning går ud på at maksimere eller minimere et integral over en klasse af funktioner. Den simpleste og vigtigste type af problemer i variationsregning er følgende [Brechtken-Manderscheid, 1991, s.7]:

> Bestem den funktion $y(x)$, der minimerer (eller maksimerer) integralet
>
> $$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

Problemet kan så modificeres ved at forlange, at klassen bestående af potentielle min-max-funktioner, $y(x)$, også opfylder visse bibetingelser.

Varationsregningens tidlige historie er knyttet til navne som Bernoulli, Euler og Lagrange og hører tidsmæssigt hjemme i slutningen af 1600-tallet og i 1700-tallet [Kline, 1972], [Fraser, 1992]. Efter Lagranges arbejde var det først med Karl Weierstrass' (1815-1897) forelæsninger i variationsregning fra 1872 af, at der blev skabt fornyet interesse for emnet, og begreber og argumenter blev trukket skarpere og mere præcist op [Kline, 1972, s.747].

Efter Weierstrass var Adolf Mayer en af de prominente skikkelser inden for variationsregning. I 1878 og 1895 kom to artikler, hvori han diskuterede, hvad der nu kaldes for *Mayers problem*, og hvad Mayer selv anså for at være det mest generelle variationsregningsproblem [Goldstine, 1980, s.300]. Hilbert var også en central figur i variationsregningen, som på så mange andre områder. Ved den Internationale Matematiker Kongres i år 1900 sagde han bl.a.:

> *Dennoch möchte ich mit einem allgemeinen Probleme schliesen, nämlich mit dem Hinwiese auf eine Disziplin, die bereits mehrmals in meinem Vortrage Erwähnung fand -eine Disziplin, die trotz der erheblichen Förderung, die sie in neuerer zeit durch Weierstrass erfahren hat, dennoch nicht die allgemeine Schätzung geniest, die ihr meiner Ansicht nach zukommt - ich meine die Variationsrechnung.* [Hilbert, 1900, s.323-324]

I begyndelsen af 1900-tallet var variationsregning primært knyttet til navne som Bolza, Bliss, Mayer, Hahn og Kneser, og det meste af forskningen foregik i Chicago. Der tales endda om 'Chicagoskolen' i variationsregning.

## 'Chicagoskolen'

*University of Chicago* blev grundlagt i 1892, og lige fra starten blev der satset på et matematisk institut. Eliakim H. Moore (1862-1932) blev den første leder af matematisk institut, og sammen med Oskar Bolza (1857-1936) og Heinrich Maschke (1853-1908), begge fra Tyskland, skabte han et institut, som hurtigt blev det ledende matematiske institut i USA. Chicago formåede at holde denne position frem til 1910, hvorefter det tilsyneladende gik ned ad bakke. En af årsagerne til nedturen var, ifølge flere Chicago-folk, en alt for ensidig satsning på variationsregning [Mac Lane, 1989], [Browder, 1989], [Duren, 1976].

Det var Bolza, der gjorde variationsregning til et af de dominerende forskningsfelter i Chicago. Hans egen interesse for variationsregning stammede fra Weierstrass' berømte forelæsningsrække i 1879. I Chicago underviste Bolza *graduate* studerende i variationsregning, men det var først i 1901, han selv begyndte at forske i emnet. Ifølge Parshall og Rowe kom dette skift i Bolzas forskning i forbindelse med organiseringen af det tredje AMS symposium[3], hvor Bolza var en af hovedtalerne [Parshall og Rowe, 1994, s.394]. Formålet med disse symposier var at give brede fremstillinger af udvalgte, matematiske emner for et blandet, matematisk publikum for derigennem at udstikke nye forskningsretninger.

Bolza blev i første omgang bedt om at tale om teorien for hyperelliptiske funktioner, men valgte i stedet at holde en række foredrag om fremskridtene inden for variationsregning. Det førte med sig, at en del ubesvarede spørgsmål dukkede op til overfladen, hvilket fik afgørende indflydelse på Bolzas egen forskning, som fra da af var helliget variationsregning [Parshall og Rowe, 1994, s.394].

Bolza var meget efterspurgt som Ph.D. vejleder, og da han samtidig satte sine studerende i gang med projekter, der var tæt relateret til hans egen forskning, fik han skabt et solidt grundlag for variationsregningsforskning i Chicago [Parshall og Rowe, 1994, p.393].

I 1908 døde Maschke, og blot to år senere, i 1910, vendte Bolza hjem til Tyskland. Chicago mistede dermed de ledende figurer i instituttets forskningsprofil, og derfra gik det gradvist ned ad bakke med Chicagos prominente omdømme. Det blev også starten på et nyt 'team', der kom til at bestå af Dickson, Bliss og Wilczynski. Jeg vil i det følgende kun koncentrere mig om Bliss, da det var ham, der førte variationsregningstraditionen videre efter Bolza.

## 'Chicagoskolen' under Bliss

Gilbert Ames Bliss (1876-1951) var Bolzas første studerende fra Chicago. Han skrev sin Ph.D. afhandling i år 1900, altså før Bolza for alvor invol-

[3]Møder afholdt af *American Mathematical Society* (AMS).

verede sig i variationsregning. Alligevel var det under Bolzas indflydelse, at Bliss blev opslugt af variationsregning, dels via Bolzas forelæsninger, dels ved udarbejdelse af en kopi af Bolzas private optegnelser fra Weierstrass' variationsregningskursus i 1879 [McShane, 1958, s.34]. Da Bliss i 1908 tiltrådte stillingen i Chicago, var han således dybt involveret i variationsregning. I 1927 blev han institutbestyrer, en position han beholdt, indtil han i 1941 trak sig tilbage og gik på pension. I denne periode var det Bliss og Dickson, der var de ledende professorer på instituttet. Saunders Mac Lane, som studerede matematik i Chicago, har optalt antallet af Ph.D. afhandlinger i perioden 1927-1937 til 117. Af disse var Bliss vejleder for de 35, og 34 af disse faldt inden for variationsregning [Mac Lane, 1989, s.138]. Ifølge Mac Lane viser dette to ting: Chicago var delvis blevet til en '*Ph.D. mill in mathematics*', og perioden var karakteriseret ved en intensiv indsats inden for variationsregning [Mac Lane, 1989, s. 138 og s.139]. Den store mængde af 'rutine' Ph.D. afhandlinger behøver ikke nødvendigvis at afspejle et generelt fald i forskningskvaliteten, som antydet af Mac Lane, men kan blot være en afspejling af Bliss' egen holdning til, hvad en Ph.D. grad er - bør være - idet Bliss, ifølge McShane, skulle have udtalt følgende om Ph.D. graden:

> *"It seems to me that there is wide-spread misunderstanding of the significance of doctor's degrees in mathematics. The comment is often made that the purpose of such a degree is to train students for research in mathematics, and that the success of the degree is doubtful because most of those who obtain it do not afterward do mathematical research. My own feeling about our higher degrees is quite different. The real purpose of graduate work in mathematics, or any other subject, is to train the student to recognize what men call the truth, and to give him what is usually his first experience in searching out the truth in some special field and recording his impressions. Such a training is invaluable for teaching, or business, or whatever activity may claim the student's future interest."* [McShane, 1958, s.37]

En af årsagerne til den massive opdækning af variationsregning kan være den ansættelsespraksis, der tilsyneladende blev fulgt i Chicago. I Bliss' periode som institutbestyrer er der forholdvis mange variationsregningsfolk blandt de nyansatte samt folk med Ph.D. fra Chicago. Mac Lane går så langt som til at kalde denne politik for '*inheritance principle*':

> *If X has been an outstanding professor in field F, appoint as his successor the best person in F, if possible the best student of X.* [Mac Lane, 1989, s. 141]

Dette førte, ifølge Mac Lane, til

> *a great concentration on such topics as variants of the problem of Bolza in the calculus of variations, but the school at Chicago missed out on the major development of the subject in the early 1930s, as represented by the work of Marston Morse on the calculus of variations in the large.* [Mac Lane, 1989, s.142]

Mac Lane er ikke ene om denne lammende kritik af Bliss' matematiske institut i Chicago. Felix E. Browder taler også om instituttets forfald i 1930'erne og 1940'erne, hvor Moores efterfølgere som institutbestyrer ikke var i stand til at opretholde den store prestige og 'intellektuelle vitalitet', som Moore havde skabt:

> *Especially under Bliss' regime, a strong tendency to inbreeding was in action, and as the great elder figures of the department died or retired, they were not replaced by younger mathematicians of equal caliber.* [Browder, 1989, s.193]

En tilsvarende vurdering kan findes hos Marshall H. Stone, der efter 2. verdenskrig blev 'headhuntet' til posten som institutbestyrer med den klart formulerede opgave at styrke matematisk institut i Chigaco:

> *... retirements and new appointments had brought a much increased emphasis on the calculus of variations and a certain tendency to inbreeding.* [Stone, 1989, s.185]

A. L. Duren, som var en af Bliss' studerende, og som selv skrev sin Ph.D. afhandling i variationsregning under Bliss, deler ovenstående kritik af Chicago:

> *The subject itself* [variationsregning] *had come to be too narrowly defined as the study of local, interior minimum points for certain prescribed functionals given by integrals of a special form. Generalization came only at the cost of excessive notational and analytical complications. It was like defining the ordinary calculus to consist exclusively of the chapter on maxima and minima. A sure sign of the decadence of the subject was Bliss' project to produce history of it...* [Duren, 1976, s.245]

McShane skrev i sin nekrolog over Bliss:

> *The life of a mathematical science comes from its intellectual attractiveness. In the past it has happened that some branch of*

> *mathematics has become bulky by the piling up of minutiae and the long-winded discussion of intricate and often uninteresting problems by methods stretched out beyond their domain of appropriateness. Such branches naturally lose all appeal, and become senile unless rejuvenated by new ideas and re-thinking that succeed in attaining the principal results (and new ones, too) more readily and more beautifully. In the early twentieth century the calculus of variations was in danger of losing its appeal because of mounting complexity. How much Bliss contributed to its rescue, as well as to its advancement, can be seen by anyone who will compare the compactness and generality of the theory in the Lectures on the Calculus of Variations with the older papers on the same subject.* [McShane, 1958, s. 45]

En sådan sammenligning ligger uden for dette projekts grænser, men den canadiske matematikhistoriker Craig Fraser lægger i øjeblikket sidste hånd på et stort værk om variationsregningens historie, hvori der bl.a. indgår en grundig analyse af Bliss' arbejde. Fraser har følgende kommentar til McShanes karakteristik af Bliss' betydning for variationsregningen:

> *in the last paragraph* [citeret ovenfor] *McShane seems unconsciously to have given an excellent characterization of the problems noticed by others with Bliss's program - far from having rescued the calculus of variations from these defect, Bliss perpetuated and deepened them.* [Fraser,1996, brev]

Ovenstående er naturligvis en beskrivelse af Chicagoskolen set i bakspejlet. Hvorvidt stemningen på instituttet i den periode, hvor Karush var studerende, var tynget af ovenstående dystre, kritik, melder historien ikke noget om. Men denne 'bakspejls'-analyse giver et ganske godt indtryk af, hvor omfattende variationsregningsforskningen var på det tidspunkt, hvor meget det må have fyldt i instituttets daglige liv, og af at en stor del af de ansatte såvel som de studerende var involveret i denne forskning. Karush var et produkt af denne variationsregningstradition, og hans *master's* afhandling blev til i dette miljø. Set i lyset heraf er, som det vil fremgå af det følgende, både Karushs emne og den manglende offentliggørelse af afhandlingen forståelig.

# Karushs master's afhandling

Karush blev indskrevet ved Chicagos universitet i 1936. To år senere blev han *Bachelor of Science* i matematik og fysik. I 1939 afsluttede han sit matematikstudium med afhandlingen *Minima of Functions of Several Variables* *with Inequalities as Side Conditions*, hvori der indgår et resultat, der senere blev anerkendt som 'Kuhn-Tuckers' sætning i ikke-lineær programmering. Hvad var det, Karush udviklede i sin afhandling? Hvilket problem arbejdede han med og hvorfor? Hvilken matematisk tilgang brugte han? Nedenstående gennemgang og analyse af relevante dele af Karushs afhandling vil behandle disse spørgsmål.

## Motivation

Formålet med Karushs afhandling var at undersøge nødvendige og tilstrækkelige betingelser for eksistensen af et relativt minimum for en funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ i mængden af punkter $x = (x_1, \ldots, x_n)$ opfyldende bibetingelserne $g_\alpha(x) \geq 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, hvor funktionerne $f$ og $g_\alpha$ er underlagt forskellige kontinuitets- og differentiabilitetsbetingelser. Problemet var blevet stillet af Lawrence M. Graves, der fungerede som Karushs vejleder.

På dette tidspunkt foregik der i Chicago en del forskning i variationsregningsproblemer med *uligheder* som bibetingelser, og Karushs problem kan ses som en endeligdimensional version heraf. Det kan umiddelbart forekomme mærkeligt, at man sætter Karush til at arbejde med denne endeligdimensionale udgave i stedet for med nogle problemstillinger inden for det, man virkelig var interesseret i. Karush giver i afhandlingen ikke selv noget bud på, hvad denne endeligdimensionale udgave af problemstillingen kan bidrage med, men han henviser til et tidligere arbejde af Bliss, *Normality and Abnormality in the Calculus of Variations*, hvor Bliss behandlede det tilsvarende endeligdimensionale problem, hvor bibetingelserne var givet ved ligninger i stedet for uligheder.

I dette arbejde gør Bliss i en længere indledning rede for relevansen af og motivationen for at behandle det endeligdimensionale tilfælde. Det var nemlig sådan, at et af de store forskningsemner for variationsregningsfolkene i Chicago i 1930'erne var det såkaldte Bolzas problem. Midt i 30'erne var man nået så langt, at man var i stand til at

> *carry through the theory of this problem with much simplified assumptions concerning what is called the normality of the minimizing arc.* [Bliss, 1938, s.365][4]

Formålet med Bliss' artikel var at gennemføre en grundig analyse af betydningen af *normalitet* og *abnormalitet* for variationsregning. Et vigtigt redskab hertil var først at klargøre betydningen af normalitet for '*the problem of a relative minimum of a function of a finite number of variables*' [Bliss, 1938, s.365], og Bliss' begrundelse herfor var, som han selv udtrykte det:

[4]Det forklares senere, hvad begreberne *normalitet* og *abnormalitet* dækker over.

> *The significance of the notion of abnormality in the calculus of variations can be indicated by a study of the theory of the simpler problem of finding, in the set of points $y = (y_1, ..., y_n)$ satisfying a system of equations of the form*
>
> $$\phi_\beta(y) = 0 \quad (\beta = 1, \dots, m < n)$$
>
> *one which minimizes a function $f(y)$.* [Bliss, 1938, s.367]

Han vil altså undersøge betydningen af *abnormalitet* ved at studere et endeligdimensionalt minimumsproblem, hvor antallet af bibetingelser er mindre end antallet af variable.

For at forstå hvad der gemmer sig bag begrebet *normalitet*, viste Bliss først en kendt sætning, nemlig Lagranges multiplikatorregel, der siger, at en første, nødvendig betingelse for, at et punkt $y^0 = ({y_1}^0, \dots, {y_n}^0)$, i hvis omegn funktionerne $f$ og $\phi_\beta$ har kontinuerte partielle afledede af mindst 2. orden og opfylder bibetingelserne givet ved ligningerne $\phi_\beta = 0$, er et minimumspunkt, er, at der findes konstanter $l_0$, $l_\beta$ ikke alle nul, således at de afledede $F_{y_i}$ af funktionen

$$F = l_0 f + \sum_{\beta=1}^{m} l_\beta \phi_\beta$$

alle er nul i $y^0$ [Bliss, 1938, s.367].

Med udgangspunkt i dette resultat defineres så, at et punkt $y^0$ har *abnormalitet af orden* $q$, hvis der eksisterer $q$ lineært uafhængige sæt af multiplikatorer af formen $l_0 = 0$, $l_\beta$ med egenskaben beskrevet i ovenstående, nødvendige betingelse. Er $q = 0$, siges punktet $y^0$ at være *normalt.*

Det vil altså sige, at hvis et punkt $y^0$ er abnormalt af en eller anden orden, så indgår selve den funktion $f$, man ønsker at minimere, ikke i den nødvendige betingelse beskrevet ovenfor. Det er således kun bibetingelserne, der er involveret, og man kan sige, at det er en eller anden irregularitet i området bestemt af bibetingelserne, der gør punktet $y^0$ til en minimumskandidat, og ikke egenskaber ved den funktion, man ønsker at minimere.

Karush indleder sin *master's* afhandling med at henvise til Bliss' behandling af ovenstående problem, og i forlængelse heraf følger det af Graves foreslåede problem:

> *This paper* [Karushs afhandling] *proposes to take up the corresponding problem in the class of points $x$ satisfying the inequalitites*
>
> $$g_\alpha(x) \geq 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m)$$

*where $m$ may be less than, equal to, or greater than $n$.* [Karush, 1939, s.1]

Betragter man Karushs afhandling i lyset af Bliss' artikel om normalitet og abnormalitet, finder jeg det nærliggende at antage, at Karushs arbejde kunne være med til at give indsigt i normalitets- og abnormalitetsforholdene for variationsregningsproblemer med *ulighedsbibetingelser*, og som sådan ville det være meget fornuftigt at stille Karush denne opgave.[5]

## Matematikken

I sin introduktion gør Karush opmærksom på, at man i minimumspunkter $x^0$ kan antage, at alle funktionerne $g_\alpha$ er nul, fordi det kun er de bibetingelser, der er nul i $x^0$, som lægger begrænsninger på problemet. De kaldes i dag for *aktive bibetingelser.* Det er nemlig sådan, at hvis $f(x^0)$ =minimum og f.eks. $g_1(x^0) > 0$, så vil, på grund af kontinuiteten af $g_1$, $g_1(x^0) \geq 0$ for alle $x$ tilstrækkelig tæt på $x^0$, og dermed spiller restriktionen $g_1(x^0) \geq 0$ ingen rolle for teorien om lokale minima. Derfor, fortsætter Karush, vil han i afhandlingen forudsætte, at hver gang han skriver, at $f(x^0)$ er et minimum, eller at $x^0$ er et minimumspunkt, så er det underforstået, at $g_\alpha(x^0) = 0$ for alle $\alpha$. Det, han mener, er, at han for punkter $x^0$ i mulighedsområdet, det vil sige for punkter, som opfylder samtlige bibetingelser, i tilfælde af lokalt minimum kan tillade sig kun at tage de aktive bibetingelser i betragtning.

Karushs afhandling falder i 6 afsnit. I afsnit 1 opremser Karush de resultater fra Bliss' artikel, som han selv får brug for. Afsnit 2 indeholder sætninger og beviser om lineære uligheder og udgør, om man så kan sige, hans værktøj; her er Farkas' Lemma, det vigtigste resultat. I det følgende vil jeg gennemgå Karushs afsnit 3 og 4, idet det er heri, at beviset for 'Kuhn-Tuckers' sætning optræder. Resultater fra hans to første afsnit, *Introduction* og *Preliminary theorems on linear inequalities*, vil kun blive inddraget, når de kan belyse aspekter i forhold til 'Kuhn-Tuckers' sætning. Afsnit 5 og 6 omhandler nødvendige og tilstrækkelige betingelser for minimum involverende afledede af 2. orden og vil ikke blive behandlet yderligere.

Det er således afsnit 3 og 4 i Karushs afhandling, som er specielt interessante i forhold til Kuhn-Tuckers sætning i ikke-lineær programmering. Heri undersøgte Karush minimumsproblemet under den forudsætning, at funktio-

[5]Kuhn skriver i sit historiske essay, at Karushs arbejde tilsyneladende var under indflydelse af et tilsvarende arbejde i variationsregning af Valentine [Kuhn, 1991, s.90]. Karush benytter, som det vil blive klart senere, et trick tidligere benyttet af Valentine. Af de grunde jeg har diskuteret ovenfor, finder jeg det mere sandsynligt, at det er Bliss' arbejde, der har motiveret Karushs.

nerne $f$ og $g_\alpha$ er kontinuert differentiable, altså $C^1$ funktioner, i en omegn af et punkt $x^0$.

I afsnit 3, *Necessary conditions involving only first derivatives*, definerede Karush først de begreber, der indgik i det, der efter Kuhns og Tuckers artikel i 1950 kom til at hedde *constraints qualification* (regularitetsbetingelse) [Karush, 1939, s.11]. Han startede med at definere, hvad han ville forstå ved begrebet *admissible* retning: En løsning $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ til ulighedssystemet

$$g_{\alpha x_i}(x^0)\lambda_i \geq 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

kaldte han en *admissible retning*, hvis $\lambda$ er forskellig fra nulvektoren. Skrivemåden

$$g_{\alpha x_i}(x^0)\lambda_i$$

dækker over Einsteins summations konvention, og betyder

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i}(x^0)\lambda_i.$$

En 'retning' $\lambda$ er med andre ord *admissible*, hvis den retningsafledede af samtlige bibetingelser i retning $\lambda$ er ikke-negativ, hvilket sikrer, at man ikke 'ryger' ud af området givet af bibetingelserne, hvis man 'går' i $\lambda$'s retning.

Karush definerede dernæst en regulær kurve $x_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n;\ \ 0 \leq t \leq t_0)$ til at være en *admissible* kurve, hvis

$$g_\alpha(x(t)) \geq 0 \quad \text{for alle } \alpha \text{ og } t$$

[Karush, 1939, s.11]. En regulær kurve er således en *admissible* kurve, hvis man bliver inde i området afgrænset af bibetingelserne, når man bevæger sig langs kurven.

Det sidste begreb, Karush havde brug for, inden han kunne gå i gang, var begrebet *normal point*, idet han kaldte et punkt $x^0$ normalt, hvis Jacobimatricen for $g$ i punktet $x^0$ har rang $m$. Det vil sige, at et punkt $x^0$ er normalt, hvis gradienterne

$$\nabla g_1(x^0),\ \nabla g_2(x^0), \ldots, \nabla g_m(x^0)$$

er lineært uafhængige.

Inden Karush viste det, der i dag kaldes for 'Kuhn-Tucker' betingelserne, viste han en mere general version:

*Sætning 3:1. Hvis $f(x^0)$ er et minimum, så eksisterer der multiplikatorer $l_0$, $l_\alpha$ ikke alle nul, således at de afledede $F_{x_i}$ af funktionen*

$$F(x) = l_0 f(x) + \sum_{\alpha=1}^{m} l_\alpha g_\alpha(x)$$

*alle er nul i $x^0$.* [Karush, 1939, s.12]

Der skal altså findes multiplikatorer $l_0$, $l_\alpha$ ikke alle nul, således at

$$l_0 \nabla f(x^0) + \sum_{\alpha=1}^{m} l_\alpha \nabla g_\alpha(x^0) = 0.$$

Karush omdannede problemet til et problem med bibetingelser givet ved lighedstegn, og via et enkelt kunstgreb opnåede han en situation, der er helt analog til Bliss', og han fik da resultatet ved at anvende den tilsvarende sætning hos Bliss. Mere konkret: Karush startede med at se på mængden af punkter $(x, z) = (x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m)$ opfyldende ligningerne $h_\alpha(x, z) = g_\alpha(x) - {z^2}_\alpha = 0$. Heri vil punktet $(x, z) = (x^0, 0)$ være et minimumspunkt for $f$.[6] Dermed har Karush, via indførelsen af *slack* variablene $z_1, \ldots, z_m$, omdannet problemet til et problem af den slags, som Bliss behandlede i sit arbejde om normalitet og abnormalitet. Bliss' resultat sikrer da eksistensen af konstanter $l_0, l_\alpha$ ikke alle nul, således at funktionen

$$H(x, z) = l_0 f + \sum l_\alpha h_\alpha = l_0 f + \sum l_\alpha g_\alpha - l_\alpha {z^2}_\alpha$$

har alle de partielle afledede $H_{x_i}(x^0, 0) = 0$. Heraf følger så, at

$$F(x) = l_0 f + \sum l_\alpha g_\alpha$$

har alle de afledede $F_{x_i}(x^0) = 0$ [Karush, 1939, s.12].

Ideen med at omforme problemet ved at indføre *slack* variablene var tidligere blevet brugt af Valentine, en anden Chicagostuderende, i dennes Ph.D. afhandling *The Problem of Lagrange with Differential Inequalities as added Side Conditions* [Valentine, 1937, s.414]. Karush benytter her samme notation og fremgangsmåde som Valentine, så det er meget tænkeligt, at det er herfra, Karush har ideen.

Denne første, nødvendige betingelse siger ikke noget om multiplikatorernes fortegn. Man kan også komme i den situation, at multiplikatoren $l_0$ er lig med nul, og dermed ender man i det abnormale tilfælde. Karush bemærkede,

[6]Her mener han selvfølgelig $f^* : \mathbf{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbf{R}$ givet ved $f^*(x, z) = f(x)$.

at hvis $x^0$ er et normalt punkt for $f$, så er multiplikatoren $l_0 \neq 0$, og ved division kan man da opnå et sæt af multiplikatorer $l_0 = 1$, $l_\alpha$, som opfylder sætningens konklusion. Antages det nu, at $x^0$ er et normalt minimumspunkt for $f$, og $l_0 = 1$, samt at funktionerne $f$ og $g_\alpha$ har kontinuerte afledede af 2. orden, så kan man vise, at multiplikatorerne $l_\alpha$ er ikke-positive. Karush vil dog i dette afsnit give et bevis for den ikke-positive karakter af multiplikatorerne, som *ikke* involverer de 2. afledede, og det er dette resultat, der fører til Kuhn-Tuckers sætning.

Idet Karush ikke vil benytte sig af 2. ordens afledede, er han nødt til at bruge nogle andre forudsætninger. Hans ide var, at Farkas' Lemma skal sikre eksistensen af ikke-positive multiplikatorer, og, som det vil fremgå af nedenstående gennemgang af Karushs bevis, kan han bringe Farkas' Lemma i anvendelse, hvis den retningsafledede af $f$ i en *admissible* retning, $\lambda$, er $\geq 0$. For at sikre det har Karush brug for at kunne se på $f$'s restriktion til en *admissible* kurve $x(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, der har $\lambda$ som tangentvektor i punktet $x^0 = x(0)$. Derfor valgte Karush at antage, at der for enhver *admissible* retning $\lambda$ er en *admissible* kurve fra $x^0$ i retning $\lambda$, og med det mente han, at der skulle være en *admissible* kurve $x_i(t)$ $(0 \leq t \leq t_0)$, for hvilken $x_i(0) = x_i{}^0$ og $x_i{}'(0) = \lambda_i$. Denne betingelse på bibetingelserne er et eksempel på, hvad der efter Kuhns og Tuckers artikel i 1950 kom til at hedde *constraints qualification*. Under denne antagelse viste Karush så det, der senere blev til Kuhn-Tuckers sætning:

> *Under ovenstående antagelse gælder, at en første, nødvendig betingelse for, at $f(x^0)$ er et minimum, er, at der findes multiplikatorer $l_\alpha \leq 0$, således at de afledede $F_{x_i}$ af funktionen*
>
> $$F = f + \sum l_\alpha g_\alpha$$
>
> *alle er nul i $x^0$* [Karush, 1939, s.13].

Det vil sige

$$\nabla f(x^0) + \sum_{\alpha=1}^{m} l_\alpha \nabla g_\alpha(x^0) = 0.$$

Først viste Karush, at for en *admissible* retning $\lambda$ vil

$$\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x^0)\lambda_i \geq 0.$$

For at vise dette så Karush på $f$'s restriktion til en til $\lambda$ hørende *admissible* kurve $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $0 \leq t \leq t_0$, gående ud fra $x^0$ i $\lambda$'s retning, en sådan kurve findes jo ifølge forudsætningen. Han lod $\overline{f}(t) = f(x(t))$ betegne denne restriktion af $f$. Da nu

$$\overline{f}(0) \leq \overline{f}(t) \quad \text{for} \quad 0 \leq t \leq t_0$$

(ellers ville $f(x^0)$ ikke være et minimum), følger det, at

$$\overline{f}'(0) \geq 0,$$

og da $\overline{f}'(0) = \nabla f(x^0)\lambda$, følger det, at

$$\nabla f(x^0)\lambda \geq 0.$$

Her har Karush således argumenteret for, at for ethvert $u = (u_1, \ldots, u_n)$ som er løsning til ulighedssystemet

$$\nabla g_1(x^0)u \geq 0, \ldots, \nabla g_m(x^0)u \geq 0,$$

altså for enhver *admissible* retning $u$, gælder, at

$$\nabla f(x^0)u \geq 0.$$

Karush benyttede Farkas' Lemma derpå til at sikre eksistensen af ikke-negative multiplikatorer $C_1, \ldots, C_m$, således at

$$C_1 \nabla g_1(x^0) + C_2 \nabla g_2(x^0) + \ldots + C_m \nabla g_m(x^0) = \nabla f(x^0).$$

Sættes $l_\alpha = -C_\alpha$, så er $l_\alpha \leq 0$, og der gælder

$$\nabla f(x^0) + \sum_{\alpha=1}^{m} l_\alpha \nabla g_\alpha(x^0) = 0.$$

Hermed har Karush bevist den sætning, der senere blev kendt som Kuhn-Tuckers sætning.

I resten af afsnit 3 diskuterede Karush forskellige situationer i forhold til sætningen. Han stillede spørgsmål som: Hvor sandsynligt er det, at funktionerne $g_\alpha(x)$ vil opfylde, at der for enhver *admissible* retning $\lambda$ findes en *admissible* kurve fra $x^0$ i retning $\lambda$? Hvilke betingelser kan man lægge på funktionerne $g_\alpha$ for at sikre, at de opfylder denne egenskab? I afhandlingens afsnit 4 undersøgte han *tilstrækkelige* betingelser involverende kun 1. ordens afledede. I afsnit 5 og 6 uddybede Karush spørgsmålene om nødvendige og tilstrækkelige betingelser ved at inddrage den 2. afledede af funktionerne.

## Sammenligning med Kuhns og Tuckers resultat

Kuhns og Tuckers sætning[7] ser umiddelbart anderledes ud end Karushs, ikke blot hvad angår notationen, men også i de faktiske, nødvendige betingelser. Kuhn og Tucker forlangte ikke eksistensen af ikke-negative multiplikatorer ${u^0}_1, ..., {u^0}_n$, således at

$$\nabla g(x^0) + \sum_{i=1}^{m} {u^0}_i \nabla f_i(x^0) = 0,$$

men kunne nøjes med at kræve, at

$$\nabla g(x^0) + \sum_{i=1}^{m} {u^0}_i \nabla f_i(x^0) \leq 0.$$

Denne forskel skyldes, at Kuhn og Tucker har de ekstra betingelser på, at $x \geq 0$. Indføres disse i bibetingelserne, kan Kuhns og Tuckers problem formuleres som følger:

Maximer

$$g(x)$$

under bibetingelserne

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) & \geq & 0 \\ & & .. \\ & & .. \\ f_m(x) & \geq & 0 \\ f_{m+1}(x) & \geq & 0 \\ & & .. \\ & & .. \\ f_{m+n}(x) & \geq & 0 \end{array}$$

hvor $f_{m+j} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ er givet ved $f_{m+j}(x) = x_j$.

Hermed svarer Kuhns og Tuckers problemformulering til Karushs, dog er det sådan, at Kuhn og Tucker altid vil have mindst lige så mange bibetingelser, som der er variable. Anvendes Karushs sætning på dette problem fås, at de

[7]Se kapitel 6.

nødvendige betingelser er, at der skal eksistere ikke-negative multiplikatorer[8] ${u^0}_1, \dots, {u^0}_m, {u^0}_{m+1}, \dots, {u^0}_{m+n}$, således at

$$\nabla g(x^0) + \sum_{i=1}^{m+n} {u^0}_i \nabla f_i(x^0) = 0.$$

Skrives dette ud, fås således eksistensen af ikke-negative multiplikatorer

$${u^0}_1, \dots, {u^0}_m, {u^0}_{m+1}, \dots, {u^0}_{m+n}$$

så

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) + u_{m+j} = 0 \qquad \text{for } j = 1, 2, \dots, n.$$

Idet $u_{m+j} \geq 0$ ses det, at det er nok at forlange

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) \leq 0.$$

Hvilket er Kuhns og Tuckers betingelse. Omvendt følger Karushs betingelse af Kuhns og Tuckers, thi i de tilfælde, hvor

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) < 0,$$

vælges blot

$$u_{m+j} = -(\frac{\partial g}{\partial x_j}(x^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)),$$

så er $u_{m+j} \geq 0$ og

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) + u_{m+j} = 0$$

for alle $j \in \{1, \dots, n\}$, præcis som Karush forlangte.

Nu er det sådan, at Karush kun så på aktive bibetingelser. Han antog, at hver gang der optræder en bibetingelse $g_\alpha$, er $g_\alpha(x^0) = 0$. Hvis han havde

[8]Karush har egentlig ikke-positive multiplikatorer. I Kuhns og Tuckers tilfælde bliver de ikke-negative, fordi de betragter et maksimumsproblem i modsætning til Karush, der behandler situationen som et minimumsproblem.

indført den ekstra, nødvendige betingelse, at multiplikatorerne også skulle opfylde, at $l_\alpha g_\alpha(x^0) = 0$, $\alpha = 1, ..., m$, hvilket blot indebærer, at $l_j$ sættes $= 0$, hvis $g_j(x^0) \neq 0$, kunne hans nødvendige betingelser skrives

$$\nabla f(x^0) + \sum_{\alpha=1}^{m} l_\alpha \nabla g_\alpha(x^0) = 0$$

uden at forlange, at alle $g_\alpha(x^0) = 0$.[9] Ser vi på Kuhns og Tuckers betingelser (se s.119), er det betingelsen

$$\phi^{0\prime}_x x^0 = 0,$$

der sikrer, at multiplikatoren $u_{m+j}$ sættes lig med 0, hvis den $m + j$'te bibetingelse $f_{m+j}(x^0) \neq 0$. Thi $\phi^{0\prime}_x x^0 = 0$ er ensbetydende med, at

$$(\nabla g(x^0) + \sum_{i=1}^{m} u^0{}_i \nabla f_i(x^0))' x^0 = 0,$$

og hvis $x^0{}_j \neq 0$ (hvilket svarer til, at den $m + j$'te bibetingelse $f_{m+j}(x^0)$ ikke er en aktiv bibetingelse), skal

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = 0,$$

for at $\phi^{0\prime}_x x^0 = 0$ er opfyldt, men det betyder, at multiplikatoren $u_{m+j} = 0$.

Kuhns og Tuckers betingelser (2)(se s.119) handler om 'at tilhøre mulighedsområdet', ikke-negativiteten af multiplikatorerne samt sikring af, at multiplikatoren til en ikke-aktiv bibetingelse $f_j$, $j = 1, \ldots, m$, bliver sat til 0. Thi $\phi^0{}_u \geq 0$ svarer til, at $f_j(x^0) \geq 0$ for $j = 1, \ldots, m$, og $u^0 \geq 0$ kommer ud på, at $u^0{}_i \geq 0$ for $i = 1, \ldots, m$. Endelig er $\phi^0{}_u{}' u^0 = 0$ ensbetydende med, at $\sum_{i=1}^{m} u^0{}_i f_i(x^0) = 0$, og da $u^0{}_i \geq 0$ for alle $i = 1, \ldots, m$, og $f_i(x^0) \geq 0$ for alle $i = 1, \ldots, m$, er $\sum_{i=1}^{m} u^0{}_i f_i(x^0) = 0$ kun opfyldt, hvis $f_i(x^0)$ ikke er en aktiv bibetingelse.

# Modtagelsen af Karushs arbejde

Kuhn skriver i sin historiske artikel om ikke-lineær programmering, at Karushs arbejde er en upubliceret klassiker inden for feltet. I et brev[10] til

[9] Karush havde ikke disse overvejelser med i afhandlingen, og det fremgår ikke på noget sted om han har været disse overvejelser igennem.

[10] Jeg takker hermed Karush for at have stillet sin brevveksling med Kuhn til min rådighed.

Karush dateret 4. februar 1975 gør Kuhn rede for, at han er blevet bedt om at give et historisk vue over ikke-lineær programmering ved et AMS symposium. I brevet afslører Kuhn, at han ved at læse i Takayamas *Mathematical Economics* [Takayama, 1974] blev opmærksom på Karushs *master's* afhandling fra 1939. Kuhn har også skaffet sig et eksemplar af afhandlingen og vil nu benytte lejligheden til at fremhæve Karushs indsats:

> *First let me say that you have clear priority on the results known as the Kuhn-Tucker conditions (including the constraint qualification). I intend to set the record as straight as I can in my talk.* [Kuhn, 1975, brev, 4 febr.]

Et af de spørgsmål, Kuhn stiller til Karush i brevet, er - udover vejleder og problemstiller - hvorfor afhandlingen aldrig blev publiceret, og Kuhn tilbyder en delvis publicering som appendiks til sin historiske oversigt. Disse spørgsmål og dette tilbud viser, at man inden for de kredse af matematikken, hvor man beskæftiger sig med matematisk programmering, anså resultatet for at være så vigtigt, at det kunne retfærdiggøre publiceringen af en ældre sag som Karushs *master's* afhandling. Kuhn skriver videre i sit brev, at Richard Cottle, som organiserede dette AMS symposium, skulle have udtalt følgende om Karush, da han blev bekendt med Kuhns planer:

> *'you must be a saint' not to complain about the absence of recognition.* [Kuhn, 1975, brev, 4 febr.]

Dette viser, at disse folk inden for matematisk programmering anså det for betydningfuldt at blive sat i forbindelse med 'Kuhn-Tuckers' sætning. Kuhn afslutter brevet til Karush med at fortælle, at også Tucker, som husker Karush fra *the Rand Cooperation*, undrer sig over, at Karush aldrig har gjort Tucker opmærksom på sin afhandling [Kuhn, 1975, brev, 4 febr.].

Er Karush da en 'helgen'? Hvorfor har han ikke gjort krav på at få del i denne ære, som ikke-lineær programmerings opdagelse er omspundet af? I et brev dateret 10. februar 1975 svarer Karush på Kuhns spørgsmål. Han fortæller, ikke overraskende, at Bliss og den dengang unge Magnus R. Hestenes inspirerede ham meget tillige med Graves, der som nævnt var vejleder på Karushs *master's* afhandling. Alle tre stærke variationsregningsfolk. Hvad angår den manglende publicering af afhandlingen og den manglende opfordring hertil fra mere erfarne matematikere, har Karush følgende kommentar:

> *The thought of publication never occured to me at the time I wrote the master's thesis. I was a struggling graduate student trying to meet the requirements for going on to my Ph.D. and Graves never*

> *brought up the question of publication. I imagine nobody at that time anticipated the future interest in the problem.* [Karush, 1975, brev, 10 febr.]

Jeg er overbevist om, at forklaringen ligger i Karushs sidste sætning - ingen kunne på dette tidspunkt forudse, hvor stor interesse der kom for disse problemstillinger i slutningen af 1940'erne og begyndelsen af 1950'erne. Hvordan skulle de også kunne det? Set med 1939-øjne tror jeg, man må konkludere, at Karushs afhandling var en flot *master's* afhandling, men selve problemstillingen og resultaterne fremstod ikke særlig epokegørende, blot lidt 'rydden op' og udfyldelse af 'huller'. Det, man virkelig var interesseret i, var uendelig dimensionale versioner af problemstillingen.

Men hvad med senere? Hvorfor stod Karush ikke frem og påpegede, at han faktisk kom før Kuhn og Tucker? Hertil bemærkede Karush:

> *That does not answer the question of why I did not point to my work in later years when nonlinear programming took hold and flourished. The thought of doing this did occur to me from time to time, but I felt rather diffident about that early work and I don't think I have a strong necessity to be 'recognized'. In any case, the master's thesis lay buried until a few years ago when Hestenes urged me to look at it again to see if it shouldn't receive its proper place in history ... . So I did look at the thesis again, and I looked again at your work with Tucker. I concluded that you two had exploited and developed the subject so much further than I, that there was no justification for my announcing to the world, 'Look what I did, first.'* [Karush, 1975, brev, 10 febr.].

Ud fra et matematikhistorisk synspunkt vil jeg mene, at Karush her har ret. Han viste måske nok en sætning, der var analog til Kuhns og Tuckers, men det var *ikke* ikke-lineær programming, det var et stykke arbejde, der så dagens lys i en helt anden sammenhæng. Karushs arbejde kunne måske nok have givet anledning til et nyt forskningsfelt, hvis man f.eks. havde kunnet set nogle vigtige anvendelser heraf. Instituttet i Chicago havde på dette tidspunkt, som det fremgår af karakteriseringen af Bliss' institut, udviklet sig til et snævert defineret variationsregningsmiljø -og her inden for var der ikke nogen, der kunne se vigtige potentielle anvendelser af Karushs resultat. Det var nogle helt andre problemstillinger, end dem der senere drev ikke-lineær programmering, der var på banen i den kontekst, Karushs *master's* afhandling blev til i. Forskningsindsatsen gik i en anden retning, og i den sammenhæng var Karushs arbejde blot et lille hjørne i et forskningsfelt, der havde variationsregningsproblemer med ulighedsbibetingelser som genstandsfelt.

Efter Kuhns annoncering viste det sig, at der var flere, som syntes, det var vigtigt, at Karush fik del i æren. Richard Bellman skrev allerede den 11. februar til Kuhn:

> *I understand from Will Karush that you will try and set the record straight on the famous Kuhn-Tucker condition. I applaud your effort. Fortunately, there is enough credit for everybody. It would certainly be wonderful if you wrote it as the Kuhn-Tucker-Karush condition.*
> *Like many important results, it is not difficult to establish, once observed. That does not distract from the importance of the condition.* [Bellman, 1975, brev, 11 febr.]

Kuhn takker i et brev dateret 21. februar Karush for hans svar og fortæller, at mange af Karushs venner, som f.eks matematikeren Phil Wolfe, der arbejder inden for matematisk programmering, er meget glade for, at Karushs resultat nu bliver anerkendt [Kuhn, 1975, brev, 21 febr.]. Igen fremgår det, at her i 1975 anses Kuhn-Tucker betingelserne for at være et vigtigt resultat, som folk gerne vil sættes i forbindelse med.

## Hvem er så denne 'helgen'?

I magasinet '*Senior Life*' kunne man i august 1987 læse følgende beskrivelse af Karush:

> *William Karush (70), tall and husky - built more like an exlumberjack than an academic-* .[Senior Life, aug. 1987]

Men der er ingen tvivl om, at Karush er akademiker. Han gik direkte fra sit 'hovedsfags'-studium over i et Ph.D. studium ved Chicago universitetet, hvor han under Hestenes' vejledning skrev en afhandling om isoperimetriske problemer og indexsætninger i variationsregning. Han afsluttede sit Ph.D. studium i 1942 og fik derefter, som så mange andre videnskabsfolk på det tidspunkt, job i det amerikanske militær. Karush startede i Washington, hvor han forskede i ballistik og chokbølger på geofysisk laboratorium ved *Carnegie Institute* i Washington D.C. Derefter blev han tilknyttet Manhattanprojektets afdeling ved Chicagos universitet, hvor han indgik i et hold hovedsagelig bestående af fysikere. De arbejdede med design af kernereaktorer, og Karushs job var at løse de problemer inden for matematisk fysik, som opstod i den forbindelse.

Ser man på Karushs løbebane efter krigen, tegner der sig et billede af en mand, der hovedsagelig har sigtet mod en traditionel, akademisk karriere. Han har tilbragt 31 år af sit arbejdsliv som professor i matematik dels ved Chicagos universitet (1945-1956), dels ved *California State University* (1967- 1987). Men der har været adskillige afstikkere, som vidner om Karushs bredere matematiske interesser især inden for anvendelser af matematik. Han har i perioder arbejdet inden for operationsanalyse, *management science*, matematiske metoder i socialvidenskaberne og matematisk optimering af modelsystemer. I dag er han nok mest kendt for netop Kuhn-Tucker betingelserne i ikke-lineær programmering, idet adskillige nyere lærebøger i ikke-lineær programmering kalder resultatet for *Karush-Kuhn-Tucker* betingelserne [Bazaraa et al., 1993, s.149], [Peressini et a., 1988, s.169]. Uden for matematiske kredse er han nok mest kendt for sit arbejde i fredsbevægelsen *Beyond War*.

# Kapitel 10

# Johns sætning -et bidrag til konveksitetsteori

I 1948 blev der i anledning af Courants 60 års fødselsdag udgivet et festskrift med en samling af artikler. En af dem var skrevet af en af Courants tidligere studerende, Fritz John, på hvis liv og virke Courant havde haft stor indflydelse. Fritz Johns essay havde titlen *Extremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions.*[1] I denne artikel viste Fritz John et resultat om nødvendige betingelser for ekstremum for en funktion underlagt ulighedsbibetingelser, der nu om dage i ikke-lineær programmering omtales som *Fritz John betingelserne.* Ser man bort fra regularitetsbetingelsen, er Fritz Johns sætning analog til Kuhn-Tuckers sætning.

Der kom ikke nogen ny matematisk disciplin ud af Fritz Johns artikel, tværtimod var artiklen tidligere blevet afvist af *Duke Mathematics Journal.* To år senere gav et tilsvarende resultat af Kuhn og Tucker anledning til en ny matematisk disciplin, nemlig ikke-lineær programmering. For at forklare denne tilsyneladende diskrepans vil jeg i dette kapitel give en analyse og tolkning af Fritz Johns artikel med speciel vægt på den kontekst, hans arbejde blev til i.

## Fritz John -en kort biografi

Fritz John blev født den 14. juni 1910 i Berlin. Han studerede matematik bl.a i Göttingen, hvorfra han i 1933 fik en Ph.D. grad. Constance Reid beretter i sin Courant biografi om, hvordan Courant hjalp Fritz John og hans senere

[1] I sit historiske essay om ikke-lineær programmering gør Kuhn opmærksom på, at han faldt over en henvisning til Johns arbejde i Takaymas bog [Takayama, 1974]. Hvor Takayama kendte Johns arbejde fra, ved jeg ikke.

kone, Charlotte Woellmer, gennem studierne i begyndelsen af 1930'erne, hvor depressionen slog igennem i Tyskland. Courant hjalp Fritz John med at få et stipendium, og Charlotte Woellmer fik gratis logi i Courants hus, mens han var på foredragsturné i USA i foråret og sommeren 1932 [Reid, 1976, s.131-132]. Fritz John var halvt jødisk, mens Charlotte Woellmer var 'arier'. De blev gift i 1933, på et tidspunkt hvor det endnu ikke var blevet forbudt for en 'arier' og en 'ikke-arier' at indgå ægteskab. Det var dog så ilde set, at de holdt deres ægteskabsplaner hemmelige. Courant gjorde, hvad han kunne for at finde en stilling til Fritz John uden for Hitlers Tyskland, og i 1934 lykkedes det for Courant at skaffe Fritz John et stipendium som *Research Scholar* i Cambridge, England [Reid, 1976, s.154-155]. Dette stipendium udløb i juni 1935. I efteråret samme år fik Fritz John helt uventet et tilbud fra universitetet i Kentucky, USA, hvor han blev indtil 1943. I de sidste to år af 2. verdenskrig arbejdede han som matematiker ved *U.S. War Department* i *Ballistic Research Laboratory* ved *Aberdeen Proving Ground.* Efter krigen kom han 'hjem' til Courant, idet han blev professor ved *New York University* ved det matematiske institut, som Courant byggede op. Fra 1978 til sin pension i 1981 var han ansat i Courants professorat på Courant instituttet på New Yorks universitet.

Fritz John var en matematiker i verdensklasse, hvilket hans imponerende publikationsliste og hans modtagelse af priser vidner om. Han publicerede ikke færre end 101 matematiske tekster, mest artikler, men også monografier er at finde på listen. I 1942 modtog han *Rockerfeller Foundation Fellowship*, i 1955 *Fulbright Lectureship*, i 1963 og 1970 fik han Guggenheims rejsestipendium. I 1979 var han *Sherman Fairchild Distinguished Scholar* ved *the California Institute of Technology*, i 1980 blev han belønnet med senior *U.S. Scientist Humboldt* prisen. I 1973 modtog han George David Birkhoff pris i anvendt matematik, i 1982 fik han tildelt *a Steele prize* af AMS, Toronto, og i 1984 modtog han et *fellowship* fra John D. og Cathrine T. MacArthurs fond. Han var tillige medlem af adskillige matematiske og videnskabelige sammenslutninger: *National Academy of Sciences*, *Die Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina*, *The American Mathematical Society*, *The Mathematical Association of America*, *The Society for Industrial and Applied Mathematics.*

John er nok mest kendt for sit arbejde med partielle differentialligninger, som var et af hans største og vigtigste forskningsområder, men også inden for geometri, analyse og ikke-lineær elasticitet leverede han betydningsfulde bidrag. I forhold til nedenstående analyse af hans artikel fra 1948 om ekstremumsproblemer underlagt ulighedsbibetingelser er det dog hans arbejde inden for konveksitetsteori, der er vigtigt. I perioden fra sin første artikel, der blev publiceret i 1934, og frem til 1948-artiklen, publicerede han i alt 13 artikler, og af disse placerede over halvdelen sig inden for konveksitetsteori. En del af disse er blevet karakteriseret som klassikere inden for feltet [Gårding, 1985]. I perioden, der ledte op til publiceringen af artiklen om ekstremumsproblemer under ulighedsbibetingelser, var Fritz John således forankret i et forskningsmiljø inden for konveksitetsteori.

# Fritz Johns artikel

Fritz John skrev i introduktionen til artiklen *Extremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions*:

> *This paper deals with an extension of Lagrange's multiplier rule to the case, where the subsidiary conditions are inequalities instead of equations.* [John, 1948, s.187]

Idet *Lagrange's multiplier rule* er et værktøj til ekstremumsbestemmelser under bibetingelser givet ved *ligninger*, er formålet med Johns artikel således at udvide dette værktøj til ektremumsbestemmelser under bibetingelser givet ved *uligheder*. Han fremhævede yderligere, at han kun vil betragte det endeligdimensionale tilfælde, altså kun se på funktioner af endeligt mange variable.

## Matematikken

Artiklen kan deles op i to dele hver bestående af to afsnit. Første afsnit i første del behandler spørgsmålet om nødvendige betingelser for et minimum, og i andet afsnit udledes tilstrækkelige betingelser for et minimum. Anden del omhandler to geometriske anvendelser af teorien udledt i første del.

### Nødvendige betingelser for minimum

I det følgende er $R$ en delmængde af $\mathbf{R}^n$. $R'$ er en delmængde af $R$ bestemt af et system af uligheder med parameter $y$:

$$G(x, y) \geq 0,$$

hvor $G$ er en reel funktion, der er defineret for alle $x \in R$ og alle 'værdier' af parameteren $y$. $F$ er en funktion med reelle værdier defineret på $R$. Fritz John ledte efter betingelser, som et punkt $x^0$ i en mængde $R'$ skal opfylde, for at

$$M = F(x^0) = \min_{x \in R'} F(x).$$

For at opnå tilstrækkelig generalitet antog han yderligere, at 'værdierne' af parameteren $y$ løber over en mængde af punkter $S$ i et rum $H$. Dermed er $G(x, y)$ defineret i mængden $R \times S$ [John, 1948, s.187-188]. Det vil fremgå af anvendelserne, hvorfor John valgte denne konstruktion med en parameter $y$ og 'parameter mængde' $S$.[2]

John indskrænkede sig til at betragte tilfældet, hvor $S$ ('parametermængden') er en kompakt mængde i et metrisk rum $H$. Derudover forlangte han, at $F(x)$ og $G(x, y)$ er kontinuerte og har kontinuerte partielle afledede $F_i$ og $G_i$ af 1. orden med hensyn til koordinaterne $x_i$ for punktet $x = (x_1, \ldots, x_n)$ [John, 1948, s.188].

Med disse indskrænkninger formulerede Fritz John sin sætning om nødvendige betingelser for et minimumspunkt som følger :

*Theorem I. Lad $x^0$ være et indre punkt i $R$ og tilhøre mængden $R'$ af punkter $x$ i $R$, som opfylder bibetingelserne $G(x, y) \geq 0$ for alle $y \in S$. Antag yderligere, at*

$$F(x^0) = \min_{x \in R'} F(x).$$

*Så findes der en endelig mængde af punkter, $y^1, \ldots, y^s$, i $S$ og tal, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$, ikke alle lig med nul, således at*

$$G(x^0, y^r) = 0 \qquad \text{for } r = 1, \ldots, s$$

$$\lambda_0 \geq 0, \ \lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_s > 0,$$

$$0 \leq s \leq n,$$

*og endelig således at funktionen*

$$\phi(x) = \lambda_0 F(x) - \sum_{r=1}^{s} \lambda_r G(x, y^r)$$

*har et kritisk punkt i $x^0$, det vil sige, at de partielle afledede er nul i $x^0$:*

$$\phi_i(x^0) = 0 \ \text{ for } \ i = 1, \ldots, n.$$

[John, 1948, s.188-189]

[2]Se s.184.

John lod $S'$ betegne delmængden af $S$, for hvilken $G(x^0, y) = 0$ for alle $y \in S'$, altså mængden af aktive bibetingelser. $F'(x, z)$ betegnede differentialet $\sum_{i=1}^{n} F_i(x)z_i$ af funktionen $F$, og $G'(x, z, y)$ betegnede differentialet $\sum_{i=1}^{n} G_i(x, y)z_i$ af funktionen $G$. Det vil fremgå af følgende gennemgang af Johns bevis, at kernen i hans bevis var at vise, at det homogene, lineære ulighedssystem i $z$

$$F'(x^0, z) < 0 , \qquad G'(x^0, z, y) > 0 \text{ for alle } y \in S',$$

ikke har nogen løsninger.

Inden jeg går igang med Johns bevis, vil jeg først komme med nogle bemærkning om den bærende ide i hans bevis sammenlignet med Karushs: Intuitivt er det klart at systemet

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} F_i(x^0)z_i < 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} G_i(x^0, y)z_i > 0 \text{ for alle } y \in S'$$

ikke har nogen løsning $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Man kan ikke finde en retning $z$ at gå i, således at den retningsafledede af $F$ i $x^0$ for denne retning $z$ er mindre end nul, samtidig med at den retningsafledede af $G$ i $x^0$ i den samme retning $z$ er positiv for alle $y \in S'$. Thi i modsat fald ville vi kunne gå i denne $z$-retning og dermed nå et punkt $x$, hvor $F(x) < F(x^0)$, samtidig med at dette punkt $x$ ville tilhøre mulighedsområdet, hvilket ville stride mod, at $x^0$ er et minimumspunkt blandt punkter i mulighedsområdet.

Det minder meget om Karushs fremgangsmåde. Karushs 'værktøj' var Farkas' Lemma, og for at kunne anvende det viste Karush[3], at $g'_i(x^0, z) \geq 0$ for $i = 1, \ldots, m$ automatisk ville sikre, at $f'(x^0, z) \geq 0$, hvilket jo indebærer, at systemet $g'_i(x^0, z) \geq 0$ for $i = 1, \ldots, m$, $f'(x^0, z) < 0$ *ingen* løsninger $z = (z_1, \ldots, z_n)$ har.

Nu til Fritz Johns bevis. Han benyttede ikke Farkas' Lemma, men andre lignende resultater fra konveksitetsteorien; resultater som han var fortrolig med gennem arbejder af bl.a. Dines og Stokes. Hertil introducerede Fritz John det, Stokes kaldte for de *repræsentative* punkter hørende til ulighedssystemet

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x^0)z_i < 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} G_i(x^0, y)z_i > 0 \text{ for alle } y \in S',$$

hvorved forstås punkterne

$$q = (-F_1(x^0), \ldots, -F_n(x^0)), \qquad p_y = (G_1(x^0, y), \ldots, G_n(x^0, y)) \text{ for } y \in S',$$

[3]Se s.168

det vil sige koefficienterne i ulighedssystemet [Stokes, 1931]. Fra konveksitetsteorien vidste John, at 'ikke-eksistensen' af en løsning til ulighedssystemet medfører, at der ikke findes nogen plan $\sum_{j=1}^{n} c_j u_j = 0$, således at alle de repræsentative punkter ligger i det ene af de to åbne halvrum $\sum_{j=1}^{n} c_j u_j > 0$ eller $\sum_{j=1}^{n} c_j u_j < 0$, thi hvis der fandtes en sådan plan $\sum c_j u_j = 0$, ville koefficienterne $(c_j)_{j \in I}$ (eller deres modsatte) udgøre en løsning til ulighedssystemet [Dines, 1936, s.355].

John kunne således slutte, at mængden $\sum$ bestående af de repræsentative punkter ikke ligger i et åbent halvrum begrænset af en hyperplan gennem origo, men så må origo tilhøre det konvekse hylster af $\sum$ [John, 1948, s.191]. Fra Bonnesens og Fenchels arbejder var det kendt, at når $\sum$ er en afsluttet og begrænset mængde, vil ethvert punkt i det konvekse hylster af $\sum$ tilhøre et simplex med hjørner i mængden selv, det vil sige med hjørner i $\sum$ [Bonnesen og Fenchel, 1934, s.9]. Bonnesens og Fenchels bevis for dette resultat viser, at man kan vælge et af hjørnerne vilkårligt i $\sum$, og Fritz John valgte $q$ til at være dette hjørne. Med andre ord gælder der altså, at origo kan opfattes som tyngdepunkt for $s+1$ ikke-negative masser ($s \leq n$) placeret dels i $q$, dels i $s$ andre punkter i $\sum$.

Fritz John oversatte dette geometriske resultat til analytiske udtryk og fik dermed eksistensen af endelig mange punkter $y^1, \ldots, y^s$ i $S'$ samt $s+1$ skalarer $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$, således at

$$\lambda^0 \geq 0, \ \lambda_1 > 0, \ \ldots, \ \lambda_s > 0, \quad 0 \leq s \leq n,$$

og[4] således at

$$0 = -\lambda_0 F_i(x^0) + \sum_{r=1}^{s} \lambda_r G_i(x^0, y^r) \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, n,$$

hvilket betyder, at funktionen

$$\phi(x) = \lambda_0 F(x) - \sum_{r=1}^{s} \lambda_r G(x, y^r)$$

har et kritisk punkt i $x^0$.

Tilbage står at bevise at ulighedssystemet (*) rent faktisk ikke har nogen løsninger. Fritz John gav et indirekte bevis herfor. Fandtes der nemlig en løsning $z$ til (*), så ville der findes positive størrelser $\delta$ og $\varepsilon$, således at

$$F'(x, z) < -\varepsilon, \quad G'(x, z, y) > \delta \quad \text{for alle} \quad x \in X_\varepsilon{}^0, \quad y \in S_\varepsilon{}'.$$

[4] At Fritz John får det til $s+1$ ikke-negative masser ($s \leq n$) i stedet for $n+1$ skyldes, at han smider dem væk, hvor massen er 0. Dermed opnår han, at $\lambda^0 \geq 0$, mens de resterende $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, $s \leq n$ er positive.

Det vil altså sige, at ulighedssystemet (*) ville holde skarpt væk fra 0 ikke blot i $x^0$ og $y \in S'$, men i en hel omegn $X_\varepsilon{}^0$ af $x^0$ og en hel 'omegn' $S_\varepsilon{}'$ af $S'$.[5] Eksistensen af $\varepsilon$ og $\delta$ viste han igen ved at føre et indirekte bevis. Han betragtede følger i $R$, $S$ og $S'$ og udnytte kompaktheden af $S$ samt kontinuiteten af $G$, $F'$ og $G'$.

For passende positive $\varepsilon$ og $\delta$ var John således i besiddelse af en vurdering af $F'$ og $G'$ for visse $y$ i $S'$. For at få en vurdering af $G$ uden for $S_\varepsilon{}'$ bemærkede han, at der findes en konstant $\mu = \mu(\varepsilon) > 0$, således at

$$G(x^0, y) > \mu$$

for alle $y$, der ligger i $S$ men uden for $S_\varepsilon{}'$, thi $G(x^0, y)$ er ikke-negativ i $S$, og $G$ er kun lig med 0 for $y \in S'$, og $G$ er kontinuert på $S$, som er kompakt.

Idet $x^0$ er et indre punkt i $R$, og $F$, $G$ er $C^1$ funktioner, fik John af Taylors formel med restled, at for tilstrækkelig lille, positivt $t$ er

$$F(x^0 + tz) = F(x^0) + tF'(x^0 + \theta tz, z)$$

$$G(x^0 + tz, y) = G(x^0, y) + tG'(x^0 + \theta tz, z, y)$$

hvor $\theta \in (0, 1)$.

John ønskede at vurdere på $F(x^0 + tz)$ og $G(x^0 + tz, y)$. Hertil valgte han $t$ så lille, at der dels gælder

$$t\sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i{}^2} < \varepsilon,$$

dels

$$t \cdot \max_{y \in S,\ x \in X_\varepsilon{}^0} |G'(x, z, y)| < \mu.$$

Dermed fik han $F(x^0 + tz)$ vurderet op ved $F(x^0)$ og $G(x^0 + tz, y)$ vurderede han $> 0$ for alle $y \in S_\varepsilon{}'$, og for $y$ i $S$. Uden for $S_\varepsilon{}'$, vurderede han $G(x^0 + tz, y) > 0$ ved hjælp af konstanten $\mu$ samt valget af $t$.

Hermed fik John, at punktet $x^0 + tz$ tilhører mulighedsområdet, samtidig med at $F(x^0 + tz) < F(x^0)$, hvilket strider mod antagelsen om, at $x^0$ er et minimumspunkt. Dette gav den ønskede modstrid, og John kunne konkludere, at ulighedssytemet (*) vitterlig ikke har nogen løsninger.

[5]John definerede disse omegne på følgende måde: Lad $S_\varepsilon{}'$ betegne mængden af alle punkter fra $S$, som har afstand $\leq \varepsilon$ fra et punkt i $S'$, og lad $X_\varepsilon{}^0$ være mængden af alle punkter i $R$, som har afstand $\leq \varepsilon$ til $x^0$ [John, 1948, s.189].

## Anvendelserne

Anden halvdel af artiklen er viet to geometriske anvendelser. Idet disse anvendelser er vigtige i diskussionen om Fritz Johns arbejde i forhold til ikke-lineær programmering, samt viser sig at afsløre en hel del om den kontekst, Johns arbejde blev til i, vil jeg her redegøre ganske kort for de to anvendelser.

### Kugle med minimal radius

Den første anvendelse drejer sig om mindste, afsluttede kugle indeholdende en begrænset mængde $S$ i $\mathbf{R}^m$. Med mindste kugle mente John en kugle med minimal radius. Han var ikke interesseret i at vise *eksistensen* af en sådan afsluttet kugle med mindste radius, idet han vidste fra et arbejde af Blumenthal og Wahlin, at en sådan findes i det tilfælde, hvor $S$ indeholder mere end ét punkt [Blumenthal og Wahlin, 1941]. Fritz John valgte da også straks at antage, at $S$ indeholder mindst to forskellige punkter.

John oversatte problemet, så sætningen om nødvendige betingelser for eksistens af minimum under ulighedsbibetingelser kunne komme i sving ved at karakterisere kugler i $\mathbf{R}^m$ på følgende måde:

> En kugle i $\mathbf{R}^m$ er givet ved $x = (x_1, \dots, x_{m+1})$, hvor $(x_1, \dots, x_m)$ er kuglens centrum, mens $x_{m+1}$ er kvadratet på kuglens radius. Den funktion, der skal minimeres, er da
>
> $$F(x) = x_{m+1},$$
>
> hvor minimum skal søges blandt mængden af alle $x$ opfyldende ulighederne
>
> $$G(x, y) = x_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2 \geq 0 \quad \text{for alle } y \in S.$$

Ulighedsbetingelserne sikrer, at der kun kan komme kugler i betragtning, som opfylder, at ligegyldigt hvilket punkt $y \in S$ der kigges på, så vil $y$'s afstand ind til kuglens centrum $(x_1, \dots, x_m)$ være mindre end kuglens radius $x_{m+1}$, altså minimum søges blandt kugler, der indeholder $S$.

I bibetingelserne erstattede John $S$ med $\overline{S}$, idet enhver afsluttet kugle der indeholder $S$, også vil indeholde afslutningen $\overline{S}$. Idet der findes et minimumspunkt $x^0$, gav sætningen om nødvendige betingelser for minimum John, at der også findes $s$ punkter $(s \leq m + 1)$

$$y^1, \dots, y^s \in S,$$

samt $s+1$ skalarer

$$\lambda_0, \ldots, \lambda_s,$$

således at:

$$(*) \qquad \lambda_0 = \sum_{r=1}^{s} \lambda_r, \qquad \sum_{r=1}^{s} \lambda_r ({x^0}_i - {y^r}_i) = 0 \;\text{ for } i = 1, \ldots, m$$

og

$$(**) \qquad {x^0}_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} ({x^0}_i - {y^r}_i)^2 = 0 \;\text{ for } r = 1, \ldots, s$$

samt endelig

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_s > 0,$$

hvor (*) følger af, at funktionen

$$\Phi(x) = \lambda_0 F(x) - \sum_{r=1}^{s} \lambda_r G(x, y^r)$$

har en kritisk værdi i $x^0$, mens (**) følger af, at de $s$ $y$-punkter alle giver aktive bibetingelser.

Fra disse betingelser, som nødvendigvis må være opfyldt i dette tilfælde, udledte John, dels at $\lambda_0 > 0$, og dermed er der tale om det, Karush ville kalde et 'normalt' tilfælde[6], dels at enhver kugle, som indeholder punkterne $y^1, \ldots, y^s$, har radius $\geq \sqrt{{x^0}_{m+1}}$, hvor '=' kun gælder, hvis kuglens centrum er $({x^0}_1, \ldots, {x^0}_m)$. Herfra udledte Fritz John yderligere, at den mindste kugle, som indeholder $S$, er entydigt bestemt og er den mindste kugle indeholdende punkterne $y^1, \ldots, y^s \in \overline{S}$.

Derudover benyttede John de nødvendige betingelser til at regne på forholdet mellem diameteren $D$ for $S$ og radius $R$ for den mindste kugle indeholdende $S$.

## Ellipsoide med minimalt rumfang

Kuhn brevvekslede med Fritz John under forberedelserne til udarbejdelsen af hans historiske essay i ikke-lineær programmering. Ifølge Kuhn fortalte John i den anledning, at baggrunden for det arbejde, der førte til 'Kuhn-Tuckers'

[6]Se s.168.

sætning, var et forsøg på at vise, at randen af en kompakt, konveks mængde $S$ i $\mathbf{R}^m$ ligger mellem to homotetiske ellipsoider [Kuhn, 1991, s.93], [Kuhn, Interview]. I den anden anvendelse viser John dette resultat, og nedenstående citat er det første tegn i artiklen på, at anvendelserne spiller en anden rolle end blot som illustration af hans sætning om nødvendige betingelser for et minimum under ulighedsbibetingelserne. Anvendelserne har en berettigelse i sig selv:

> *We are here again more interested in deriving significant properties of the minimum ellipsoid than in actually "determining" it in terms of $S$.* [John, 1948, s.199]

Han antog derfor også, at den mængde $S$, der er tale om, ikke er indeholdt i en hyperplan, thi med denne forudsætning kan det nemt vises, at der eksisterer en ellipsoide med mindste rumfang indeholdende $S$ [John, 1948, s.198]. På samme måde som i tilfældet med kuglen 'oversatte' John problemet til et problem om at minimere en funktion under visse ulighedsbibetingelser givet ved en parameter $y$. Idet eksistensen af en minimumsellipsoide er afklaret, gælder de nødvendige betingelser, og John kunne som i det tidligere eksempel vise, at skalaren $\lambda_0$ er positiv, og han er dermed igen i et normalitetstilfælde. Han var ud fra de nødvendige betingelser i stand til at regne sig frem til, at

> *... the ellipsoid of least volume containing $S$ is at the same time the ellipsoid of least volume containing the points $y^1, \ldots, y^s$ of the boundary of the convex hull of $S$, where $s \leq \frac{m(m+3)}{2}$.* [John, 1948, s. 201]

Herfra fortsatte han med at udlede generelle sætninger om afsluttede, konvekse mængder:

> *If $K$ is the ellisoid of smallest volume containing a set $S$ in $E_m$ [$\mathbf{R}^m$], then the ellipsoid $K'$ which is concentric and homothetic to $K$ at the ratio $1/m$ is contained in the convex hull of $S$.* [John, 1948, s. 202]

Herfra fik han, at

> *any closed convex surface lies between two concentric homothetic ellipsoids of ratio= $\frac{1}{m}$.* [John, 1948, s. 202]

# Motivation og inspiration

Den titel Fritz John gav artiklen, samt det formål[7] han indledte sin introduktion med, efterlader det indtryk, at han var interesseret i samme slags spørgsmål som Karush. Dette indtryk forstærkes yderligere i resten af Johns introduktion, idet det fremgår, at han havde visioner for videreudviklingen af problemstillingen:

> *From the point of view of applications it would seem desirable to extend the method used here to cases, where the functions involved are not necessarily differentiable, or where they do not depend on a finite number of independent variables.* [John, 1948, s.187]

Det er lidt underligt, synes jeg, at han i titel og introduktion så stærkt fremhæver det resultat, der to år senere blev kendt som Kuhn-Tuckers sætning. For det første var det 'program', som John lagde op til i sin introduktion, allerede udført i Chicago i 1930'erne. Den udvidelse af problemstillingen, som han omtalte i slutningen af introduktionen, hører under variationsregning med uligheder som bibetingelser, og i lyset af hvor kendt 'Chicago skolen' i variationsregning var på det tidspunkt, er det usandsynligt, at John ikke skulle have haft kendskab til dette arbejde, hvis hans interesse lå inden for variationsregning. For det andet er der i Johns artikel ikke en eneste henvisning til variationsregning eller til artikler inden for variationsregning. Det kan ikke have været hans hensigt, at dette arbejde skulle betragtes som et bidrag til variationsregning.

Det skal nok snarere opfattes som et bidrag til konveksitetsteorien. John har selv givet udtryk for, at hans inspiration og motivation for det foreliggende arbejde skal søges i artiklens to anvendelser, og de kommer begge to fra konveksitetsteorien. Det fremgår af henvisningerne i artiken, at John tidligere havde beskæftiget sig med spørgsmål i relation til disse, dels i et arbejde fra 1936 dels i en artikel publiceret i 1942 [John, 1936, 1942]. I den første betragtede han spørgsmålene for $m = 2$, det vil sige i $\mathbf{R}^2$, og i den anden for generelle $m$. Dertil kommer, at John var bekendt med Felix Behrend, som han havde mødt i Cambridge, England i 1934. Behrend havde i to artikler fra hhv. 1937 og 1938 gennemarbejdet problemstillingen for $m = 2$ [Behrend, 1937, 1938]. En af Johns studerende ved *University of Kentucky*, Olin B. Ader, behandlede problemstillingen for $m = 3$ i artiklen *An Affine Invariant of Convex Regions*, et arbejde som blev udført under Johns vejledning [Ader, 1938].

[7]Citeret s.179.

Formålet med de to anvendelser var ikke at *bestemme* minimumspunkter, de tjente snarere til udledelse af generelle sætninger om afsluttede, konvekse mængder og deres relationer til ellipsoider.

Et sidste argument for, at Johns arbejde rettelig hører hjemme i konveksitetsteorien, er karakteren af de henvisninger, der er i artiklen. Mens der i første del næsten ingen henvisninger er, er der masser af henvisninger i anden del, og de er alle til konveksitetsteori.

# Konklusion

Hvilken status har da denne udvidelse af Lagranges multiplikatorregel i Fritz Johns arbejde? Han var generelt set ikke interesseret i ekstremumsbestemmelser for funktioner af endelig mange variable underlagt ulighedsbibetingelser, hvilket i øvrigt også kan ses af, at han aldrig senere udviklede de værktøjer eller teorier, som han pegede på i artiklens introduktion. Han har udelukkende benyttet det som et redskab til at udlede generelle resultater om konvekse mængder, således som det klart fremgår i hans sidste anvendelse om mindste ellipsoide.

Den måde, John formulerede sætningen om nødvendige betingelser for ekstremum på, understøtter påstanden om, at resultatet udelukkende havde interesse som værktøj for andre, mere interessante problemstillinger inden for konveksitetsteori. Hans 'parametermængde' er for eksempel helt oplagt dikteret af de to anvendelser. Formuleringen af sætningen er skruet sådan sammen, at den kan bruges direkte på de to geometriske anvendelser. Det forklarer også, hvorfor John overhovedet ikke kommer i berøring med det fænomen, der i Kuhns og Tuckers fremstilling hed *constraints qualification*, og i Karushs hed *normalitets* betingelser. De to anvendelser, John behandlede, rejste overhovedet ikke dette problem. De er nemlig begge to eksempler på det 'normale' tilfælde, altså for dem begge gælder, at multiplikatoren hørende til den funktion, der skal optimeres, er forskellig fra 0.

John har sandsynligvis ikke betragtet sit arbejde som et bidrag til det, der senere blev ikke-lineær programmering. Han har tilsyneladende heller aldrig gjort krav på prioritetsanerkendelse, efter at Kuhn og Tucker blev berømte på deres resultat. Det var først med Kuhns historiske artikel, hvori Kuhn '*intend to set the record straight*', at Johns resultat blev almindeligt kendt og optaget i rækken af klassikere inden for ikke-lineær programmering.

Det står stadig tilbage at forklare, hvorfor Fritz John valgte denne fremstillingsform i artiklen med hovedvægt på sætningen i stedet for på anvendelserne. Det kan være et udtryk for en typisk matematisk fremstillingsform: først præsenteres det generelle resultat og derefter anvendelser heraf. Det kan også være, at han har haft en ide om, at der var anvendelsesmuligheder. I introduktionen motiverede han resultat ud fra et muligt anvendelses øjemed '*From the point of view of applications ...*' [John, 1948, s.187]. Det kan også være, at forklaringen ligger i afvisningen fra tidsskriftet *Duke Mathematics Journal.*[8]

[8]Ved henvendelse til tidsskriftet fik jeg oplyst, at der ikke fandtes *referee* rapporter fra så lang tid tilbage.

# Kapitel 11

# Analytisk mekanik

Fritz John karakteriserede sin artikel som en udvidelse af Lagranges multiplikatorregel til situationer, hvor bibetingelserne er givet ved uligheder i stedet for ligninger. I Karushs og Kuhns og Tuckers artikler fremkommer multiplikatorerne via Farkas' Lemma, der var det vigtigste hjælperedskab i deres beviser for nødvendige betingelser for eksistens af et minimum. Hvordan hænger disse elementer sammen historisk? Hvad er Lagranges multiplikatorregel, hvor kommer den fra, og hvad har den at gøre med Farkas' Lemma? Har man tidligere forsøgt at udvide Lagranges multiplikatorregel? Og hvis Kuhn-Tuckers sætning er en udvidelse af Lagranges multiplikatorregel, har den så været bevist endnu tidligere?

I dette kapitel vil jeg undersøge disse spørgsmål, og det vil blive klart, at svarene væver sig sammen og danner et mønster, der afspejler en historie, der bringer os ind i en helt ny verden - nemlig analytisk mekanik. Dette er egentlig ikke særlig overraskende, idet analytisk mekanik er et område, hvor man langt tilbage i tiden har behandlet problemstillinger, der minder om dem, der behandles i ikke-lineær programmering, nemlig ligevægtsproblemer for systemer underlagt bibetingelser givet ved ligninger. I dette kapitel vil det blive klart, hvordan denne historie udvidede sig til også at omhandle problemstillinger, hvor bibetingelserne var givet ved uligheder. Det vil blive afdækket, hvilken rolle Lagranges multiplikatorregel og Farkas' Lemma spillede heri, samt diskuteret, hvilke konsekvenser det får for ikke-lineær programmerings historie.

# Det virtuelle arbejdes princip - et mekanisk ligevægtsprincip

Det virtuelle arbejdes princip er et af de fundamentale principper i analytisk mekanik[1]. Det er et ligevægtsprincip for mekaniske systemer og siger, at et givet mekanisk system vil være i ligevægt, hvis og kun hvis det virtuelle arbejde af de anvendte kræfter er nul. Formuleret i nutidige termer kan man tænke sig, at der er givet et antal ydre kræfter $F_1^{(a)}, \ldots, F_n^{(a)}$, som virker på systemets punkter $P_1, \ldots, P_n$. Det virtuelle arbejde af kraften $F_i^{(a)}$ er da lig med prikproduktet $F_i^{(a)} \cdot \delta r_i$, hvor $\delta r_i$ er en virtuel forskydning af punktet $P_i$. En virtuel forskydning er en vilkårlig forskydning, som blot skal opfylde, at den ikke bryder de bindinger, der er på systemet. En sådan forskydning kaldes virtuel for at adskille den fra en faktisk forskydning af systemet, som kan foregå i et tidsinterval $dt$. En virtuel forskydning er således ikke nødvendigvis en naturlig bevægelse for systemet, men blot en 'tænkt' bevægelse, som dog skal opfylde de bindinger, systemet er underlagt. Det virtuelle arbejdes princip siger så, at betingelsen, for at systemet er i ligevægt, er, at det virtuelle arbejde af de ydre kræfter er nul:

$$F_1^{(a)} \cdot \delta r_1 + F_2^{(a)} \cdot \delta r_2 + \ldots + F_n^{(a)} \cdot \delta r_n = 0.$$

Det virtuelle arbejdes princip er formuleret for *reversible* forskydninger, det vil sige for systemer, hvor bibetingelserne er sådan, at hvis en virtuel forskydning $\delta r$ kan forekomme, så kan også den modsatte forskydning $-\delta r$ forekomme. Det betyder, at det mekaniske system udelukkende er underlagt bindinger, der kan formuleres som ligninger.

# Lagranges multiplikatorregel

Det virtuelle arbejdes princip eller *principe des vitesses virtuelles*, som det oprindelig blev kaldt, kan spores tilbage til Johann Bernoulli. Det blev senere udvidet og generaliseret af Lagrange i hans store værk *Mécanique analitique* fra 1788, hvori det indgår som et axiom. Lagrange formulerede også den såkaldte *Lagranges multiplikatorregel*, som var en metode til at finde en stabil ligevægt for et mekanisk system.

Lagrange betragtede et system af punkter med koordinaterne $x$,$y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$,..., underlagt et endeligt antal bibetingelser $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, hvor $L$, $M$, $N$,... er funktioner af de variable $x$,$y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$,... [Lagrange, 1788, s.69]. I den følgende redegørelse for Lagranges ide vil jeg indskrænke

[1]Dette afsnit bygger på [Goldstein, 1981], [Feynman et al, 1964] samt [Lanczos, 1986].

mig til at betragte et system bestående af et enkelt punkt $p = (x, y, z)$ påvirket af en kraft $P = (X_P, Y_P, Z_P)$ og underlagt en enkelt bibetingelse $L = 0$.[2] Størrelsen, $\lambda dL$, ($\lambda$ er en konstant) har en naturlig fysisk fortolkning som 'bindingskræfter'. Inkluderes denne i systemet, bliver det totale moment

$$X_P\delta x + Y_P\delta y + Z_P\delta z + \lambda dL = 0,$$

hvor $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ er den virtuelle forskydning af punktet $p$.

Ved at inkludere bibetingelsen som en kraft, systemet er påvirket af, opnåede Lagrange et frit system, hvor $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ er uafhængige. Ligevægtsbetingelsen bliver da, at:

$$X_P\delta x + \lambda\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + Y_P\delta y + \lambda\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + Z_P\delta z + \lambda\frac{\partial L}{\partial z}\delta z = 0.$$

Idet $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ er uafhængige, bliver ligevægtsbetingelsen, at

$$(*) \quad X_P + \lambda\frac{\partial L}{\partial x} = 0,\ Y_P + \lambda\frac{\partial L}{\partial y} = 0,\ Z_P + \lambda\frac{\partial L}{\partial z} = 0,\ L = 0.$$

Lagrange gav ikke noget (matematisk) bevis for sin multiplikatorregel, men han udviklede den i forbindelse med mekaniske ligevægtsproblemer, og som sådan har den en oplagt fysisk fortolkning. For at systemet kan være i ligevægt, må bibetingelsen producere en kraft, som dels står vinkelret på fladen $L = 0$, dels afbalancerer kraften $P$. Det vil sige, at

$$\lambda(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z})$$

repræsenterer bindingskraften, og for at systemet er i ligevægt, det vil sige for at afbalancere $P$, skal (*) gælde.

Idet stabil ligevægt for et mekanisk system er ensbetydende med lokalt minimum for den potentielle energi[3], handler disse problemstillinger altså om ekstremum under bibetingelser givet ved ligninger, og i sin bog *Théorie des fonctions analytiques* fra 1797 formulerede og udledte Lagrange multiplikatorreglen for ekstremumbestemmelser under bibetingelser i den almindelige differential- og integralregning. I den kontekst vil man sige, at Lagranges multiplikatorregel giver en nødvendig betingelse for eksistensen af et ekstremum under bibetingelser givet ved ligninger.[4]

[2]Den følgende udlægning af Lagranges tekst bygger på [Fraser, 1992].

[3]I de tilfælde, hvor der eksisterer et potential, hvilket er tilfældet for konservative kræfter.

[4]For en nutidig formulering henvises til [Adams, 1995, s.722].

Lagrange formulerede også multiplikatorreglen for variationsregning i 1797, men gav dog ikke noget bevis for den på dette tidspunkt. Udledningen kom først i 1806 i *Leçons sur le calcul des fonctions*, hvori han i forbindelse med en udvidet behandling af variationsregning gav en detaljeret udledning af multiplikatorreglen [Fraser, 1996a, kap.4, s.12-13].

# En mand -og hans ulighed

I ikke-lineær programmering er bibetingelserne givet ved uligheder. Lagranges multiplikatorregel handler om ekstremum under bibetingelser givet ved ligninger og udprang af overvejelser vedrørende stabil ligevægt for mekaniske systemer underlagt bindinger givet ved ligninger, som igen er underordnet princippet om det virtuelle arbejde. Dette princip blev som nævnt formuleret for reversible forskydninger. Ulighederne kommer ind i billedet i 1798 med publiceringen af Fouriers artikel *Mémoire sur la statique contenant la démonstration du principe des vitesses virtuelles et la théorie des moments* [Fourier, 1798]. Her udvidede Fourier princippet til *irreversible* forskydninger, det vil sige til mekaniske systemer underlagt ulighedsbibetingelser. Denne udvidelse kaldes i dag for *Fouriers ulighed*, og det er, så vidt man ved, første gang der behandles problemer med ulighedsbibetingelser.

Man ved ikke, hvorfra Fourier fik inspirationen til denne udvidelse. Måske var det blot en grundig gennemlæsning af Lagranges *Mécanique analytique*[5], der gjorde ham opmærksom på, at Lagrange udelukkede forskydninger, der, selv om de ikke opfyldte bibetingelsesligningerne, *ikke* brød med systemets bindinger. Ostrogradsky formulerede det således i 1838:

> *..., ce grand géomètre a incomplètement énuméré les déplacements possibles dans la plupart des questions de la première partie de la Mécanique analytique, et il est facile de reconnaître que les déplacements qu'il a négligé de considérer, ne sont empêchés par aucune condition,....* [Ostrogradsky, 1834, s.130]

De forskydninger, Lagrange lod ude af betragtning, var præcis de irreversible forskydninger.

Fouriers formål med arbejdet var at udvide princippet til også at gælde for irreversible forskydninger. I stedet for 'det virtuelle arbejde' betragtede han *le moment de la force* [Fourier, 1798, s.479], hvilket blot resulterede i et

[5] I førsteudgaven af Lagranges værk om analytisk mekanik fra 1888 staves "analytisk" med i: *analitique*. I senere udgaver staves det med y: *analytique*.

fortegnsskift.[6] Fourier argumenterede sig i artiklen frem til følgende formulering af ligevægtsbetingelsen for systemer underlagt ulighedsbibetingelser:

> *Nous avons trouvé dans les articles précédents que la valeur du moment des forces qui se font équilibre se réduit toujours à zéro, ou, plus généralement, qu'elle est nulle ou positive.* [Fourier, 1798, s.494]

Den moderne formulering af Fouriers ulighed siger, at et system er i ligevægt, hvis og kun hvis det virtuelle arbejde af de ydre kræfter er mindre end eller lig med nul, det vil sige nul eller negativ.

Fouriers arbejde fra 1798 er interessant af to grunde. For det første inddrog han problemstillinger, hvori der indgår *uligheder* som bibetingelser, og for det andet førte denne udvidelse, Fouriers ulighed, som vi skal se, til nogle for ikke-lineær programmerings historie meget interessante resultater, som Cournot, Ostrogradsky og Farkas kom frem til.

## Cournot

Antoine-Augustin Cournot (1801-1877) er i dag kendt for at være den første, der benyttede sig af matematik i udledningen af økonomisk teori.[7] Hans uddannelsesmæssige baggrund ligger inden for matematik og fysik, og det er også her, hans vigtigste videnskabelige bidrag placerer sig. Han var bredt orienteret og publicerede inden for emner som differentialligninger, mekanik, sandsynlighedsregning, astronomi, filosofi og videnskabshistorie. Han opholdt sig i Paris, hvor han i 1829 blev *docteur ès sciences*. I årene 1823 til 1833 arbejdede han som anmelder på Baron de Férussacs *review* tidsskrift *Bulletin universel des sciences et de l'industrie*. Cournot var hovedsagelig optaget af administrative jobs, først som rektor for universitet i Grenoble, derefter som rektor i Dijon.

I 1827 publicerede han artiklen *Extension du principe des vitesses virtuelles au cas où les conditions de liaison du système sont exprimées par des inégalités* [Cournot, 1827]. Heri udledte Cournot Fouriers ulighed på ny, det vil sige, han udvidede de virtuelle hastigheders princip til mekaniske systemer underlagt ulighedsbibetingelser. Han har tilsyneladende været uvidende om Fouriers arbejde fra 1798, men han kendte til et andet arbejde af Fourier om uligheder, *Solution d'une question particulière du calcul des inégalités* fra 1826 [Fourier, 1826], som han anmeldte i Férussacs tidsskrift i 1826 [Cournot, 1826].

[6] Se [Prékopa,1980, s.530], [Franksen, 1985I, s.143].

[7] De biografiske oplysninger er fra [Prékopa, 1980] og [Franksen, 1985III].

Cournots artikel falder i to dele: Først udledte han Fouriers ulighed ved at inddrage bibetingelserne, idet han ophævede en bibetingelse ved at erstatte den med en kraft [Cournot, 1827, s.167-168]. I anden del behandlede han et konkret, mekanisk eksempel fra Lagranges *Mécanique analitique*, men formulerede det med ulighedsbibetingelser. For dette eksempel udledte Cournot nødvendige betingelser for ligevægt og indså, at multiplikatorerne var ikke-negative. For dette konkrete eksempel udvidede Cournot således Lagranges multiplikatorregel til ulighedsbibetingelser [Cournot, 1827, s.169-170].[8]

# Ostrogradsky

Mikhail Vasilevich Ostrogradsky (1801-1862) behandlede Fouriers ulighedsprincip i to artikler, begge publiceret i 1838, men den ene blev præsenteret for akademiet i Paris allerede i 1834.

Ostrogradsky var en berømt, matematisk orienteret fysiker fra Rusland. Han blev født i Ukraine i 1801, men rejste i 1822 til Paris for at studere. Her tilbragte han årene 1822 til 1828 og kom via de offentlige møder i akademiet i kontakt med den tids elite inden for matematik og fysik, folk som Cauchy og Fourier. Især Fourier fik stor betydning for den unge Ostrogradsky, der senere omtalte Fourier som sin mentor [Franksen, 1985I, s.141]. Ostrogradsky er i dag mest kendt for sit arbejde inden for potentialteori og partielle differentialligninger, men det, der er af interesse her, er to artikler, han skrev om ligevægt for mekaniske systemer. Den ene har titlen *Considérations générales sur les moments des forces* [Ostrogradsky, 1834]. Den blev præsenteret for akademiet i St. Petersborg i 1834, men blev først publiceret i 1838. Den anden, *Mémoire sur les déplacements instantanés des systèmes assujettis a des conditions variables* [Ostrogradsky, 1838], behandler dynamiske systemer. Heri anklager Ostrogradsky *géomètres* for blot at reproducere Lagranges arbejde, der er intet nyt kommet siden *Mécanique analytique*. Han er den eneste, såvidt han ved, der har bidraget med lidt nyt i artiklen fra 1834, og med denne artikel fra 1838 vil han udlede de generelle ligninger for dynamik [Ostrogradsky, 1838, s.565]. I det følgende vil jeg behandle de dele af den første af de to artikler, som er relevante for Kuhn-Tuckers sætning.

## Ostrogradskys artikel fra 1834

Formålet med Ostrogradskys artikel var med hans egne ord, at:

[8] For yderligere diskussion af Cournots arbejde henvises til [Prékopa, 1980] og [Franksen, 1985III].

*..., d'exposer l'analyse relative à l'emploi du principe des vîtesses virtuelles considéré dans toute sa généralité et de compléter la solution de plusieurs questions traitées dans la première partie de la Mécanique analytique.* [Ostrogradsky, 1834, s.130]

Han ville med andre ord gøre Lagranges' arbejde tidssvarende.

Ostrogradsky henviste ikke til Fourier, men der er ingen tvivl om, at han kendte Fouriers arbejde fra 1798, hvori Fourier præsenterede denne udvidelse af princippet. Dels er der et sammenfald af formuleringer, der, som oprindeligt påpeget af Franksen [Franksen, 1985I, s.140], ikke kan være en tilfældighed, dels var der en tæt forbindelse mellem Fourier og Ostrogradsky. At Ostrogradsky ikke henviste til Fourier kan skyldes, at Ostrogradsky på dette tidspunkt anså denne udvidelse for almen viden. Han undrede sig for eksempel over, at Lagrange ikke inddrog den i sin nyeste udgave af *Mécanique analytique* [Ostrogradsky, 1834, s.130].

Ostrogradsky lod $P$, $Q$, $R, \ldots$ betegne de kræfter, der virker på et system. Det totale moment i forhold til en eller anden forskydning er da, som hos Fourier, lig med

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots .$$

Ligevægtsbetingelsen for systemet er

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots \leq 0$$

for enhver tilladt forskydning. Han lod derefter $L$, $M, \ldots$ betegne systemets bindinger, det vil sige de bibetingelser, der adskiller tilladte forskydninger fra forskydninger, der ikke kan forekomme uden at bryde systemets bindinger. I Lagranges tilfælde var $dL = 0$, men da Ostrogradsky betragter bibetingelser, der kan beskrives som uligheder, kan han ikke slutte $dL = 0$, $dM = 0, \ldots$, men blot at $dL$, $dM, \ldots$ kun kan skifte fortegn i det tilfælde, hvor man går fra tilladte til ikke tilladte forskydninger [Ostrogradsky, 1834, s.131].

Ostrogradsky argumenterede derefter for, at man kan lave et koordinatskift. Han indførte såkaldte generaliserede koordinater. I stedet for at betragte $dp$, $dq$, $dr, \ldots$ introducerede han nogle andre variationer $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta, \ldots$, som er funktioner af $dp$, $dq$, $dr, \ldots$, og hvis antal naturligvis skal være det samme som antallet af de oprindelige variable. Idet nu $dL$, $dM, \ldots$ er funktioner af $dp$, $dq$, $dr, \ldots$, kan man jo, argumenterede Ostrogradsky, lade dem være de første af de nye, generaliserede koordinater[9]. Ved at omskrive det hele til disse nye koordinater fik han det totale moment skrevet på formen

$$\lambda dL + \mu dM + \ldots + Ad\xi + Bd\eta + Cd\zeta + \ldots ,$$

[9]Heraf følger, at Ostrogradskys udledning kun kan bruges på systemer, hvor antallet af bibetingelser ikke overstiger antallet af variable.

og ligevægtsbetingelsen er da, at

$$\lambda dL + \mu dM + \ldots + Ad\xi + Bd\eta + Cd\zeta + \ldots \leq 0$$

for enhver tilladt forskydning [Ostrogradsky, 1834, s.131].

Ostrogradsky pointerede herefter, at $dL$, $dM, \ldots$ nok kan blive lig med 0, men de kan ikke skifte fortegn, hvorimod $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta, \ldots$ er fuldstændigt uafhængige. Derfor kan man ved at variere på disse opnå, at det totale moment

$$\lambda dL + \mu dM + \ldots + Ad\xi + Bd\eta + Cd\zeta + \ldots$$

kan blive både positivt og negativt. Det betyder, konkluderede Ostrogradsky, at det totale moment kun kan undgå fortegnsskift under samtlige tilladte forskydninger, hvis $Ad\xi + Bd\eta + Cd\zeta + \ldots = 0$ for alle $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta \ldots$, hvilket kun kan forekomme, hvis $A = B = C = \ldots = 0$.

Dermed opnåede Ostrogradsky, at det totale moment $Pdp + Qdq + Rdr + \ldots$ er lig med $\lambda dL + \mu dM + \ldots$, altså

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = \lambda dL + \mu dM + \ldots$$

for alle tilladte forskydninger. Da $dL$, $dM, \ldots$ ikke kan skifte fortegn, kan ligevægtsbetingelsen (det totale moment mindre end eller lig med nul) kun forekomme, hvis skalarerne $\lambda$, $\mu, \ldots$ har modsat fortegn af de tilhørende bindinger $dL$, $dM, \ldots$ [Ostrogradsky, 1834, s.132].

Ostrogradsky endte således med at konkludere, at

> *... les conditions de l'équilibre d'un système quelconcque seront exprimées*
>
> $1^{mo}$ *par l'équation*
>
> $$0 = Pdp + Qdq + Rdr + \ldots + \lambda dL + \mu dM + \ldots$$
>
> *qui doit avoir lieu pour tous les déplacemens imaginables,*
>
> $2^{do}$ *par la condition que les quantités* $\lambda$, $\mu, \ldots$ *aient respectivement les mêmes signes que les différentielles* $dL$, $dM, \ldots$ *pour les déplacemens possibles.* [Ostrogradsky, 1934, s.132-133]

Er man i den situation, at der eksisterer et potential $V$, det vil sige, hvis man har, at $P = -\frac{\partial V}{\partial p}$, $Q = -\frac{\partial V}{\partial q}$, $R = -\frac{\partial V}{\partial r}, \ldots$, kan man i dag sige, at det at finde ligevægt er det samme som at minimere den potentielle energi $V$. Et argument for, at Ostrogradsky her både har formuleret og argumenteret for det, der i dag kaldes 'Kuhn-Tuckers' sætning, således som Franksen hævder i [Franksen, 1985I,II], må kræve, at man har en sådan fortolkning og 'oversættelse' af Ostrogradskys arbejde i baghovedet. Fra et matematikhistorisk synspunkt vil jeg mene, det er noget af en overfortolkning at tillægge Ostrogradsky Kuhn-Tuckers sætning.

# Farkas

Det blev den ungarske fysiker Gyula Farkas (1847-1930), der bragte grundlaget i orden for denne udvidelse af Lagranges multiplikatorregel til ligevægt for mekaniske systemer underlagt ulighedsbibetingelser. Farkas, som ofte ses omtalt med fornavnet *Julius*, blev født den 28. marts 1847 i Sárosd i Ungarn [Brentjes, 1976a, s.21]. Farkas kan videnskabeligt set bedst karakteriseres som teoretisk fysiker. Hans matematiske arbejder, som Farkas' Lemma om lineære ulighedssystemer, udsprang af fysiske problemstillinger.

Henvisninger til Farkas' Lemma er for det meste til hans berømte artikel publiceret i 1901, *Theorie der einfachen Ungleichungen*, hvori han beviste Farkas' Lemma om lineære ulighedssystemer [Farkas, 1901]. Men denne artikel er blot en forbedret og omarbejdet udgave af tidligere artikler, der generelt set handler om det algebraiske grundlag for Fouriers ulighedsprincip i mekanik.

Den første af disse artikler *Über die anwendungen des mechanischen Princips von Fourier* blev publiceret i 1895 i *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn* [Farkas, 1895]. Her formulerede Farkas for første gang det resultat, der senere gik over i historien som Farkas' Lemma. Farkas' udgangspunkt i artiklen er analytisk mekanik. Han redegjorde for forskellen mellem det almindelige ligevægtsprincip for reversible forskydninger og Fouriers ulighedsprincip for irreversible forskydninger, og han gav i indledningen en meget interessant kommentar til disse to principper:

> ... *die Anwendung des Gleichheits-Princips seit Lagrange* [ist] *bloß eine Sache der reinen Analysis und insbesondere ein Problem der Auflösung von Gleichungen,...* .
>
> *Mit dem Ungleichheits-Princip ist es nicht so weit gekommen.* [Farkas, 1895, s.264]

Han havde således en klar erkendelse af, at Fouriers ulighedsprincip måtte kunne behandles i en matematisk ramme af homogene, lineære uligheder. Han nævnte Ostrogradskys arbejde, som han således var bekendt med, men bemærkede blot, at Ostrogradskys metode kun kan benyttes i de tilfælde, hvor antallet af bindinger ikke overstiger antallet af variable.

Farkas' mål var at frembringe en generel metode, som kunne bruges på alle typer af problemer, ligegyldigt hvordan forholdet mellem antal bibetingelser og antal variable var. Han formulerede det selv på følgende måde:

> *Der Hauptzweck vorliegender Arbeit ist zu erweisen, dass mit einer passenden Modifikation die Methode der Multiplikatoren von*

> *Lagrange auch auf das Fourier'sche Princip übertragen werden kann.* [Farkas, 1895, s.266]

Et hovedformål, der i forbløffende grad minder om Fritz Johns!

Farkas' arbejde adskiller sig fundamentalt fra Cournots og Ostrogradskys, ikke blot hvad angår generaliteten, men især fordi han bekymrede sig om det matematiske grundlag for de fysiske udledninger af ligevægtsbetingelserne. Han startede nemlig sin artikel med

> *... eine algebraische Einleitung über die homogenen linearen Ungleichheiten als mathematische Grundlage der weiteren Betrachtungen.* [Farkas, 1895, s.266]

Denne 'algebraiske indledning' består af det, der i dag kaldes Farkas' Lemma.

## Farkas' Lemma

Farkas betragtede et system af homogene, lineære uligheder:

$$\begin{aligned} R_1 = A_1 u + B_1 v + \dots &\geq 0 \\ R_2 = A_2 u + B_2 v + \dots &\geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{aligned}$$

hvor $u$, $v, \dots$ er de ubekendte. Han tilføjede så en ekstra ulighed

$$(*) \qquad R_0 = A_0 u + B_0 v + \dots \geq 0.$$

Han kaldte uligheden (*) ny i forhold til ulighedssystemet, hvis løsningsmængden til ulighedssystemet ændrer sig, hvis (*) inkluderes i ulighedssystemet. Hvis enhver ulighed i ulighedssystemet er ny i forhold til det resterende ulighedssystem, kaldte Farkas ulighedssystemet for et stamsystem.

Farkas' Lemma sagde så, at hvis en ulighed (*) ikke er ny i forhold til ulighedssystemet, så findes ikke-negative multiplikatorer $\lambda_1$, $\lambda_2, \dots$, således at

$$R_0 = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \dots.$$

Dette resultat anvendte han derefter på et mekanisk system underlagt bibetingelserne

$$\begin{aligned} \sum F\delta q &= 0, \quad \sum G\delta q = 0, \dots \\ \sum S\delta q &\geq 0, \quad \sum T\delta q \geq 0, \dots, \end{aligned}$$

hvor $\delta q$ repræsenterer de virtuelle forskydninger.

Ifølge Fouriers ulighedsprincip er ligevægtsbetingelsen, at det totale moment er ikke-positivt for enhver tilladt forskydning:

$$\sum Q\delta q \leq 0.$$

For at kunne benytte sit algebraiske resultat om homogene, lineære uligheder omskrev Farkas problemstillingen til udelukkende at omhandle uligheder:

$$\begin{array}{rcl}
\sum F\delta q & \geq & 0,\ \sum G\delta q \geq 0, \ldots \\
-\sum F\delta q & \geq & 0,\ -\sum G\delta q \geq 0, \ldots \\
\sum S\delta q & \geq & 0,\ \sum T\delta q \geq 0, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(**) \qquad - & \sum & Q\delta q \geq 0.
\end{array}$$

En nødvendig betingelse for ligevægt er således, at uligheden (**) skal være opfyldt for alle tilladte forskydninger $\delta q$, det vil sige for alle forskydninger opfyldende ulighedssystemet bestående af bibetingelserne. Farkas kunne da bruge sit lemma til at slutte, at dette kun er tilfældet, hvis der findes ikke-negative multiplikatorer, således at koefficienterne $Q$ kan skrives som lineære kombinationer af koefficienterne $F$, $G, \ldots$, $-F$, $-G, \ldots$, $S$, $T, \ldots$. Idet Farkas kaldte disse ikke-negative multiplikatorer for

$$\phi',\ \psi', \ldots, \phi'',\ \psi'', \ldots, \lambda,\ \mu, \ldots,$$

fik han således, at der skal gælde, at

$$\begin{aligned}
-Q &= \phi' F + \psi' G + \ldots - \phi'' F - \psi'' G - \ldots + \lambda S + \mu T + \ldots \\
&= (\phi' - \phi'')F + (\psi' - \psi'')G + \ldots + \lambda S + \mu T + \ldots.
\end{aligned}$$

Farkas indså således klart, at det matematisk set handler om homogene, lineære uligheder. Det er også dette aspekt, han fokuserede på i de næste artikler, han skrev om emnet, hvor han bl.a. viste nogle hjælpesætninger, som han ikke viste i den første artikel fra 1895 [Farkas, 1897, 1899]. I det tredje arbejde fra 1899 forenklede han beviset for Farkas' Lemma [Farkas, 1899]. Det hele mundede ud i *Theorie der einfachen Ungleichungen* fra 1901, som er en afhandling om lineær ulighedsteori, et på dette tidspunkt stort set ikke-eksisterende emne [Farkas, 1901]. Det er også til dette arbejde, at alle senere referencer henviser.

# Diskussion

Fourier udvidede ligevægtsproblemer i mekanik til ligevægtsproblemer for mekaniske systemer underlagt ulighedsbibetingelser. Dermed blev der skabt en åbning for udvikling af teorier omhandlende nogle af de problemer, som ikke-lineær programmering beskæftiger sig med. Matematisk set drejer det sig bl.a. om ulighedsteori, og Fourier var, så vidt det vides, den første, der forsøgte at udlede en matematisk teori for uligheder. Man ved ikke med sikkerhed, hvad der inspirerede ham hertil, men det er højst tænkeligt, at hans udvidelse af det virtuelle arbejdes princip inden for mekanik fungerede som inspirationskilde. Grattan-Guinness peger også på Fouriers opmålingsarbejde i Ægypten som en mulig inspirationskilde [Grattan-Guinness, 1970, s.361]. Fourier publicerede i 1820'erne sit arbejde om uligheder, et arbejde der på ingen måde var færdigt [Fourier, 1826, 1827a, 1827b, 1831]. I hans sidste bog *Analyse des équations déterminées*, som blev trykt efter hans død, findes en synopsis, hvori han beskrev sine intentioner for det samlede værk [Fourier, 1831]. Det var hans mening, at bogen skulle bestå af syv bøger, hvoraf

> *... le septième et dernier livre, ou expose les principes de l'analyse des inégalités. Cette partie de notre ouvrage concerne un nouveau genre de questions qui offrent des applications variées à la géométrie, à l'analyse algébrique, à la mécanique et à la théorie des probabilités.* [Fourier, 1831, s.75]

Han døde, inden han kunne færdiggøre arbejdet, der kun består af de to første af de syv planlagte bøger. I Fouriers samlede værker kan man af Darbouxs kommentar få et indtryk af, hvordan man i 1890, altså 60 år senere, så på Fouriers visioner for ulighedsteori. Darboux fandt, at Fourier tillagde denne nye teori '*une importance qu'il est permis, aujourd'hui, de trouver un peu exagérée*' [Fourier, 1890, side VI].

Grattan-Guinness fortolker Fouriers visioner om en *nouveau genre de questions* som en forløber for lineær programmering :

> *Fourier had a complete understanding of the basic ideas of linear programming, which he regarded as "a new type of question" referred to as "the analysis of inequalities".* [Grattan-Guinness, 1994, s.49]

Denne udlægning af Fouriers arbejde skal nok ses i lyset af, at uligheds- og konveksitetsteori udgør en væsentlig del af det matematiske grundlag for såvel lineær som ikke-lineær programmering. Men ligefrem at tillægge Fourier en fuldstændig forståelse for ideerne bag lineær programmering er nok at tage munden for fuld.

Den franske matematikhistoriker Hourya Sinaceur fortolker Fouriers ulighedsarbejde som forhistorie til en helt anden matematisk disciplin, nemlig algebraisk geometri:

> *Real algebraic geometry may be viewed as the 20th-century realization of the new analysis Fourier envisioned.* [Sinaceur, 1998, s.11]

Fouriers arbejde og dets betydning har således været fortolket ret forskelligt alt efter hvilke 'briller', det er blevet læst med.

Jeg finder Fouriers ulighedsarbejde interessant, fordi det giver anledning til den udvidelse af analytisk mekanik, som jeg har gjort rede for i dette kapitel. Ostrogradskys og Farkas' arbejder har rod direkte i Fouriers arbejde. Franksen og Prékopa har i deres artikler fortolket Cournots, Ostrogradskys og Farkas'[10] behandling af ligevægtsspørgsmålet som et spørgsmål om at minimere den potentielle energi (i situationer, hvor der eksisterer et potential) [Franksen, 1985I,II], [Prékopa, 1980]. Det må være i et sådan lys, man skal forstå deres konklusioner om, at Kuhn-Tuckers sætning i ikke-lineær programmering kan findes hos Cournot, Ostrogradsky og Farkas. Det er min opfattelse, at en sådan konklusion kun kan nås gennem anakronistisk historieskrivning.

Disse tidlige arbejder af Fourier, Cournot, Ostrogradsky og Farkas havde ikke nogen direkte indflydelse på udviklingen af ikke-lineær programmering. Farkas' Lemma optræder ganske vist som et vigtigt hjælpeværktøj, men i en version hvor det er fuldstændigt løsrevet fra analytisk mekanik og ligevægtsproblemer. En løsrivelse der blev startet af Farkas selv i hans artikel fra 1901 *Theorie der einfachen Ungleichungen*, hvor både titel og indhold udelukkende refererer til abstrakt ulighedsteori [Farkas, 1901]. Kun i introduktionen er der ganske få bemærkninger om, at en undersøgelse af Fouriers ulighedsprincip i analytisk mekanik kræver kendskab til homogene lineære uligheder.

[10] Franksen ser kun på Cournot og Ostrogradsky.

# Kapitel 12

# Teorier for multiple opdagelser

Fænomenet *multiple opdagelser* er ikke nogen ny opfindelse i naturvidenskabshistoriens historie. Det har været observeret og diskuteret langt tilbage i tiden og er blevet taget op igen med jævne mellemrum, hvilket har fået sociologen Robert K. Merton til at karakterisere hypotesen om multiple opdagelser som en '*self-exemplifying hypothesis*' [Merton, 1961, s.352]. Såvel videnskabshistorikere som videnskabssociologer har funderet over og behandlet multiple opdagelser, men hvor historikerne som regel har haft en historisk interesse er sociologernes ærinde som oftest at udvikle en sociologisk teori for naturvidenskabernes udvikling.

Mit formål med at inddrage et aspekt af multiple opdagelser i forbindelse med Kuhn-Tuckers sætning har været at forstå baggrunden for den historiske kendsgerning, at et matematisk resultat (Kuhn-Tuckers sætning) på et givet tidspunkt og i en given sammenhæng kan blive berømt og give anledning til et nyt matematisk forskningsområde; mens et tilsvarende resultat, der af fagfolkene opfattes som samme resultat, udviklet på næsten samme tidspunkt men i en anden sammenhæng ikke udløste nogen reaktion.

Min historiske beskrivelse og analyse af de forskellige beviser for 'Kuhn-Tuckers' sætning kan opfattes som et *case-study* af en multipel opdagelse i matematik og kan dermed bidrage til en øget forståelse af dette aspekt i matematikkens udvikling.

I dette kapitel vil jeg diskutere det multiple aspekt af Kuhn-Tuckers sætning i ikke-lineær programmerings historie i en videnskabssociologisk ramme af teorier for multiple opdagelser. Med afsæt i denne diskussion samt med baggrund i min historiske bearbejdelse af de forskellige versioner af Kuhn-Tuckers sætning vil jeg i næste kapitel diskutere, hvorfor de forskellige versioner af Kuhn-Tuckers sætning fik så vidt forskellig indflydelse på matematikkens udvikling.

I det følgende kommer der derfor først en kort beskrivelse af nogle udvalgte sociologers teori for multiple opdagelser i forbindelse med en sociologisk teori for naturvidenskabelige opdagelser[1]. Derefter diskuterer jeg mit eget historiske arbejde med Kuhn-Tuckers sætning i forhold til disse teorier.

# Naturvidenskabssociologi

Multiple opdagelser[2], det vil sige forskellige videnskabsfolks uafhængige opdagelse af det samme videnskabelige resultat[3], er et ofte observeret fænomen i naturvidenskabernes historie. Nogle gange er opdagelserne sket med få dages mellemrum, andre gange er der gået både 10, 20, 30 eller endnu flere år imellem. Nogle af de første, der på en systematisk måde undersøgte fænomenet sociologisk, var amerikanerne William F. Ogburn og Dorothy S. Thomas. I 1922 publicerede de essayet *Are Inventions Inevitable?*, hvori de på basis af 148 tilfælde af multiple opdagelser gjorde sig til fortalere for, at multiple opdagelser er et generelt aspekt af naturvidenskabernes udvikling [Ogburn og Thomas, 1922]. Dermed mindskes den enkelte forskers rolle i udviklingen af naturvidenskaberne, thi hvis multiple opdagelser er reglen snarere end undtagelsen, har den enkelte forskers indsats ikke den store betydning, idet hans eller hendes opdagelser, i tilfælde af at forskeren ikke havde eksisteret, blot ville være blevet opdaget af en anden forsker. I Ogburns og Thomas' teori skabes videnskabelige opdagelser således ikke af genier, men af et samspil mellem faktorer som tilstrækkeligt kvalificerede forskere, kulturel forberedelse og socialt behov. De fornægter ikke, at man som individ kan have visse nedarvede evner, men som de skriver:

> *... it must receive the necessary cultural training and it must be applied. The problem has to be seen, its solution socially desired and the ability must be trained and stimulated to attack the problem.* [Ogburn og Thomas, 1922, s.92]

De mener, at den eneste faktor, som spiller en *afgørende* rolle for naturvidenskabelige opdagelser, er den kulturelle forberedelse af forskerne. Opdagelser

[1] Mikael Larsens speciale, *Den Hæmolytiske Plaque-Test -samtidige opdagelser og det partikulære-*, indeholder en udførlig litteraturliste til videnskabssociologiske artikler om multiple opdagelser samt en diskussion af nogle af disse [Larsen, 1996].

[2] Jeg har oversat ordet *multiple discovery* med multipel opdagelse. Jeg vil i det følgende benytte ordet 'opdagelse' uden at tage yderligere stilling til om og i hvilken forstand matematiske sætninger opdages eller opfindes.

[3] Et af problemerne ved teorier for multiple opdagelser er at karakterisere, hvornår videnskabelige resultater er 'det samme' resultat. I næste kapitel vil jeg diskutere denne problematik i forhold til Kuhn-Tuckers sætning.

er nemlig afhængige af akkumulationen af viden, og det er kulturens udvikling, der er bestemmende for, hvilken viden der er tilrådighed på et givet tidspunkt. På denne baggrund konkluderer de, at opdagelser i realiteten bliver uundgåelige.

## Robert K. Merton

Robert K. Merton er uden tvivl en af de forskere, der har haft størst betydning for udviklingen af naturvidenskabssociologi [Barnes, 1972]. Han indtager også en central plads, når det drejer sig om teorier for multiple opdagelser, idet al senere forskning i emnet tager udgangspunkt i hans arbejde. Essensen af hans forskning inden for multiple opdagelser fremgår af hans artikel *Singletons and Multiples in Science* fra 1961 [Merton, 1961]. Heri argumenterer han for en hypotese om, at multiple opdagelser ikke blot er et '*odd or curious or remarkable*' aspekt af udviklingen af naturvidenskabelige opdagelser, men derimod det dominerende mønster [Merton, 1961, s.356]. Det er de enkeltstående opdagelser, det vil sige opdagelser, der kun er gjort én gang i videnskabshistorien, som er undtagelserne, der kræver speciel forklaring, en forklaring der ifølge Merton vil ende med at vise, at enkeltstående opdagelser i virkeligheden er multiple:

> *... the hypothesis states that all scientific discoveries are in principle multiples, including those that on the surface appear to be singletons.* [Merton, 1961, s.356]

Merton medgiver, at denne hypotese ved første øjekast kan forekomme nærmest oprørende, men at den dels er '*held much of the time by working scientists*', dels at 'beviserne ligger lige for hånden og kan indsamles i hobevis' [Merton, 1961, s.357].

Han giver derefter ti forskellige men relaterede argumenter for, at hans hypotese er fornuftig nok. For det første peger han på den store klasse af enkeltopdagelser, som senere viste sig at være genopdagelser af resultater fundet i tidligere arbejder, som enten var upublicerede eller publicerede men svært tilgængelige. De næste seks af hans argumenter kan slås sammen under overskriften 'kommet i forkøbet', idet de alle går på tilfælde, hvor forskeren af den ene eller anden årsag bliver opmærksom på, at en anden er kommet ham eller hende i forkøbet. Dropper forskeren projektet, er det et eksempel på en enkeltstående opdagelse, der i virkeligheden var en potentielt multipel opdagelse. Publicerer forskeren alligevel sit resultat, optræder der som oftest en typisk fodnote af formen '*Since completing this experiment, I find that Woodworth (or Bell or Minot, as the case may be) had arrived at this conclusion last year and that Jones did so fully sixty years ago*' [Merton, 1961, s.358]. Mertons sidste tre argumenter er af en anden slags. De drejer sig alle om den måde, forskere opfører sig på. Merton påstår, at forskeres måde at opføre sig på vidner om en underliggende tro på, at alle naturvidenskabelige opdagelser er potentielle multiple opdagelser. Han bygger dette på de mange tilfælde, hvor forskere prøver at gardere sig mod at blive 'overhalet indenom' af andre forskere ved omhyggeligt at datere noter og private optegnelser, at cirkulere ufuldstændige udgaver af deres arbejde samt 'lække' oplysninger om deres ideer til venner og bekendte. Er forskerne ikke selv opmærksomme på nødvendigheden heraf, skorter det ikke på eksempler, hvor andre, venner eller kollegaer, har advaret forskerne om muligheden og faren for at blive overhalet. At det er så vigtigt for forskerne ikke at blive overhalet skyldes, at

> *the culture of science puts a premium not only on originality but on chronological firsts in discovery, this awareness of multiples understandably activates a rush to ensure priority.* [Merton, 1961, s.361]

Ligesom Ogburn og Thomas slutter Merton, at dette udviklingsmønster for naturvidenskabelige opdagelser (at alle opdagelser i princippet er multiple) afspejler naturvidenskabelig videns akkumulative natur. I modsætning til Ogburn og Thomas nægter Merton dog at tage stilling i 'striden' mellem teorier, der går på, at naturvidenskabernes udvikling er afhængig af enkelte geniers indsats, og teorier, der fuldstændig underkender individets rolle:

> *shall we regard the course of science and technology as a continuing process of cumulative growth, with discoveries tending to come in their due time,* or *as the work of men of genius who, with their ancillaries, bring about basic advances in science? In the ordinary way, these are put as alternatives:* either *the social theory of discovery* or *the "heroic" theory.* [Merton, 1961, s.352]

Men Merton mener ikke, at hypotesen om multiple opdagelser som det altdominerende mønster i naturvidenskabelige opdagelsers udvikling nødvendigvis bør resultere i en hypotese om, at naturvidenskabernes store genier er fuldstændig og aldeles uden betydning. I stedet foreslår Merton en integration af de to teorier, thi ved at opfatte begrebet 'videnskabeligt geni' sociologisk i stedet for psykologisk kan man i en sådan større sociologisk ramme tage højde for geniet. Hvad er det så, der karakteriserer det videnskabelige geni? Ifølge Merton er videnskabelige genier præcis dem, hvis arbejde ender med at blive genopdaget, ikke af en enkelt forsker, men af et helt hold af videnskabsfolk. Genierne er således dem, der er involveret i flest multipler. Det vil med andre ord sige, at Merton mener, at forskellen i genialitet mellem forskere er en kvantitativ størrelse. Jo mere intelligent man er, jo flere opdagelser og jo hurtigere vil man producere dem. Havde en genial forsker ikke eksisteret, ville de samme opdagelser alligevel være blevet gjort af mindre geniale forskere, det ville blot have taget længere tid, og det ville have krævet, at flere forskere var involveret.

## Don Patinkin

Som man næsten kunne forvente, kan en så radikal hypotese som Mertons - at alle opdagelser i princippet er multiple - ikke få lov til at stå uimodsagt. Den er blevet kritiseret af bl.a. Don Patinkin i artiklen *Multiple Discoveries and the Central Message*, hvor han med et eksempel fra økonomi som *case study* påpeger to essentielle punkter, der efter hans mening ikke er ordentligt behandlet i diskussionerne om uafhængige multiple opdagelser: nemlig en præcis definition af hvad det er, der er blevet opdaget, samt i hvilken udstrækning opdagelsen er en del af forskerens centrale budskab - *central message* [Patinkin, 1983, s.306]. Hans påstand er, at adskillige såkaldte multiple opdagelser vil vise sig i virkeligheden at være enkeltstående, hvis de underkastes en nærmere analyse, hvori der dels gives en præcis definition af opdagelsen, dels undersøges i hvilken udstrækning opdagelsen indgik i de påståede '*co-discoverers*' arbejde, det vil sige i hvilken udstrækning den indgik i deres centrale budskab. Patinkin lægger meget vægt på begrebet *central message*, og hans eget centrale budskab er, at en forsker ikke kan betragtes som havende gjort en opdagelse, med mindre den er en del af hans eller hendes *central message.*

Spørgsmålet er så, hvordan man identificerer en forskers centrale budskab. Hertil har Patinkin følgende forslag:

> ... *the central message of a scientific work is announced by its presentation early in the work (and frequently in its title) and by repetition, either verbatim or modified in accordance with the circumstances.* [Patinkin, 1983, s.314]

Patinkin giver to begrundelser for, hvorfor det er så vigtigt, at insistere på, at opdagelsen skal indgå i forskerens centrale budskab, for at forskeren kan tilskrives opdagelsen. Den første grund hænger sammen med det, videnskabssociologerne kalder '*the reward system of science*', hvori anerkendelse for originalitet spiller en uhyre vigtig rolle. Det, at komme tæt på en opdagelse og så at forstå dens fulde betydning, er to vidt forskellige ting, og skal det naturvidenskabelige '*reward system*' fungere på en produktiv måde, er det vigtigt, at

> ... *its rewards must go to the true discoverers: to those who brought about a cognitive change.* [Patinkin, 1983, s.316]

Hans anden grund er også relateret til naturvidenskab som en institution for vidensudvikling. Nemlig det, at naturvidenskab er en offentlig og *ikke* en privat affære. Hermed mener Patinkin, at videnskabelige opdagelsers funktion er at

> *stimulate a new research program on the part of colleagues in his field of inquiry, for only in that way can the full scientific potential of the discovery be efficiently exploited.* [Patinkin, 1983, s.316]

Man kan derfor ikke give en forsker kredit for en opdagelse, hvis den ikke er en del af forskerens centrale budskab. Det er kun, hvis forskeren selv er opmærksom på betydningen af sit arbejde, at hun eller han kan stimulere kollegaer til yderligere forskning i emnet. Med denne begrundelse gør Patinkin sig således til talsmand for, at man også skal se på i hvilken grad, opdagelser influerer på yderligere videnskabelig forskning.

Patinkins tese er, at anvender man hans kriterier for multiple opdagelser, vil mange påståede multiple opdagelser vise sig at være enkeltstående, og han tager dermed afstand fra teorier, der hævder, at den individuelle forsker er uden betydning.

## Susan E. Cozzens

Det sidste aspekt i teorier om multiple opdagelser, som jeg vil tage op her, er den rolle, som såkaldte *third parties* spiller i etableringen af multiple opdagelser. Den amerikanske videnskabssociolog Susan E. Cozzens har behandlet dette aspekt i forbindelse med et *case study* om opdagelsen af en receptor for opiater. I 1973 blev der publiceret en række artikler om en mulig receptor i hjernen, som specielt ville binde sig til en naturligt forekommende, morfinagtig substans [Latour, 1996]. Bagefter deltog tre forskellige forskergrupper i jagten på prioritetsanerkendelse for opdagelsen, og i bogen *Social Control and Multiple Discovery in Science: The Opiate Receptor Case* undersøger Cozzens spørgsmålet om, hvordan opdagelsen bagefter blev anerkendt som multipel. Hun fokuserer specielt på den rolle, som 'tredje part' spiller, det vil sige den rolle, folk, der ikke er direkte impliceret i opdagelsen, spiller i forbindelse med etableringen af anerkendelsen for opdagelsen. I Cozzens tilfælde var de tre involverede forskergrupper ikke selv i stand til at løse konflikten, og den blev i stedet løst af *third parties*, som efterhånden via referencer til de centrale artikler afgjorde prioritetsstriden med lige kredit til hver af de tre involverede forskergrupper. Cozzens undersøgelse er således et eksempel på, hvordan en *after-the-fact process* var nødvendig for etableringen af en multipel opdagelse; en proces, hvor 'tredje part' spillede den afgørende rolle [Cozzens, 1989, s.170].

## Kuhn-Tuckers sætning diskuteret i forhold til disse teorier for multiple opdagelser

Grunden til at spørgsmålet om multipel opdagelse dukker op i forbindelse med en undersøgelse af ikke-lineær programmerings historie er, at man i sekundærlitteraturen kan læse at Kuhn-Tuckers sætning tidligere var blevet udledt af Ostrogradsky, Farkas, Karush og John [Franksen, 1985I,III], [Prékopa, 1980], [Kuhn, 1972]. I forrige kapitel diskuterede jeg Ostrogradskys og Farkas' arbejde og konkluderede, at det er min opfattelse, at de ikke kan siges at have udledt Kuhn-Tuckers sætning. Det står stadig tilbage at undersøge, hvordan det forholder sig med Karushs og Johns arbejder. Er Kuhn-Tuckers sætning en tre dobbelt multipel opdagelse?

Mertons kriterium for multiplicitet er uafhængige opdagelser af samme videnskabelige resultat. Karushs arbejde bygger på Farkas' Lemma, der som vi har set var et vigtigt værktøj, men efter 1901 er Farkas' Lemma et resultat om homogene uligheder og ikke et resultat om optimering under ulighedsbibetingelser. Karushs resultat kan således betragtes som en uafhængig opdagelse. Det samme gør sig gældende for Fritz John. Han var ikke bekendt med Karushs arbejde og benyttede heller ikke Farkas' Lemma, men andre lignende resultater om uligheder, udviklet i konveksitetsteori. Kuhn og Tucker kendte ikke til Karushs arbejde, men de benyttede Farkas' Lemma på samme måde som Karush, det vil sige som et resultat om homogene, lineære uligheder. Men hvad med Fritz Johns arbejde? Kuhn og Tucker henviser faktisk til hans arbejde '*Treating the vector u as a set of m nonnegative Lagrange multipliers* [10], *form ...*', (her er [10] en henvisning til Fritz Johns artikel i Courants festskrift) [Kuhn og Tucker, 1950, s.484]. I et brevinterview[4] med Kuhn fortalte Kuhn, at henvisningen til Fritz John var tilføjet i korrekturlæsningsfasen, og at arbejdet i øvrigt var udført uden kendskab til Johns[5].

[4]email modtaget den 16. august 1995.

[5]Det forklarer den henvisningsfejl, der er i Kuhns og Tuckers artikel. Tilføjelsen af Johns artikel til litteraturlisten ændrede nummeringen af de sidste 4 emner i litteraturlisten. Inde i selve artiklen er der ingen henvisningsfejl, men i litteraturlisten optræder der 4 artikler ([4], [5], [7] og [9]), som alle er publiceret i Koopmans' kongresberetning *Activity Analysis of Production and Allocation* fra 1951 [Koopmans, 1951]. Inden tilføjelsen af Johns artikel optrådte Koopmans' kongresberetning som nr. [10] i litteraturlisten, og disse 4 artikler i litteraturlisten henviser stadig til nr. [10], som i den publicerede version af Kuhns og

Benytter man Mertons kriterium, er der således tale om tre uafhængige opdagelser.

Benytter man Patinkins kriterier for multiplicitet, får man et lidt mere nuanceret billede. Ifølge Patinkin er det ikke nok, at opdagelserne er gjort uafhængige af hinanden. Man kan kun tilskrive en forsker kredit for en opdagelse, hvis opdagelsen indgår i forskerens centrale budskab. Karushs *master's* afhandling har titlen *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Conditions*, og hans sætning om nødvendige betingelser for eksistens af ekstremum indgår i afhandlingens centrale afsnit, så benytter man Patinkins krav om, at forskerens centrale budskab kan identificeres ved, at den annonceres tidligt og ofte i titlen af arbejdet, er der ingen tvivl om, at Kuhn-Tuckers sætning indgår i Karushs centrale budskab. Noget tilsvarende gør sig gældende for Fritz Johns arbejde. Han tilkendegiver både i titel og introduktion, at hans arbejde handler om *Ekstremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions*, og resultatet om nødvendige betingelser for ekstremum er det første resultat, der vises. Det lever således op til Patinkins krav om *central message*. Kuhns og Tuckers arbejde lever ligeledes op til dette krav. Det fremgår af titlen *Nonlinear Programming*, at deres arbejde drejer sig om ikke-lineær programmering. Det er første gang, der optræder et arbejde, hvori dette ord indgår, men på dette tidspunkt er lineær programmering velkendt i de kredse, Kuhn og Tucker færdedes i, så der kan ikke herske tvivl om, hvilke matematiske problemkredse der falder ind under titlen. Kuhn-Tuckers sætning formuleres også tidligt i arbejdet, og hele artiklen omhandler forskellige aspekter af ikke-lineær programmering. Der er således ingen tvivl om, hvad der er Kuhns og Tuckers centrale budskab.

Anvender man derfor udelukkende dette kriterium af Patinkin, kan man igen konkludere, at der et tale om en multipel opdagelse. Men det er nu alligevel lidt utilfredsstillende. Man sidder tilbage med en følelse af, at historien er mere kompliceret end det. Patinkins ide om *central message* kan ikke helt indfange problemet, men hvis man diskuterer resultaterne i forhold til Patinkins ide om, at opdagelsers funktion er at stimulere til yderligere forskning i emnet, kommer Karushs og Johns arbejder til kort. Karushs arbejde blev ikke publiceret, og det gav heller ikke anledning til nogen ny forskning, det havde som sådan ingen som helst indflydelse på udviklingen af ikke-lineær programmering. Johns arbejde formåede heller ikke at stimulere nogen som helst videre forskning i emnet. Patinkin opstillede ikke kravet om stimulering af yderligere forskning i emnet som et kriterium for multipel opdagelse, men det indgik i hans *begrundelse* for at opstille det centrale budskab som et kriterium, der skal være opfyldt, før man kan tale om multiple opdagelser.

Tuckers artikel er Fritz Johns arbejde og *ikke* Koopmans.

Kuhn og Tucker opfylder til fulde hensigten bag Patinkins krav, idet Kuhns og Tuckers artikel lancerede ikke-lineær programmering som nyt, matematisk forskningsområde. Inddrages denne hensigt i kravet til multiple opdagelser, er Kuhn-Tuckers sætning således, i Patinkins forstand, *ikke* et eksempel på en multipel opdagelse, den tilhører ene og alene Kuhn og Tucker.[6]

Faktum er dog, at resultatet i dag tilskrives både Karush, Kuhn og Tucker samt til en vis grad også Fritz John. Dette skyldes indflydelse fra det, Cozzens kalder for 'tredje part' samt fra Kuhn selv. Kuhn blev som tidligere omtalt opfordret til at holde et historisk foredrag om de berømte Kuhn-Tucker betingelser. Under forberedelserne hertil stødte han bl.a. på følgende kommentarer i Akira Takayamas bog *Mathematical Economics* [Takayama, 1974]:

> *... the theory of nonlinear programming when the contraints are all in the form of equalities has been well known for a long time - in fact, since Euler and Lagrange. The inequality constraints were treated in a fairly satisfactory manner already in 1939 by Karush.* [Takayama, 1974, s.61, note 5]
>
> *Next to Karush, but still prior to Kuhn and Tucker, Fritz John considered the nonlinear programming problem with inequality constraints.* [Takayama, 1974, s.100]

Denne anerkendelse af Karushs og Fritz Johns resultater fra Takayama fik Kuhn til at kontakte Karush og Fritz John. Desværre har jeg ikke Kuhns brev til Fritz John, men som citeret tidligere tilskriver Kuhn i et brev til Karush prioriteten til Kuhn-Tucker betingelserne til Karush. I sin historiske artikel går Kuhn dog ikke helt så langt. Her afholder han sig fra at diskutere prioritetsspørgsmålet, men diskuterer både Karushs og Johns arbejder. Herefter kan man ofte i lærebøger se Kuhn-Tuckers sætning omdøbt til Karush-Kuhn-Tuckers sætning, og Fritz Johns resultat optræder ofte som en selvstændig sætning under navnet Fritz Johns sætning. Det fremgår af Karushs svar til Kuhn, at Magnus Hestenes fra Chicago tidligere havde opfordret Karush til at gøre verden opmærksom på sit arbejde. Også Kuhn modtog derefter breve fra *third parties* [Bellman, 1975, brev, 11 febr.][7].

Man kan således med Cozzens teorier for, hvordan multiple opdagelser efterfølgende etableres og anerkendes, her se et eksempel, hvor 'tredje part' har betydning for etableringen af en multipel opdagelse, selv om en af de involverede parter, Kuhn, selv indgik i *third parties*.

[6]I kapitel 13 diskuteres Patinkins andet essentielle punkt, nemlig spørgsmålet om hvad det præcis er, der er blevet opdaget.

[7]Se kapitel 9.

# Konklusion

I introduktionen til dette kapitel skrev jeg, at mit formål med at inddrage et aspekt af multiple opdagelser i forbindelse med Kuhn-Tuckers sætning var at forstå, hvorfor tre matematiske resultater, der i dag opfattes som værende samme resultat, og som blev udviklet inden for en forholdsvis kort tidsperiode, blev tillagt så forskellig betydning. Ingen opfordrede Karush til at publicere sit resultat, Johns blev afvist af *Duke Mathematics Journal*, men blot to år senere startede Kuhns og Tuckers et nyt matematisk forskningsområde.

Jeg må nok konkludere, at de forskellige videnskabssociologiske teorier for multiple opdagelser, som jeg i dette kapitel har diskuteret det multiple aspekt af Kuhn-Tuckers sætning i, ikke har kastet meget lys over dette spørgsmål. Grunden hertil er nok, at de sociologiske teorier primært er ude efter at forstå og opstille kriterier for prioritetsanerkendelse. I næste kapitel, der er konklusionen på anden del af afhandlingen, vil jeg diskutere betydningen af de forskellige kontekster et resultat udvikles i. Det er min opfattelse, at dette kan være et bud på en mere frugtbar ramme at diskutere det multiple aspekt i med henblik på at opnå indsigt i, hvorfor de forskellige versioner af Kuhn-Tuckers sætning fik så forskellig modtagelse i det videnskabelige miljø og så forskellig indflydelse på matematikkens udvikling.

# Kapitel 13

# Konklusion

I dette kapitel konkluderer jeg på anden del af afhandlingen *Kuhn-Tuckers sætning: en multipel opdagelse?* Jeg diskuterer her spørgsmålet om kuhn-Tuckers sætning og multiple opdagelser ud fra betydningen af de forskellige kontekster sætningerne blev udviklet i. Til sidst peger jeg på disse betragtningsmåder, som nyttige analyse redskaber for matematikkens historie.

## Kontekstens betydning

Patinkins kriterie om *central message* indfanger ikke fuldstændigt mit spørgsmål i forhold til Kuhn-Tuckers sætning og multiple opdagelser. For eksempel blev Karushs og Johns arbejder ikke 'overset' fordi resultatet ikke indgik som et centralt budskab, men snarere fordi 'budskabet' ikke var centralt i forhold til den faglige -og måske også den sociologiske- kontekst, deres arbejder blev udviklet i. Patinkin pegede også på et andet aspekt, som han mener ofte bliver underspillet i diskussioner om multiple opdagelser, nemlig hvad det præcis er, der er blevet opdaget. Det er min opfattelse at man ikke kan give entydige svar på sådanne spørgsmål, de vil afhænge af den kontekst man betragter resultatet i.

I det følgende skelner jeg mellem en matematisk kontekst, og en sociologisk kontekst. Inden for den matematiske kontekst er der en yderligere opdeling, idet jeg taler om 'ren matematisk indhold' og 'den faglige kontekst'. Med 'ren matematisk indhold' hentyder jeg til, at man betragter en matematisk sætning uden for den matematiske disciplin den er udviklet i, man ser isoleret på sætningen og forholder sig således ikke til sætningens betydning inden for et bestemt matematisk område. Med 'den faglige kontekst' mener jeg den matematikfaglige sammenhæng en sætning optræder i. I diskussionen nedenfor berører jeg inden for den sociologiske kontekst for Karushs vedkommende en lokal, institutionel kontekst og for Kuhns og Tuckers vedkommende en mere global, samfundsmæssig kontekst.

Karushs og Fritz Johns arbejder blev udviklet med under 10 års mellemrum, og kun to år efter publiceringen af Johns arbejde offentliggjorde Kuhn og Tucker deres arbejde. I dag opfattes de tre resultater af fagfolk alle som Kuhn-Tuckers sætning. Kuhn omtaler dem i sit historiske essay som 'den samme sætning' [Kuhn, 1972]. I mange lærebøger i ikke-lineær programmering kaldes resultaterne i dag for Karush-Kuhn-Tuckers sætning, og Johns sætning, opdelingen i to sætninger skyldes Johns manglende regularitetsbetingelse. Baggrunden for denne opfattelse er en analyse af de forskellige resultater i forhold til 'ren matematisk indhold', og en analyse der tager udgangspunkt i den matematiske indsigt, man har i dag. I en sådan analyse forsøger fagfolkene at sortere forskellene væk og fokusere på lighederne. De betragter resultaterne løsrevet for den sammenhæng de blev udviklet i, i en nutidig viden om, at de alle kan benyttes til at udtale sig om den samme problemstilling inden for ikke-lineær programmering, nemlig nødvendige betingelser for eksistens af ekstremumspunkter for funktioner af endelig mange variable underlagt ulighedsbibetingelser. Som det er blevet pointeret i de respektive kapitler, er der mindre forskelle i deres formulering af problemet: Karush og Kuhn og Tucker betragtede kun endelig mange bibetingelser, mens Fritz John opererede med uendelig mange bibetingelser. Karush og Fritz John ledte efter minimumsværdier, mens Kuhn og Tucker søgte efter maksimum. I selve formuleringen af Kuhn-Tuckers sætning er der også forskelle: Karushs og Johns er næsten ens, mens Kuhns og Tuckers skiller sig ud, idet de omformulerede sætningen til nødvendige betingelser for det tilhørende saddelpunktsproblem. Betragtet som enkeltstående matematiske resultater, det vil sige inden for 'ren matematisk indhold', er hovedforskellen, at Fritz John ikke har nogen normalitetsbetingelse, hvilket betyder, at man i Johns tilfælde kan risikere, at multiplikatoren hørende til den funktion man ønsker at optimere, kan gå hen og blive 0.

Et af de punkter, jeg i indledningen pegede på som motiverende faktor for min undersøgelse af ikke-lineær programmerings historie, var den forskellige modtagelse, det tilsyneladende næsten identiske matematiske resultat fik: Karush viste det i 1939, men hans arbejde blev aldrig offentliggjort, Fritz Johns blev publiceret i 1948, efter først at være blevet afvist af *Duke Mathematics Journal*, og to år efter, i 1950, viste Kuhn og Tucker sætningen, og ud af det udkrystaliserede der sig et nyt forskningsområde. Det er min tese, at dette forhold skyldes de forskellige matematikfaglige kontekster, de tre artikler blev til i.

Karushs arbejde blev, som det fremgår af kapitel 9, udviklet inden for variationsregning. Det var en endeligdimensional udgave af en forskningsretning, man på det tidspunkt var dybt involveret i på matematisk institut i Chicago, nemlig variationsregning med uligheder som bibetingelser. I denne faglige kontekst var Karushs arbejde blot et lille hjørne, som ikke kan have haft den store, nyskabende interesse. Set i denne sammenhæng er det heller ikke underligt, at Karush har normalitetsbetingelsen med i sit arbejde. Det var meget naturligt i variationsregning. Dette kan også give et bud på den omstændighed, at Karush ikke blev opfordret til at publicere sin *master's* afhandling. Den bød ikke på noget, der kunne siges at være virkelig interessant i variationsregningskredse. Et andet bud kan være den lokale, institutionelle, sociologiske kontekst Karushs afhandling blev til i. Der var tilsyneladende ingen interesse for anvendelsesaspektet af forskningen inden for variationsregning. Den omfattende kritik af Chicagoskolen, som jeg har beskrevet i kapitel 9, efterlader et indtryk af, at instituttets faglige profil var meget snævert defineret inden for variationsregning.

Fritz Johns arbejde rettede sig, som det blev demonstreret i kapitel 10, mod konveksitetsteori. Hans virkelige ærinde var ikke optimeringsteori under ulighedsbibetingelser, men snarere at udvikle et værktøj til at vise generelle sætninger inden for konveksitetsteori. Fritz Johns formulering af sætningen samt den manglende normalitetsbetingelse bliver helt naturlig, når man betragter hans resultat i denne konveksitetskontekst. De resultater, han for alvor var interesseret i, fremgår af hans geometriske anvendelser, og de er begge eksempler på det normale tilfælde, hvor multiplikatoren hørende til den funktion, der skal optimeres, automatisk bliver forskellig fra 0. Normalitetsspørgsmålet blev aldrig aktuelt. Det ses også tydeligt, at Johns formulering af sætningen er dikteret af anvendelserne.

Kuhns og Tuckers arbejde blev derimod skabt i en kontekst af lineær programmering, specielt motiveret af dualitetsresultatet i lineær programmering. Dette forklarer deres omskrivning af problemet til et saddelpunktsproblem for den tilhørende Lagrange funktion. Formuleres det lineære programmeringsproblem som et saddelpunktsproblem for Lagrange funktionen, optræder dualitetsegenskaben for lineær programmering direkte, og dertil fremkommer yderligere sammenhængen mellem saddelpunkter, løsninger til primale og duale, lineære programmeringsproblemer samt minimaxløsninger til det tilhørende to-personers nulsum spil i spilteori. Det var dualitetssætningen i lineær programmering, der gjorde lineær programmering interessant rent matematisk, og med det i baghovedet er det meget naturligt at forsøge at udvide lineær programmering til mere generelle programmeringsproblemer og forsøge at udlede dualitetssætninger for det generelle tilfælde. Saddelpunktsproblemet udtrykker meget enkelt dualiteten i lineær programmering og bliver dermed et helt naturligt udgangspunkt for en udvidelse af teorien til det ikke-lineære tilfælde. Kuhns og Tuckers arbejde blev skabt inden for et nyt forskningsområde, nemlig lineær programmering, og stimulerede dermed til yderligere ny forskning i ikke-lineær programmering. Det vil sige, deres arbejde foregik i en faglig kontekst, der lige var opstået og stadig var i rivende udvikling, og som sådan betragtet er det ikke så mærkeligt, at deres resultat formåede at søsætte ikke-lineær programmering som et nyt forskningsområde.

Den sociologiske kontekst deres arbejde opstod i havde også indflydelse på at deres arbejde blev anerkendt, udbredt og stimulerede til yderligere forskning. På det globale plan var der, som det fremgik af afhandlingens første del, inden for militæret stor interesse for sammenspillet mellem lineær programmering og spilteori, en interesse der gav sig udslag i økonomisk støtte til yderligere forskning i disse emner.[1]

Kuhn-Tuckers sætning kan ses som et eksempel på, at det ikke altid er det matematiske resultat i sig selv, det vil sige resultatet opfattet inden for 'ren matematisk indhold' der afgør, om der vil blive drevet yderligere matematisk forskning i emnet. Om et resultat - en sætning - er interessant eller ej, formår at skabe et nyt forskningsområde eller ej, bliver berømt eller ej, er ikke uafhængigt af de matematiske og sociale kontekster.

Karush var nok meget tæt på sandheden, da han som svar på, hvorfor hans afhandling aldrig var blevet publiceret, skrev at:

> *I imagine nobody at that time anticipated the future interest in the problem.* [Karush, 1975, brev, 10 febr.]

Ovenstående analyse og diskussion af Kuhn-Tuckers sætning som en multipel opdagelse er et eksempel på, at matematiske resultater, der inden for konteksten 'ren matematiske indhold' opfattes som ens, ikke nødvendigvis er identiske i praksis. Resultatets status og den videre forskning, resultatet kan generere, er i høj grad underlagt den faglige -og nogle gange også den sociale- kontekst, resultatet er udviklet indenfor. Kuhn-Tuckers sætning var et vigtigt resultat i den faglige sammenhæng og tradition, som Kuhns og Tuckers arbejde udfoldede sig i, mens dette på ingen måde var tilfældet i de faglige kontekster og forskningstraditioner, som Karush og John arbejdede indenfor.

En anden indsigt er, at resultater ikke uden videre kan skifte kontekst. Det kræver ofte en 'ny-opdagelse', og det er ofte således, at det først er efter nogen tid, når resultatet og forskningsfeltet er modnet, at man kan overskue, hvilke andre faglige kontekster resultatet måske indgår i, og kan se den generelle sammenhæng. Fortolker man således resultatet i forhold til den

[1] Betydningen af den militære interesse og finansiering for udbredelsen af ikke-lineær programmering er behandlet i første del af afhandlingen.

faglige kontekst, det er udviklet i, vil jeg mene, at de forskellige versioner af Kuhn-Tuckers sætning inden for de faglige kontekster var så forskellige, at det er tvivlsomt, om man kan tale om en multipel opdagelse.

Prioritetsdiskussionen fra kapitel 3 mellem von Neumann og Fréchet på vegne af Borel om minimaxsætningens status er et andet eksempel på et resultat, hvis status og potentiale var bestemt af den faglige kontekst.

## Vurdering af konklusionens gyldighed og generaliserbarhed

Jeg har i afhandlingen hovedsagelig belyst den matematiske kontekst, især er den faglige konteksts betydning dybdegående behandlet. Den sociologiske kontekst er inddraget på lokalt, institutionelt plan for Karushs vedkommende og på globalt plan for Kuhns og Tuckers, men er ikke fuldstændigt undersøgt. En dybdegående behandling af den sociologiske konteksts betydning ville indebære yderligere analyser af de lokale og globale kontekster for alle tre resultater, men det ligger uden for rammerne af dette 3-årige ph.d projekt.

Det er min opfattelse, at disse kontekstbetragtninger kan være et nyttigt redskab i den matematikhistoriske forskning. Det kan benyttes til at afklare spørgsmål om mekanismer bag forskellige matematiske resultaters anerkendelse og udbredelse. Konklusionen på herværende arbejde går dog kun eksplicit på Kuhn-Tuckers sætning og minimaxsætningen, men det er min opfattelse, at sådanne kontekstbetragtninger kan fungere som brugbare analyseredskaber for matematikhistoriske undersøgelser af andre matematiske resultater og teorier.

Hermed er anden del af afhandlingen færdig. Hovedparten (og resten) af problemstilling 2 er blevet behandlet. Tilsammen indeholder afhandlingens to dele en behandling og diskussion af samtlige problemstillinger opstillet i indledningen.

# Forkortelser

ONR *Office of Naval Research*
AMS *American Mathematical Society*
MAA *Mathematical Association of America*
AMP *Applied Mathematics Panel*
NDRC *National Defense Research Committee*
OSRD *Office of Scientific Research and Development*

# Dansk resume

Denne ph.d.-afhandling handler om ikke-lineær programmerings historie. Afhandlingen falder i to dele, hvor første del kan betragtes som en udviklingshistorie og anden del som et bidrag til multipel opdagelses aspektet i matematikkens historie.

I første del præsenteres en samlet fremstilling og analyse af ikke-lineær programmerings fremkomst og etablering som matematisk forskningsområde. Historien bag George B. Dantzigs udvikling af lineær programmering efter 2. verdenskrig, og den rolle militæret spillede heri, behandles. Med udgangspunkt i dette samt analyser af Harold W. Kuhns og Albert W. Tuckers matematiske arbejder i lineær og ikke-lineær programmering argumenteres der for, at fremkomsten af dualitetssætningen i lineær programmering ændrede lineær programmerings videnskabelige status fra at være en matematisk model til løsning af et konkret, praktisk problem i det amerikanske luftvåben til at blive et matematisk, interessant forskningsområde. Der argumenteres endvidere for, at dette 'statusskift' i forening med finansiel støtte fra det amerikanske militær gennem *Office of Naval Research* var en afgørende faktor for Kuhns og Tuckers udvikling af ikke-lineær programmering. Derudover analyseres og diskuteres operationsanalysens -og militærets- betydning for etableringen af ikke-lineær programmering som matematisk disciplin. Den matematikhistoriske baggrund for fremkomsten af dualitetssætningen i lineær programmering undersøges, og i den forbindelse analyseres udviklingen i John von Neumanns forståelse af minimaxsætningen for to-personers nulsum spil og de skiftende sammenhænge, den dukker op i fra 1928 til 1944. Der argumenteres for, at von Neumann i 1928, hvor hans første bevis for minimaxsætningen blev publiceret, ikke havde indsigt i minimaxsætningens forbindelse med fixpunktssætninger og lineære ulighedssystemer, som det ofte fremstilles i sekundærlitteraturen, men at denne indsigt derimod udviklede sig gradvist frem til 1944. I afhandlingens første del er der tillige en analyse af Émile Borels spilteoretiske arbejder, idet de, via en prioritetsdebat rejst af Fréchet, knytter an til en diskussion om den faglige konteksts betydning for matematiske resultaters anerkendelse og udbredelse; en diskussion der indtager en central plads i afhandlingens anden del.

I anden del af afhandlingen undersøges det multiple aspekt af Kuhn-Tuckers sætning i ikke-lineær programmering. Dette aspekt dukker op i forbindelse med ikke-lineær programmerings historie, fordi man i sekundærlitteraturen kan læse at Kuhn-Tuckers sætning tidligere var blevet udledt af Ostrogradsky og Farkas i slutningen af 1800-tallet i forbindelse med ligevægtsproblemer for mekaniske systemer underlagt bibetingelser i form af uligheder, samt i nyere tid af W. Karush i 1939 og F. John i 1948. På baggrund af matematikhistoriske analyser af Ostrogradskys og Farkas' arbejder når jeg frem til en konklusion om, at Ostrogradskys og Farkas' resultater kun kan betragtes som versioner af Kuhn-Tuckers sætning, hvis man analyserer deres arbejder ud fra den viden, vi i dag besidder inden for analytisk mekanik, og fortolker deres resultater i en moderne fysisk ramme. I dag tilskrives Kuhn-Tuckers sætning til Karush og tildels også til John. De historiske kendsgerninger er, at Karushs arbejde, som var en *master's* afhandling, aldrig blev publiceret, mens Johns først blev afvist af *Duke Mathematics Journal* for derefter at blive publiceret i 1948 i en essay-samling udgivet i anledning af Courants 60 års fødselsdag. Mit formål med at inddrage et aspekt af multiple opdagelser i forbindelse med Kuhn-Tuckers sætning var at forstå baggrunden for den historiske kendsgerning, at et matematisk resultat på et givet tidspunkt og i en given sammenhæng kan give anledning til et nyt matematisk forskningsområde; mens et tilsvarende resultat, der af samtidige fagfolk opfattes som samme resultat, udviklet på næsten samme tidspunkt men i en anden sammenhæng ikke udløste nogen reaktion. Min undersøgelse af Karushs, Johns og Kuhns og Tuckers arbejder, samt de kontekster de blev til i, munder ud i en konklusion om, at den faglige kontekst -og i visse tilfælde også den sociologiske kontekst- havde stor betydning for de forskellige resultaters status. Jeg konkluderer, at en matematisk sætnings status og den videre forskning, resultatet kan generere, er underlagt den faglige -og nogle gange også den sociale- kontekst, sætningen er udviklet indenfor. Der peges på sådanne kontekstbetragtninger som analyseredskaber for matematikhistoriske undersøgelser.

# Summary in English

The present dissertation is about the history of nonlinear programming. It is divided into two parts of which the first can be considered as the history of the development of nonlinear programming and the second part as a contribution to the aspect of multiple discovery in the history of mathematics.

In the first part an overall picture of the emergence and establishment of nonlinear programming as a mathematical field for research is presented. The history of George B. Dantzig's development of linear programming after the second world war and the military influence on this development is treated. Based on this and on analysis of the work in linear and nonlinear programming of Harold W. Kuhn and Albert W. Tucker it is argued, that the emergence of the duality theorem in linear programming changed the scientific state of affairs of linear programming, from being a mathematical model for a concrete, practical problem within The U.S. Airforce to become a mathematical interesting research area. It is further argued that this change, in combination with the financial support from *Office of Naval Research*, was crucial for the development of nonlinear programming by Kuhn and Tucker. The influence of operations research and the military on the establishment of nonlinear programming as a mathematical discipline is analysed and discussed. The history behind the emergence of the duality theorem in linear programming is examined and in connection with that the development of John von Neumann's understanding of the minimax theorem in two-person zero-sum games and the different context it appeared in from 1928 until 1944 is analysed. It is argued, that in 1928, where von Neumann's first proof of the minimax theorem was published, he did not have insight into the connections between the minimax theorem and fixpoint theorems and linear inequality systems, as it is stated in the secondary literature. This insight developed gradually from 1928 until 1944. The first part also contains an analysis of the game theoretical work of Émile Borel, because it connects, through a priority debate raised by Fréchet, to a discussion about the significance of the technical context for the appreciation and propagation of a mathematical result. This discussion is an important issue in the second part of the thesis.

In the second part of the thesis the aspect of multiple discovery of the Kuhn-Tucker theorem in nonlinear programming is analysed. This aspect turns up in the history of nonlinear programming, because it is stated in the secondary literature, that the Kuhn-Tucker theorem was independently discovered by Ostrogradsky and Farkas at the end of the nineteenth century in connection with inequality constrained equilibrium in mechanics, and in modern time by W. Karush in 1939 and F. John in 1948. Based on historical analyses of the works of Ostrogradsky and Farkas, I conclude, that their results can be seen as versions of the Kuhn-Tucker theorem only if there work is interpreted within a frame work of modern physics. Today the Kuhn-Tucker theorem is ascribed also to Karush and partly to John. The historical facts is that Karush's work was a master's thesis, that were never published, Johns work was first rejected by the Duke Mathematics Journal, but then got published in a collection of essays for Courant's 60th birthday. My purpose of including this aspect of multiple discovery was to understand, why a mathematical result at a specific time, and in a specific context, can generate a new mathematical research area, while a similar result, developed almost at the same time but in a different context, did not cause any reaction. My analysis of the work of Karush, John, Kuhn and Tucker and the contexts they appeared in, give rise to the conclusion, that the technical context -and in some cases also the sociological context- had significant influence on the importance of the different results.

# Litteratur

## Breve, curriculum vitaes, interviews

Brev fra R. Bellman til H. W. Kuhn, dateret 11. februar, 1975. (Upubliceret).

Dantzig, G. B.: *Curriculum Vitae*, 1994.

Brev fra W. Fenchel til A. W. Tucker, dateret 11. juni, 1951. (Fenchel Arkivet, Afdeling for matematiske fag, Københavns Universitet).

Brev fra C. G. Fraser til T. H. Kjeldsen, dateret 13. november, 1996. (Upubliceret).

Brev fra W. Karush til H. W. Kuhn, dateret 10. februar, 1975. (Upubliceret).

Karush, W.: *Curriculum Vitae*, 1989.

Brev fra H. W. Kuhn til W. Karush, dateret 4. februar, 1975. (Upubliceret).

Brev fra H. W. Kuhn til W. Karush, dateret 21. februar, 1975. (Upubliceret).

E-mail fra H. W. Kuhn til T. H. Kjeldsen, dateret 16. august, 1995.

Kuhn, H. W.: *Curriculum Vitae*, 1986.

Interview med H. W. Kuhn, Princeton University, Princeton, New Jersey, 23. april, 1998.

Brev fra A. W. Tucker til W. Fenchel, dateret 11 juni, 1951. (Fenchel Arkivet, Afdeling for matematiske fag, Københavns Universitet).

Tucker, A. W.: *Curriculum Viate*, 1980.

## Bøger og tidsskrifter

Abadie, J. (1967) (red.): *Nonlinear Programming.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1967.

Adams, R. A. (1995): *Calculus: a complete course.* Don Mills, Ontario: Addison-Wesley Publishers Limited, 1995, 3. udgave.

Ader, O. B. (1938): "An Affine Invariant of Convex Regions." *Duke Mathematics Journal*, 4, 1938, s.291-299.

Albers, D. J. og Alexanderson, G. L. (1985) (red.): *Mathematical People, Profiles and Interviews.* Boston: Birkhäuser, 1985.

Aspray, W. (1988): "The Emergence of Princeton as a World Center for Mathematical Research, 1896-1939." i W. Aspray og P. Kitcher (red.): *History and Philisophy of Modern Mathematics.* Minneapolis: The University of Minnesota Press, 1988, s.346-366.

Avriel, M. (1976): *Nonlinear Programming, Analysis and Methods.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1976.

Balinski, M. L. (1991): "Mathematical Programming: Journal, Society, Recollections." i J. K. Lenstra, A. H. G. R. Kan, A. Schrijver (red.): *History of Mathematical Programming.* Amsterdam: North-Holland, 1991, s.5-18.

Balinsky, M. L. og Wolfe, P. (1971): "The Journal." *Mathematical Programming*, 1, 1971, s.1-5.

Banbury, J. og Maitland, J. (1961) (red.): *Proceedings of the 2th International Conference of Operational Research.* Paris: Dunod, 1961.

Barnes, B. (1972) (red.): *Selected Readings.* London og Baltimore: Penguin Books, 1972.

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. og Shetty, C. M. (1979): *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1979.

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. og Shetty, C. M. (1993): *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993, 2. udgave.

Behrend, F. (1937): "Über einige Affininvarianten konvexer Bereiche." *Mathematische Annalen*, 113, 1937, s.713-747.

Behrend, F. (1938): "Über die kleinste umbeschriebene und die grosste einbeschriebene Ellipse eines konvexen Bereichs." *Mathematische Annalen*, 115, 1938, s.379-411.

Bliss, G. A. (1938): "Normality and Abnormality in the Calculus of Variations." *Transactions of the American Mathematical Society*, 43, 1938, s.365-376.

Bliss, G. A. (1946): *Lectures on the Calculus of Variations.* Chicago: The University of Chicago Press, 1946.

Bluhmenthal, L. M. og Wahlin, G. E. (1941): "On the Sperical Surface of Smallest Radius Enclosing a Bounded Subset of n-dimensional Euclidean Space." *Bulletin of the American Mathematical Society*, 47, 1941, s.771-777.

Bonnesen, T. og Fenchel, W. (1934): *Theorie der konvexen Körper.* Berlin: Springer Verlag, 1934.

Borel, É. (1921): "La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique." *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, dec. 19, 173, 1921, s. 1304-1308.

Borel, É. (1923): "Sur les jeux où le hasard se combine avec l'habileté des joueurs." *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, dec. 26, 1923, s.1117-1118.

Borel, É. (1924): "Sur les jeux où interviennent le hasard et l'habileté des joueurs." i É. Borel: *Théorie des Probabilités.* Paris: Librairie Scientifique, J.Hermann, 1924, s.204-224.

Borel, É. (1926a): "Un théorème sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche." *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 183, nov. 22, 1926, s.925-927.

Borel, É. (1926b): "Un théorème sur les formes linéaires à déterminant symétrique gauche." *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 183, nov. 29, 1926, s.78.

Borel, É. (1927): "Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique et la théorie générale du jeu." *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 184, jan. 4, 1926, s.52-53.

Borel, É. (1938a): "Jeux ou la psychologie joue un role fondamental." i É. Borel et al.: *Traité du calcul des probabilités et de ses applications.* 4, Fasc. 2, Paris: Gauthier-Villars, 1938, s.71-87.

Borel, É. (1938b): "Observations sur la note précédente." i É. Borel et al.: *Traité du calcul des probabilités et de ses applications.* 4, Fasc. 2, Paris: Gauthier-Villars, 1938, s.115-117.

Borel, É. (1938c): "Note sur límitation du hasard." i É. Borel et al.: *Traité du calcul des probabilités et de ses applications.* 4, Fasc. 2, Paris: Gauthier-Villars, 1938, s.119-120.

Borel, É. et al. (1938): *Traité du Calcul des probabilités et de ses applications.* Paris: Gauthier-Villars, 1938.

Borel, É. (1953a): "The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels." *Econometrica*, 21, 1953, s.97-100.

Borel, É. (1953b): "On Games that Involve Chance and the Skill of the Players." *Econometrica*, 21, 1953, s.101-115.

Borel, É. (1953c): "On Systems of Linear Forms of Skew Symmetric Determinant and the General Theory of Play." *Econometrica*, 21, 1953, s.116-117.

Brechtken-Manderscheid, U. (1991): *Introduction to the Calculus of Variations.* London: Chapman and Hall, 1991.

Brentjes, S. (1976a): "Bemerkungen zum Beitrag von Julius Farkas zur Theorie der linearen Optimierung." *NTM-Schriftenreihe zur geschicte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin*, 13, 1976, s.21-23.

Brentjes, S. (1976b): "Der Beitrag der sowjetischen Wissenschaftler zur Entwicklungen der Theorie der linearen Optimierung." *NTM-Schriftenreihe zur geschicte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin*, 13, 1976, s.105-110.

Brentjes, S. (197?): *Untersuchungen zur Geschichte der linearen Optimierung (LO) von ihren Anfängen bis zur Konstituierung als selbständige mathematische Theorie - eine Studie zum Problem der Entstehung mathematischer Disziplinen im 20. Jahrhundert.* Ph.D afhandling fra Leipzig, DDR, ikke publiceret.

Browder, F. E. (1989): "The Stone Age of Mathematics on the Midway." i P. Duren (red.): "A Century of Mathematics in America, part II." *American Mathematical Society, History of Mathematics*, 2, 1989, s.191-193.

Charnes, A. og Cooper, W. W. (1961): "On some Works of Kantorovich, Koopmans and Others." *Management Science*, 8, 1961, s.246-263.

Christopherson, D. og Baughan, E. C. (1992): "Reminiscences of Operational Research in World War II by Some of its Practitioners: II." *Journal of the Operational Research Society*, 43, 1992, s.569-577.

Churchman, C. W., Ackoff, R. L. og Arnoff, E. L. (1957): *Introduction to Operations Research.* New York: John Wiley and Sons, Inc., 1957.

Courant, R. og Hilbert, D. (1937): *Methoden der Mathematischen Physik*, bind 1 og bind 2. Berlin: Julius Springer Verlag, 1937.

Cournot, A. (1826): "Sur le calcul det conditions d'inégalité, annoncé par M. Fourier." *Bulletin des Sciences Mathématiques, Astronomiques, Physiques et Chimiques*, 6, 1826, s.1-8.

Cournot, A. (1827): "Extension du principe des vitesses virtuelles au cas où les conditions de liaison du système sont exprimées par des inégalités." *Bulletin des Sciences mathématiques, Astronomiques, physiques et chimiques*, 8, 1827, s.165-170.

Cozzens, S. E. (1989): *Social Control and Multiple Discovery in Science: The Opiate Receptor Case.* Albany: State University of New York Press, 1989.

Dantzig, G. B. (1949): "Programming of Interdependent Activities, II Mathematical Model." *Econometrica*, 17, 1949, s.200-211.

Dantzig, G. B. (1949): "Programming in a Linear Structure." *Econometrica*, 17, 1949, s.73-74.

Dantzig, G. B. (1951): "Linear Programming." i *National Bureau of Standards, NBS. Applied mathematics series*, 15, Washington, D.C. 1951, s.18-21.

Dantzig, G. B. (1963): *Linear Programming and Extensions.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1963.

Dantzig, G. B. (1968): "Linear Programming and its Progeny." i E. M. L. Beale (red.): *Applications of Mathematical Programming Techniques.* London: The English Universitites Press Ltd, 1968, s.3-15.

Dantzig, G. B. (1982): "Reminiscences about the Origins of Linear Programming." *Operations Research Letters*, 1, 1982, s.43-48.

Dantzig, G. B. (1988): "Impact of Linear Programming on Computer Development." *OR/MS Today*, 1988, s.12-17.

Dantzig, G. B. (1991): "Linear Programming." i Jan Karel Lenstra, Alexander H. G. Rinnooy Kan og Alexander Schrijver (red.): *History of Mathematical Programming, A Collection of Personal Reminiscences.* Amsterdam: Noth-Holland, 1991, s.19-31.

Dantzig, G. B og Wood, M. K. (1949): "Programming of Interdependent Activities, I General Discussion." *Econometrica*, 17, 1949, s.193-199.

Dell'Aglio, L. (1995): "Divergences in the Historie of Mathematics: Borel, von Neumann and the Genesis of Game Theory." *Rivista di Storia della Scienza*, 3, 1995, s.1-46.

Dieudonné, J. (1976): "John von Neumann." i C. C. Gillispie (red.): *Dictionalry of Scientific Biography*, 14, s.88-92. New York: Charles Scribner's Sons, 1976.

Dimand, R. W. og Dimand, M. A. (1992): "The Early History of the Theory of Strategic Games from Waldegrave to Borel." i E. R. Weintraub (red.) *Towards a History of Game Theory.* Durham og London: Duke University Press, 1992, s.15-28.

Dines, L. L. (1936): "Convex Extension and Linear Inequalities." *Bulletin of the American Mathematical Society*, 42, 1936, s.353-365.

Dorfman, R. (1984): "The Discovery of Linear Programming." *Annals of the History of Computing*, 6, 1984, s.283-295.

Dunod (1963) (red.): *Proceedings of the 3th International Conference of Operational Research.* London: English University Press Ldt, 1963.

Dupree, A. H. (1986): "National Security and the Post-War Science Establishment in the United States." *Nature*, 323, 1986, s.213-216.

Duren, A. L. (1976): "Graduate Student at Chicago in the Twenties." *The American Mathematical Monthly*, 83, 1976, s.243-248.

Duren, P. (1989) (red.): "A Century of Mathematics in America, part II." *American Mathematical Society, History of Mathematics*, 2, 1989.

Dorn, W. S. (1960): "Duality in Quadratic Programming." *Quarterly of Applied Mathematics*, 18, 1960, s.155-162.

Farkas, J. (1895): "Über die Anwendungen des mechanischen Princips von Fourier." *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, 12, 1895, s.263-281.

Farkas, J. (1897): "Die algebraischen Grundlagen der Anwendung des Fourier'sschen Principes in der mechanik." *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, 15, 1897, s.25-40.

Farkas, J. (1899): "Die algebraische Grundlage der Anwendungen des mechanischen Princips von Fourier." *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, 16, 1899, s.154-157.

Farkas, J. (1901): "Theorie der einfachen Ungleichungen." *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 124, 1901, s.1-27.

Fenchel, W. (1949): "On Conjugate Convex Functions." *Canadian Journal of Mathematics*, 1, 1949, s.73-77.

Fenchel, W. (1953): *Convex Cones, Sets, and Functions.* Lecture Notes, Department of Mathematics, Princeton University, 1953.

Feynman, R., Leighton, R. og Sands, M. (1964): *The Feynman Lectures on Physics.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1964.

Feynmann, R. (1967): *The Character of Physical Law.* Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1967.

Fiacco, A. V. og McCormick, G. P. (1968): *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques.* New York: John Wiley and Sons, Inc., 1968.

Fortun, M. og Schweber, S. S. (1993): "Scientists and the Legacy of World War II: The Case of Operations Research (OR)." *Social Studies of Science*, 23, 1993, s.595-642.

Fourier, J. B. J. (1798): "Mémoire sur la statique, contenant la démonstration du principe de vitesses virtuelles, et la théorie des momens." i [Fourier, 1890, s.475-521].

Fourier, J. B. J. (1826): "Solution d'une question particulière du calcul des inégalités." i Darboux. G. (red.): *Fourier, J. B. J.: Oeuvres.* 2, *Académie des Sciences*, Paris: Gauthier-Villars, 1890, s.315-321.

Fourier, J.B.J. (1827a): "Analyse des travaux de l'Académie Royale des Sciences, pendant l'année 1823."i *Partie mathématique, Histoire de Académie Royale des Sciences 6*, xxix-xli, 1827. Også i [Fourier, 1890, s.321-324].

Fourier, J.B.J. (1827b): "Analyse des travaux de l'Académie Royale des Sciences, pendant l'année 1824." i *Partie mathématique, Histoire de Académie Royale des Sciences 7*, xlvii-lv, 1827. Også i [Fourier, 1890, s.325-328].

Fourier, J.B.J. (1831): *Analyse des Équations Déterminées.* (red.: Navier), Paris: Firmin Didot, 1831.

Fourier, J.B.J. (1890): *Oeuvres.*, 2, (red.): G. Darboux, *Académie des Sciences*, Paris: Gauthier-Villars, 1890.

Franksen, O. I. (1985I): "Irreversibility by Inequality Constraints I: On Fourier's Inequality." *Syst. Anal. Model. Simul. 2*, 2, 1985, s.137-149.

Franksen, O. I. (1985II): "Irreversibility by Inequality Constraints Part II: The Second Law of Thermodynamics." *Syst. Anal. Model. Simul. 2*, 3, 1985, s.251-273.

Franksen, O. I. (1985III): "Irreversibility by Inequality Constraints Part III: Towards Mathematical Programming." *Syst. Anal. Model. Simul. 2*, 4, 1985, s.337-359.

Fraser, C. G. (1992): "Isoperimetric Problems in the Variational Calculus of Euler and Lagrange." *Historia Mathematica*, 19, 1992, s.4-23.

Fraser, C. G. (1994): "The Origin of Euler's Variational Calculus." *Archive for History of Exact Sciences*, 47, 1994, s.103-141.

Fraser, C. G. (1996a): *Calculus of Variations 1806-1918 Historical Studies.* Kapitel 4 og 5. Bogen er endnu ikke trykt. Jeg har brugt materiale fra kapitel 4 og 5 i draft dateret hhv. den 30. og 31. oktober, 1996.

Fréchet, M. (1953a): "Emile Borel, Initiator of the Theory of Psychological Games and its Application." *Econometrica*, 21, 1953, s.95-96.

Fréchet, M. (1953b): "Commentary on the three notes of Emile Borel." *Econometrica*, 21, 1953, s.118-124.

Fréchet, M. (1927): "La vie et l'oeuvre d'Émile Borel." i *Oeuvres de Émile Borel*, 1, Editions du Centre Nationale de la Recherche Scientifique 15, quai Anatole-France-Paris-VII, 1972.

Fuglede, B. (1989): "Werner Fenchel." *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Oversigt over Selskabets Virksomhed, 1988-1989.* København: Munksgaard, 1989, s.163-171.

Gale, D. (1951): "Convex Polyhedral Cones and Linear Inequalities." i [Koopmans, 1951, s.287-297].

Gale, D., Kuhn, H. W. og Tucker, A. W. (1951): "Linear Programming and the Theory of Games." i [Koopmans, 1951, s.317-329].

Gass, S. I. (1989): "Comments on the History of Linear Programming." *Annals of the History of Computing*, 11, 1989, s.147-151.

Goldman, A. J. og Tucker, A. W. (1956): "Theory of Linear Programming." i [Kuhn et al., 1956, s.53-98].

Goldstein, H. (1981): *Classical Mechanics.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1981.

Goldstine, H. H. (1980): *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century.* New York: Springer-Verlag, 1980.

Gordan, P. (1873): "Über die Auflösungen linearer Gleichungen mit reelen Coefficienten." *Mathematishe Annalen*, 6, 1873, s.23-28.

Grattan-Guinness I. (1970): "Joseph Fourier's Anticipation of Linear Programming." *Operational Research Quaterly*, 21, 1970, s.361-364.

Grattan-Guinness, I. (1972): *Joseph Fourier 1768-1830.* Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1972.

Grattan-Guinness, I. (1994): " "A New Type of Question" : On the Prehistory of Linear and Non-Linear Programming, 1770-1940." i E. Knobloch og D. Rowe (red.): *The History of Modern Mathematics. III.* Boston: Academic Press, 1994, s.43-89.

Gårding, L. (1985): " 'Foreword'." i J. Moser (red.): *Fritz John, Collected Papers, Volume 1.* Boston: Birkhäuser, 1985.

Hall, A. R. (1980): *Philosophers at War.* Cambridge, Massachusetts: Cambridge University Press, 1980.

Hanson, M. A. (1961): "A Duality Theorem in Nonlinear Programming with Nonlinear Constraints." *Australian Journal of Statistics*, 3, 1961, s.64-72.

Heims, S. J. (1980): *John von Neumann and Norbert Wiener.* Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1980.

Hertz, D. B. og Melese, J. (1966) (red.): *Proceedings of the 4th International Conference of Operational Research.* New York: Wiley-interscience, 1966.

Hestenes, M. R. (1975): *Optimization Theory, The Finite Dimensional Case.* New York: John Wiley and Sons, Inc., 1975.

Hilbert, D. (1900): *Gesammelte Abhandlungen, III.* New York: Springer, 1970.

Hillier, F. S. og Lieberman, G. J. (1967): *Introduction to Operations Research.* San Francisco: Holden-Day, Inc., 1967.

Hillier, F. S. og Lieberman, G. J. (1974): *Operations Research.* San Francisco: Holden-Day, Inc., 1974.

Hitchman, N. (1953): "What is the Mission of Operations Research?" *Journal of the Operations Research Society of America*, 1, 1953, s.242-243.

Hourshell, D. (1997): "The Cold War, RAND, and the generation of knowledge, 1946-1962." *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences*, 27, 1997, s.237-267.

Ingraro, B. og Israel, G. (1990): *The Invisible Hand.* Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1990.

Isbell, J. R. og Marlow, W. H. (1961): "On an Industrial Programming Problem of Kantorovich." *Management Science*, 8, 1961, s.13-17.

Jahn, J. (1994): *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization.* Berlin: Springer-Verlag, 1994.

John, F. (1934): "Über die vollständigkeit der Relationen von Morse für die Anzahlen kritischer Punkte." *Mathematsce Annalen*, 109, 1934, s.381-394.

John, F. (1936): "Moments of Inertia of Convex Regions." *Duke Mathematics Journal*, 2, 1936, s.447-452.

John, F. (1942): "An inequality for convex bodies." *University of Kentucky Research Club Bulletin*, 8, 1942, s.8-11.

John, F. (1948): "Extremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions." i *Studies and Essays, Presented to R. Courant on his 60th Birthday January 8, 1948.* New York: Interscience, 1948, s.187-204.

Kantorovich, L. V. (1939): *Mathematical Methods of Organizing and Planning Production.* Leningrad University. (På russisk, en engelsk oversættelse udkom i *Management Science*, 6, 1960, s.366-422.)

Karamardian, S. (1967): "Strictly Quasi-Convex (Concave) Functions and Duality in Mathematical Programming." *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 20, 1967, s.344-358.

Karlin, S. (1987): *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics.* New York: Dover Publications, Inc., 1987.

Karush, W. (1939): *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Conditions.* Dissertation, Department of Mathematics, University of Chicago, 1939. (Upubliceret).

Kittel, C. (1947): "The Nature and Development of Operations Research." *Science*, 105, 1947, s.150-153.

Kjeldsen, T. H. (1997): "The Historical Background of Nonlinear Programming." i *Selected Topics in Mathematics.* Proceedings of the first Nordic Summer School for female PhD students of mathematics, Luleå University, Sweden, 1997, s.63-67.

Kline, M. (1972): *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times.* New York: Oxford University Press, 1972.

Koopmans, T. C. (1951) (red.): *Activity Analysis of Production and Allocation.* Cowles Commission Monograph, 13, New York: Wiley, 1951.

Koopmans, T. C. (1961): "On the Evaluation of Kantorovich's Work of 1939." *Management Science*, 8, 1961, s.264-265.

König, D. (1927): "Über eine Schlussweise aus dem endlichen ins unendliche" *Acta Sci. Math. Szeged.*, 3, 1927, s.121-130.

Kragh, H. (1987): *An Introduction to the Historiography of Science.* Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

Kuhn, H. W. (1952): "Subgroup Theorems for Groups Presented by Generators and Relations." *Annals of Mathematics*, 56, 1952, s.22-46.

Kuhn, H. W. (1976): "Nonlinear Programming: A Historical View." *SIAM-AMS Proceedings*, 9, 1976, s.1-26.

Kuhn, H. W. (1991): "Nonlinear Programming: A Historical Note." i Jan Karel Lenstra, Alexander H. G. Rinnooy Kan og Alexander Schrijver (red.): *History of Mathematical Programming, A Collection of Personal Reminiscences.* Amsterdam: Noth-Holland, 1991, s.82-96.

Kuhn, H, W. (1995): "Tucker, A. W.: Some Reminiscence." Prepared with the assistance of Alan and Tom Tucker. Based on an oration given by Harold W. Kuhn. *Notices of the AMS*, October 1995.

Kuhn, H. W. og Tucker, A. W. (1950): "Nonlinear Programming." i J. Neyman (red.): *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.* Berkeley, 1950, s.481-492.

Kuhn, H. W. og Tucker, A. W. (1956) (red.): *Linear Inequalities and Related Systems.* Annals of Mathematics Studies, 38, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1956.

Kuhn, H. W. og Tucker, A. W. (1958): "John von Neumann's Work in the Theory of Games and Mathematical Economics." *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64, 1958, s.100-122.

Lagrange, J. -L. (1788): *Mécanique analitique.* 1788. Henvisningerne er til 1965 udgaven, Paris: Albert Blanchard, 1965.

Lanczos, C. (1986): *The Variational Principles of Mechanics.* New York: Dover Publications, Inc., 1986, 4. udgave.

Lardner, H. (1979): "The Origin of Operational Research." i K. B. Haley (red.): *Operations Research '78.* Proceedings of the Eighth IFORS International Conference on Operational Research, Toronto, Canada. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1979, s.3-12.

Larsen, M. (1996): *Den Hæmolytiske Plaque-Test -samtidige opdagelser og det partikulære-.* Specialerapport, Roskilde Universitetscenter, 1996.

Latour, B. (1996): "Susan E. Cozzens. Social Control and Multiple Discovery in Science: The Opiate Receptor Case." *Isis*, 84, 1993, s.194-195.

Leifman, L. J. (1990) (red.): *Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics: A Collection of Papers Dedicated to the Memory of Leonid Vital'evich Kantorovich.* Oxford: Oxford University Press, 1990.

Leonard, R. J. (1992): "Creating a Context for Game Theory." i E. Roy Weintraub (red.): *Towards a History of Game Theory.* Durham og London: Duke University Press, 1992, s.29-76.

Leonard, R. J. (1995): "From Parlor Games to Social Science: von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory 1928-1944." *The Journal of Economic Literature*, 33, 1995, s.730-761.

Lindsey, G. R. (1979): "Looking back over the Development and Progress of Operational Research." i K. B. Haley (red.): *Operational Research '78.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1979, s.13-31.

Luenberger, D. G. (1973): *Linear and Nonlinear Programming.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley publishing company, 1973.

Luenberger, D. G. (1989): *Linear and Nonlinear Programming.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley publishing company, 1989, 2. udgave.

Mac Lane, S. (1989): "Mathematics at the University of Chicago A Brief History." i P. Duren (red.): *A Century of Mathematics in America, part II.* American Mathematical Society, History of Mathematics, 2, 1989, s.127-154.

Magnanti, T. (1974): "Fenchel and Lagrange Duality are Equivalent." *Mathematical Programming,* 7, 1974, s.253-258.

Mangasarian, O. L. (1962): "Duality in Nonlinear Programming." *Quarterly of Applid Mathematics,* 20, 1962, s.300-302.

Mangasarian, O. L. og Ponstein, J. (1965): "Minimax and Duality in Nonlinear Programming." *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 11, 1965, s.504-518.

Mangasarian, O. L., Meyer, R. R. og Robinson, S. M. (1975) (red.): *Nonlinear Programming 2.* New York: Academic Press, 1975.

Mangasarian, O. L., Meyer, R. R. og Robinson, S. M. (1978) (red.): *Nonlinear Programming 3.* New York: Academic Press, 1978.

Mangasarian, O. L., Meyer, R. R. og Robinson, S. M. (1981) (red.): *Nonlinear Programming 4.* New York: Academic Press, 1981.

May, K. O. (1970): "Borel, Émile (Félix-Édouard-Justin)." i C. C. Gillispie (red.): *Dictionary of Scientific Biography,* 2, New York: Charles Scribner's Sons, 1970, s.302-304.

McArthur, C. W. (1990): *Operations Analysis in the U. S. Army Eight Air Force in World War II.* Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1990.

McCloskey, J. F. (1987): "U.S. Operations Research in World War II." *Operations Research,* 35, 1987, s.910-925.

McCormick, G. P. (1983): *Nonlinear Programming, Theory, Algorithms, and Applications.* New York: John Wiley and Sons, 1983.

McShane, E. J. (1958): "Gilbert Ames Bliss, May 9, 1876 - May 8, 1951." *Biographical Memoirs*, 31, New York: Columbia University Press, 1958, s.30-45.

Menger, K. (1937) (red.): *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums.* Wien, 1937.

Merton, R. K. (1961): "Singletons and Multiples in Science." i R. K. Merton: *The Sociology of Science, Theoretical and Empirical Investigations.* Chicago: University of Chicago Press, 1973, s.343-382.

Merton, R. K. (1973): *The Sociology of Science: Theoretical and Empirical Investigations.* Chicago: The University of Chicago Press, 1973.

Minkowski, H. (1896): *Geometrie der Zahlen.* Leipzig: B. G. Teubner, 1896, s.39-45.

Mirowski, P. (1991): "When Games Grow Deadly Serious: The Military Influence on the Evolution of Game Theory." i D. G. Goodwin (red.): *Economics and National Security*, Annual Supplement to Volume 23, History of Political Economy. Durham og London: Duke University Press, 1991, s.227-255.

Mirowski, P. (1992): "What Were von Neumann and Morgenstern Trying to Accomplish?" i E. Roy Weintraub (red.): *Toward a History of Game Theory.* Durham og London: Duke University Press, 1992, s.113-147.

Miser, H. J. (1986): "Introductory Note." *Operations Research*, 34, 1986, s.10.

Morse, P. M. (1948): "Mathematical Problems in Operations Research." *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54, 1948, s.602-621.

Morse, P. M. (1953): "Trends in Operations Research." *Operations Research*, 1, 1953, s.159-165.

Morse, P. M. (1955): "Where is the New Blood?" *Journal of the Operations Research Society of America*, 3, 1955, s.383-387.

Morse, P. M. (1956): "Training in Operations Research at the Massachusetts Institute of Technology." *Operations Research*, 4, 1956, s.733-735.

Morse, P. M. (1986): "The Beginnings of Operations Research in the United States." *Operations Research*, 34, 1986, s.10-17.

Morse, P. M. og Kimball, G. E. (1951): *Methods of Operations Research.* New York: MIT Press og John Wiley and Sons, Inc., 1951.

Ogburn, W. F. og Thomas, D. (1922): "Are Inventions Inevitable?" *Political Science Quarterly*, 37, 1922, s.83-98.

Old, B. S. (1961): "The Evolution of the Office of Naval Research." *Physics Today*, 14, 1961, s.30-35.

OR, (1971): "The Nature of Operations Research." *Operations Research*, 19, 1979, s.1139.

Ostrogradsky, M. (1834): "Considérations générales sur les momens des forces." *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de ST.-Pétersbourg*, sixieme série, I, 1838, læst 1834, s.129-150.

Ostrogradsky, M. (1838): "Mémoire sur les déplacemens instantanés des systèmes assujettis a des conditions variables." *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de ST.-Pétersbourg*, sixieme série, I, 1838, s.565-600.

Owens, L. (1989): "Mathematicians at War: Warren Weaver and the Applied Mathematics Panel, 1942-1945." i D. E. Rowe og J. McCleary (red.): *The History of Modern Mathematics, vol.II: Institutions and Applications.* San Diego: Academic Press, Inc., 1989, s.287-305.

Parshall, K. H. og Rowe, D. E. (1994): *The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876-1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore.* History of Mathematics, 8, American Mathematical Society, 1994.

Patinkin, D. (1983): "Multiple Discoveries and the Central Message." *American Journal of Sociology*, 89, 1983, s.306-323.

Pedersen, G. K. (1988): "Werner Fenchel." *Københavns Universitet, Årbog 1988.* København: Københavns Universitet, 1988, s.28-31.

Peressini, A. L., Sullivan, F. E. og Uhl, J. J. (1988): *The Mathematics of Nonlinear Programming.* New York: Springer-Verlag, 1988.

Prékopa, A. (1980): "On The Development of Optimization Theory." *American Mathematical Monthly*, 87, 1980, s.527-542.

Price, G. B. (1988a): "American Mathematicians in WWI." i P. Duren (red.): *A Century of Mathematics in America, Part I.* American Mathematical Society, Providence: Rhode Island, 1988, s.267-268.

Price, G. B. (1988b): "The Mathematical Scene, 1940-1965." i P. Duren (red.): *A Century of Mathematics in America, Part I.* American Mathematical Society, Providence: Rhode Island, 1988, s.379-404.

Ramskov, K. (1995): *Matematikeren Harold Bohr.* Ph.d-afhandling, Institut for de eksakte videnskabers historie, Det naturvidenskabelige Fakultet, Åarhus Universitet, 1995.

Rau, E. (??): "The Adoption of Operations Research in the United States during Worl War II." i A. C. Hughes og T. P. Hughes (red.): *Systems, Experts, and Computers*, planlagt til at blive publiceret i *Dibner Series*, redigeret af J. Z. Buchwald. (Erik Raus manuskript findes på Dibner Insituttet, MIT, Cambridge, Massachusetts.)

Reid, C. (1976): *Courant in Göttingen and New York. The Story of an Improbable Mathematician.* New York: Springer-Verlag, 1976.

Rees, M. S. (1948): "The Mathematics Program of the Office of Naval Research." *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1948, s.1-5.

Rees, M. S. (1977a): "Mathematics and the Government: The Post-War Years as Augury of the Future." i D. Tarwater (red.): *The Bicentennial Tribute to American Mathematics, 1776-1976.* The American Association of America, Buffalo, NY, 1977, s.101-116.

Rees, M. S. (1977b): "Early Years of the Mathematics Program at ONR." *Naval Research Reviews*, 30, 1977, s.22-29.

Rees, M. S. (1980): "The Mathematical Sciences and World War II." *Mathematical Monthly*, 87, 6, 1987, s.607-621.

Rellstab, U. (1992): "New Insights into the Collaboration between John von Neumann and Oskar Morgenstern on the *Theory of Games and Economic Behavior.*" i E. Roy Weintraub (red.): *Towards a History of Game Theory.* Durham og London: Duke University Press, 1992, s.77-94.

Rider, R. (1992): "Operations Research and Game Theory: Early Connections." i E. Roy Weintraub (red.): *Towards a History of Game Theory.* Durham og London: Duke University Press, 1992, s.225-240.

Rockafellar, R. T. (1964): "Minimax Theorems and Conjugate Saddle Functions." *Mathematica Scandinavica*, 14, 1964, s.151-173.

Rockafellar, R. T. (1966): "Extension of Fenchel's Duality Theorem for Convex Functions." *Duke Mathematical Journal*, 33, 1966, s.81-90.

Rockafellar, R. T. (1968): "A General Correspondance Between Dual Minimax Problems and Convex Programs." *Pacific Journal of Mathematics*, 25, 1968, s.597-612.

Rockafellar, R. T. (1970): *Convex Analysis.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1970.

Rosen, J. B., Mangasarian, O. L. og Ritter, K. (1970) (red.): *Nonlinear Programming.* New York: Academic Press, 1970.

Rosenhead, J. (1989): "Operational Research on the Crossroads: Cecil Gordon and the Development of Post-war OR." *Journal of the Operational Research Society*, 40, 1989, s.3-28.

Rosser, J. B. (1982): "Mathematics and Mathematicians in World War II." *Notices of the American Mathematical Society*, 29, 1982, s.509-515.

Roy, R. H. (1956): "Operations Research at the Johns Hopkins University." *Operations Research*, 4, 1956, s.735-738.

Santa Barbara News-Press, May, 1987.

Sapolsky, H. M. (1979): "Academic Science and the Military: The Years Since the Second World War." i N. Reingold (red.): *The Sciences in the American Context: New Perspectives.* Washington, D. C.: Smithsonian Institution Press, 1979, s.379-399.

Sasieni, M., Yaspan, A. og Friedman, L. (1959): *Operations Research, methods and problems.* New York: John Wiley and Sons, Inc., 1959.

Sawyer, F. L., Charlesby, A., Easterfield, T. E. og Treadwell, E. E. (1989): "Reminiscences of Operational Research in World War II by Some of its Practitioners." *Journal of the Operational Research Society*, 40, 1989, s.115-136.

Schwartz, B.L. (1989): "The Invention of Linear Programming." *Annals of the History of Computing*, 11, 1989, s.145-147.

Schweber, S. S. (1988): "The Mutual Embrace of Science and the Military: ONR and the Growth of Physics in the United States after World War II." i E. Mendelsohn, M. R. Smith og P. Weingart (red.): *Science, Technology and the Military.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1988, s.3-45.

Senior Life, august, 1987.

Sigurdsson, S. (1992): "Eqivalence, Pragmatic Platonism, and Discovery of the Calculus." i M. J. Nye et al. (red.): *The Invention of Physical Science.* Holland: Kluwer Academic Publishers, 1992, s.97-116.

Simmons, D. M. (1975): *Nonlinear Programming for Operations Research.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1975.

Sinaceur, H. (1998): "Fourier's Analysis of Inequalities (1831) and Tarski's Definable Sets of Real Numbers (1931)." Foredrag holdt ved AMS i 1998.

Slater, M. (1950): "Lagrange Multipliers Revisited." *Cowles Commission Discussion Paper No. 403*, 1950.

Smith, B. (1969): *The RAND Corporation, Case Study of a Nonprofit Advisory Corporation.* Cambridge, Massachusetts: Havard University Press, 1969.

Sposito, V. A. (1975): *Linear and Nonlinear Programming.* Ames: The Iowa State University Press, 1975.

Stiemke, E. (1915): "Über positive Lösungen homogenen linearer Gleichungen." *Mathematische Annalen*, 76, 1915, s.340-342.

Stoer, J. (1963): "Duality in Nonlinear Programming and the Minimax Theorem." *Numerische Mathematik*, 5, 1963, s.371-379.

Stokes, R. W. (1931): "A Geometric Theory of Linear Inequalities." *Transactions of the American Mathematical Society*, 33, 1931, s.782-805.

Stone, M. H. (1989): "Reminiscences of Mathematics at Chicago." i P. Duren (red.): *A Century of Mathematics in America, part II.* American Mathematical Society, History of Mathematics, 2, 1989, s.183-190.

Struik, D.J. (1967): *A Concise History of Mathematics.* New York: Dover Publications, Inc., 1967, 4. udgave.

Takyama, A. (1974): *Mathematical Economics.* Hinsdale, Illinois: The Dryden Press, 1974.

Tucker, B. (1995): "Tucker, A. W.: Some Reminiscence." Prepared with the assistance of Alan and Tom Tucker. Based on an oration given by Harold W. Kuhn. *Notices of the AMS*, October 1995.

Tucker, A. W. (1956): "Dual Systems of Homogeneous Linear Relations." i H. W. Kuhn og A. W. Tucker (red.): *Linear inequalities and related systems.* Annals of Mathematics Studies, nr. 38, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1956.

Ulam, S. (1958): "John von Neumann, 1903-1957." *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64, 1958, s.1-49.

Valentine, F. A. (1937): "The Problem of Lagrange with Differential Inequalities as added Side Conditions." i *Contributions to the Calculus of Variations 1933-1937.* Chicago, Illinois: The University of Chicago Press, 1937, s.1-36.

Ville, J. (1938): *Sur la Théorie génerale des jeux oú intervient l'habileté des joueurs.* i [Borel et al. 1938, s.105-117].

von Neumann, J. (1928a): "Sur la théorie des jeux." *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 186.25 (18. juni), 1928, s.1689-1691.

von Neumann, J. (1928): "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele." *Mathematische Annalen*, 100, 1928, s.295-320.

von Neumann, J. (1937): "Über ein ökonomische Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes." i K. Menger (red.) *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums.* Wien, 1937, s.73-83.

von Neumann, J. (1947): "Discussion of a Maximum Problem."i A. H. Taub (red.): *John von Neumann Collected Works*, 6, Oxford: Pergamon Press, 1963, s.89-95.

von Neumann, J. (1953): "Communication on the Borel Notes." *Econometrica*, 21, 1953, s.124-125.

von Neumann, J. og Morgenstern, O. (1944): *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton: Princeton University Press, Princeton, 1944.

Waddington, C. H. (1973): *OR in World War 2: Operational Research Against the U-boat.* London, Paul Elek, 1973.

Weintraub, E. R. (1983): "On the Existence of a Competitive Equilibrium: 1930-54." *Journal of Economic Literature* 21, 1983, s.1-39.

Weyl, H. (1935): "Elementare Theorie der konvexen Polyeder." *Mathematici Helvetici*, 7, 1935, s.209-306.

Weyl, H. (1950): "Elementary Theory of Convex Polyhedra." i H. W. Kuhn og A. W. Tucker (red.): *Contributions to the Theory of Games.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1950, s.3-25. (Oversættelse af [Weyl, 1935] af Kuhn.)

Williams, E. C. (1968): "The Origin of the Term "Operational Research" and the Early Development of the Military Work." *Operational Research Quarterly*, 19, 1968, s.111-113.

Wolfe, P. (1961): "A Duality Theorem for Nonlinear Programming." *Quarterly of Applied Mathematics*, 19, 1961, s.239-244.

Zachary, P. G. (1997): *Endless Frontier: Vannevar Bush, Engineer of the American Century.* New York: The Free Press, 1997.

Zangwill, W. I. (1969): *Nonlinear Programming a Unified Approach.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1969.

Zermelo, E. (1913): "Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels." i *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, 2, 1913, s. 501-504.

*Liste over tidligere udkomne tekster tilsendes gerne. Henvendelse herom kan ske til IMFUFA's sekretariat*

tlf. 46 74 22 63

---

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"

by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"

by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"

af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen

Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"

af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"

by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics

by: Johnny T. Ottesen

223/92 *THE FUNCTIONAL DETERMINANT*

*by: Thomas P. Branson*

224/92 *UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES*

*by: Jeppe C. Dyre*

225/92 *"HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium*

*af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard*

*Vejleder: Petr Viscor*

226/92 *"METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"*

*by: Bent Sørensen*

227/92 "Computersimulering og fysik"

af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"

Fire artikler af:

Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"

En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ basseret på andenordens kybernetik og semiotik.

af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"

et matematisk projekt af

Karen Birkelund, Bjørn Christensen

Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"

af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård

Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility

by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"

by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS

- Modul 3 fysik projekt -

af: Thomas Jessen

---

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse

Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1

af: Bent Sørensen

242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel

Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer

af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck

Vejleder: Jesper Larsen

243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN

Et 1.modul fysikprojekt

af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning

Projektrapport

af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen

Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen

245a+b /93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere
Specialerapport

af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade

Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen

246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK
- LÆREPROCESSER I SKOLEN

af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA

247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS

by: Jeppe C. Dyre

248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.

by: B. Booss-Bavnbek

With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist

*250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV*

*Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen*

*Vejleder: Stig Andur Pedersen*

***251|93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones***

***by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreasen and Ebbe Thue Poulsen***

***252|93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER***

***Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgaard, Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen***

***253/93 Kuglepakning***

***Teori og model***

***af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse***

***Vejleder: Mogens Niss***

***254/93 Regressionsanalyse***

***Materiale til et statistikkursus***

***af: Jørgen Larsen***

***255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED***

***af: Peter Harremoës***

***256/93 Determination of the Frequency Dependent Bulk Modulus of Liquids Using a Piezoelectric Spherical Shell (Preprint)***

***by: T. Christensen and N.B.Olsen***

***257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske keramikker***

***af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen, Christina Specht, Mikko Østergård***

***Vejleder: Tage Christensen***

***258/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"***

***af: Mogens Brun Heefelt***

***259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW TEMPERATURES***

***by: Jeppe C. Dyre***

***260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN DIMENSIONS 2, 3, AND 4***

***by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski***

261/93 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i Fysik
Eksamensopgaver fra 1976-93

262/93 Separability and the Jones Polynomial
by: Lars Kadison

263/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" II
af: Mogens Brun Heefelt

264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2
af: Bent Sørensen

---

**265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED SYMMETRIC SPACES**
**To Sigurdur Helgason on his sixtyfifth birthday**
**by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert and Gestur Olafsson**

266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i laterale supergitre
Fysikspeciale af: Anja Boisen, Peter Bøggild, Karen Birkelund
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik Lindelof, Peder Voetmann Christiansen

267/94 Kom til kort med matematik på Eksperimentarium - Et forslag til en opstilling
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

268/94 Life is like a sewer ...
Et projekt om modellering af aorta via en model for strømning i kloakrør
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson, Lone Michelsen, Per M. Hansen
Vejleder: Jesper Larsen

269/94 Dimensionsanalyse en introduktion metaprojekt, fysik
af: Tine Guldager Christiansen, Ken Andersen, Nikolaj Hermann, Jannik Rasmussen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRESENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS
by: Jacob Jacobsen

271/94 Matematikken i Fysikken.
Opdaget eller opfundet
NAT-BAS-projekt
vejleder: Jens Højgaard Jensen

272/94 Tradition og fornyelse
Det praktiske elevarbejde i gymnasiets fysikundervisning, 1907-1988
af: Kristian Hoppe og Jeppe Guldager
Vejledning: Karin Beyer og Nils Hybel

273/94 Model for kort- og mellemdistanceløb
Verifikation af model
af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann, Bettina Sørensen
Vejleder: Mette Olufsen

274/94 MODEL 10 - en matematisk model af intravenøse anæstetikas farmakokinetik
3. modul matematik, forår 1994
af: Trine Andreasen, Bjørn Christensen, Christine Green, Anja Skjoldborg Hansen. Lisbeth Helmgaard
Vejledere: Viggo Andreasen & Jesper Larsen

275/94 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht
2nd Edition
by: Bernhelm Booss-Bavnbek

276/94 Dispersionsmodellering
Projektrapport 1. modul
af: Gitte Andersen, Rehannah Borup, Lisbeth Friis, Per Gregersen, Kristina Vejrø
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

277/94 PROJEKTARBEJDSPÆDAGOGIK - Om tre tolkninger af problemorienteret projektarbejde
af: Claus Flensted Behrens, Frederik Voetmann Christiansen, Jørn Skov Hansen, Thomas Thingstrup
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

278/94 The Models Underlying the Anaesthesia Simulator Sophus
by: Mette Olufsen(Math-Tech), Finn Nielsen (RISØ National Laboratory), Per Føge Jensen (Herlev University Hospital), Stig Andur Pedersen (Roskilde University)

279/94 Description of a method of measuring the shear modulus of supercooled liquids and a comparison of their thermal and mechanical response functions.
af: Tage Christensen

280/94 A Course in Projective Geometry
by Lars Kadison and Matthias T. Kromann

281/94 Modellering af Det Cardiovaskulære System med Neural Pulskontrol
Projektrapport udarbejdet af:
Stefan Frello, Runa Ulsøe Johansen, Michael Poul Curt Hansen, Klaus Dahl Jensen
Vejleder: Viggo Andreasen

282/94 Parallelle algoritmer
af: Erwin Dan Nielsen, Jan Danielsen, Niels Bo Johansen

283/94 Grænser for tilfældighed
(en kaotisk talgenerator)

af: Erwin Dan Nielsen og Niels Bo Johansen

284/94 Det er ikke til at se det, hvis man ikke lige ve' det!
Gymnasiematematikkens begrundelsesproblem

En specialerapport af Peter Hauge Jensen og Linda Kyndlev

Vejleder: Mogens Niss

285/94 Slow coevolution of a viral pathogen and its diploid host
by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

286/94 The energy master equation: A low-temperature approximation to Bässler's random walk model
by: Jeppe C. Dyre

287/94 A Statistical Mechanical Approximation for the Calculation of Time Auto-Correlation Functions
by: Jeppe C. Dyre

288/95 PROGRESS IN WIND ENERGY UTILIZATION
by: Bent Sørensen

289/95 Universal Time-Dependence of the Mean-Square Displacement in Extremely Rugged Energy Landscapes with Equal Minima
by: Jeppe C. Dyre and Jacob Jacobsen

290/95 Modellering af uregelmæssige bølger
Et 3.modul matematik projekt
af: Anders Marcussen, Anne Charlotte Nilsson, Lone Michelsen, Per Mørkegaard Hansen
Vejleder: Jesper Larsen

291/95 1st Annual Report from the project
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
an example of using methods developed for the OECD/IEA and the US/EU fuel cycle externality study
by: Bent Sørensen

292/95 Fotovoltaisk Statusnotat 3
af: Bent Sørensen

293/95 Geometridiskussionen - hvor blev den af?
af: Lotte Ludvigsen & Jens Frandsen
Vejleder: Anders Madsen

294/95 Universets udvidelse - et metaprojekt
Af: Jesper Duelund og Birthe Friis
Vejleder: Ib Lundgaard Rasmussen

295/95 A Review of Mathematical Modeling of the Controled Cardiovascular System
By: Johnny T. Ottesen

296/95 RETIKULER den klassiske mekanik
af: Peder Voetmann Christiansen

297/95 A fluid-dynamical model of the aorta with bifurcations

by: Mette Olufsen and Johnny Ottesen

298/95 Mordet på Schrödingers kat - et metaprojekt om to fortolkninger af kvantemekanikken

af: Maria Hermannsson, Sebastian Horst, Christina Specht

Vejledere: Jeppe Dyre og Peder Voetmann Christiansen

299/95 ADAM under figenbladet - et kig på en samfundsvidenskabelig matematisk model

Et matematisk modelprojekt
af: Claus Dræby, Michael Hansen, Tomas Højgård Jensen
Vejleder: Jørgen Larsen

300/95 Scenarios for Greenhouse Warming Mitigation

by: Bent Sørensen

301/95 TOK Modellering af træers vækst under påvirkning af ozon

af: Glenn Møller-Holst, Marina Johannessen, Birthe Nielsen og Bettina Sørensen

Vejleder: Jesper Larsen

302/95 KOMPRESSORER - Analyse af en matematisk model for aksialkompressorer

Projektrapport sf: Stine Bøggild, Jakob Hilmer, Pernille Postgaard

Vejleder: Viggo Andreasen

303/95 Masterlignings-modeller af Glasovergangen
Termisk-Mekanisk Relaksation
Specialerapport udarbejdet af:

Johannes K. Nielsen, Klaus Dahl Jensen

Vejledere: Jeppe C. Dyre, Jørgen Larsen

304a/95 STATISTIKNOTER Simple binomialfordelingsmodeller
af: Jørgen Larsen

304b/95 STATISTIKNOTER Simple normalfordelingsmodeller
af: Jørgen Larsen

304c/95 STATISTIKNOTER Simple Poissonfordelingsmodeller
af: Jørgen Larsen

304d/95 STATISTIKNOTER Simple multinomialfordelingsmodeller
af: Jørgen Larsen

304e/95 STATISTIKNOTER Mindre matematisk-statistisk opslagsvæ
indeholdende bl.a. ordforklaringer, resuméer og tabeller
af: Jørgen Larsen

305/95 The Maslov Index:
A Functional Analytical Definition
And The Spectral Flow Formula

By: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani

306/95 Goals of mathematics teaching

Preprint of a chapter for the forth-
.comming International Handbook of
Mathematics Education (Alan J.Bishop, ed)

By: Mogens Niss

307/95 Habit Formation and the Thirdness of Signs

Presented at the semiotic symposium

The Emergence of Codes and Intensions as
a Basis of Sign Processes

By: Peder Voetmann Christiansen

308/95 Metaforer i Fysikken

af: Marianne Wilcken Bjerregaard,
Frederik Voetmann Christiansen,
Jørn Skov Hansen, Klaus Dahl Jensen
Ole Schmidt

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og
Petr Viscor

309/95 Tiden og Tanken
En undersøgelse af begrebsverdenen Matematik
udført ved hjælp af en analogi med tid

af: Anita Stark og Randi Petersen

Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

---

310/96 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra
algebra og analyse" (E1)

af: Mogens Brun Heefelt

311/96 2nd Annual Report from the project
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH
ENERGY SYSTEM

by: Hélène Connor-Lajambe, Bernd Kuemmel,
Stefan Krüger Nielsen, Bent Sørensen

312/96 Grassmannian and Chiral Anomaly

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

313/96 THE IRREDUCIBILITY OF CHANCE AND
THE OPENNESS OF THE FUTURE
The Logical Function of Idealism in Peirce's
Philosophy of Nature

By: Helmut Pape, University of Hannover

314/96 Feedback Regulation of Mammalian
Cardiovascular System

By: Johnny T. Ottesen

315/96 a + b "Rejsen til tidens indre" - Udarbejdelse af
et manuskript til en fjernsynsudsendelse
+ manuskript

af: Gunhild Hune og Karina Goyle

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og
Bruno Ingemann

316/96 Plasmaoscillation i natriumklynger

Specialerapport af: Peter Meibom, Mikko Østergård

Vejledere: Jeppe Dyre & Jørn Borggreen

317/96 Poincaré og symplektiske algoritmer

af: Ulla Rasmussen

Vejleder: Anders Madsen

318/96 Modelling the Respiratory System

by: Tine Guldager Christiansen, Claus Dræby

Supervisors: Viggo Andreasen, Michael Danielsen

319/96 Externality Estimation of Greenhouse Warming
Impacts

by: Bent Sørensen

320/96 Grassmannian and Boundary Contribution to the
-Determinant

by: K.P.Wojciechowski et al.

321/96 Modelkompetencer - udvikling og afprøvning
af et begrebsapparat

Specialerapport af: Nina Skov Hansen,
Christine Iversen, Kristin Troels-Smith

Vejleder: Morten Blomhøj

322/96 OPGAVESAMLING
Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1996

323/96 Structure and Dynamics of Symmetric Diblock
Copolymers
PhD Thesis
by: Christine Maria Papadakis

324/96 Non-linearity of Baroreceptor Nerves
by: Johnny T. Ottesen

325/96 Retorik eller realitet ?
Anvendelser af matematik i det danske
Gymnasiums matematikundervisning i
perioden 1903 - 88

Specialerapport af Helle Pilemann
Vejleder: Mogens Niss

326/96 Bevisteori
Eksemplificeret ved Gentzens bevis for
konsistensen af teorien om de naturlige tal

af: Gitte Andersen, Lise Mariane Jeppesen,
Klaus Frovin Jørgensen, Ivar Peter Zeck

Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Stig Andur Pedersen

327/96 NON-LINEAR MODELLING OF INTEGRATED ENERGY
SUPPLY AND DEMAND MATCHING SYSTEMS

by: Bent Sørensen

328/96 Calculating Fuel Transport Emissions
by: Bernd Kuemmel

329/96 The dynamics of cocirculating influenza strains conferring partial cross-immunity
and
A model of influenza A drift evolution
by: Viggo Andreasen, Juan Lin and Simon Levin

330/96 LONG-TERM INTEGRATION OF PHOTOVOLTAICS INTO THE GLOBAL ENERGY SYSTEM
by: Bent Sørensen

331/96 Viskøse fingre
Specialerapport af:
Vibeke Orlien og Christina Specht
Vejledere: Jacob M. Jacobsen og Jesper Larsen

---

332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG
Specialerapport af:
Stine Sofia Korremann
Vejleder: Dorthe Posselt

333/97 Biodiversity Matters
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity
by: Bernd Kuemmel

334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen

335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids
by: Jeppe C. Dyre

336/97 PROBLEM-ORIENTATED GROUP PROJECT WORK AT ROSKILDE UNIVERSITY
by: Kathrine Legge

337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose
- et projekt om matematisk modellering
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen
Vejleder: Jørgen Larsen

338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne
Første modul fysikprojekt
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss, Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup
Vejleder: Tage Christensen

339/97 Defining Discipline
by: Wolfgang Coy

340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -
by: Carsten Lunde Petersen

341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry
by Mogens Niss

342/97 LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND AND SUPPLY
A global clean fossil scenario discussion paper
prepared by Bernd Kuemmel
Project leader: Bent Sørensen

343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

344/97 Puzzles and Siegel disks
by Carsten Lunde Petersen

---

345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anestesia Simulator
Ph.D. Thesis
by: Mette Sofie Olufsen

346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces
af: Sebastian Horst
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen

347/98 Verificering af Matematiske Modeller
- en analyse af Den Danske Eulerske Model
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann Lisbet Øhlenschlæger
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact assessment for power plants in Denmark
by: Stefan Krüger Nielsen
Project leader: Bent Sørensen

349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i arbejdsmarkedsuddannelserne
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege

350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96

351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education
by: Mogens Niss

352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications

by: Carsten Lunde Petersen

353/98 Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning

Specialerapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen

Vejleder: Morten Blomhøj

354/98 A GLOBAL RENEWABLE ENERGY SCENARIO

by: Bent Sørensen and Peter Meibom

355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces

by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

356/98 Terrænmodellering

Analyse af en matematisk model til konstruktion af terrænmodeller

Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge

Vejleder: Johnny Ottesen

*357/98 Cayleys Problem*

*En historisk analyse af arbejdet med Cayley problem fra 1870 til 1918*

*Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K.W. Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff*

*Vejleder: Jesper Larsen*

*358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an Implementation in Cardiovascular Models*

*Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen*

*359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios*

*by: Bent Sørensen*

*360/99 **SYMMETRI I FYSIK***

*En Meta-projektrapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné*

*Vejleder: Peder Voetmann Christiansen*

*361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants*

*by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani*

*362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen*

*En videnskabsfagsprojekt-rapport af Martin Niss*

*Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen*

***363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION***

***by: Donald T. Campbell, MArk H. Bickhard and Peder V. Christiansen***

***364/99 Illustrationens kraft***

***Visuel formidling af fysik***

***Integreret speciale i fysik og kommunikation***

***af: Sebastian Horst***

***Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjørup***

***365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context***

***by: Tine Wedege***

***366/99 LATEX FOR FORFATTERE***

***En introduktion til LATEX og IMFUFA-LATEX***

***af: Jørgen Larsen***

**367/99 Boundary Reduction of Spectral invariants and Unique Continuation Property**

**by Bernhelm Booss-Bavnbek**

368/99 Kvartalsrapport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISTYSTEM

Projektleder: Bent Sørensen

369/99 DYNAMICS OF Complex Quadratic Correspondences

by: Jacob Jalving

370/99 OPGAVESAMLING

Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999

(erstatter tekst nr. 350/98.

370/99 Bevisets stilling

- beviser og bevisførelse i en gymnasial matematikundervisning

Matematikspeciale af: Maria Hermannsson

Vejleder: Mogens Niss